Уравнения на ЕГЭ по математике. Часть 2

Модуль числа. Уравнения с модулем

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым.

Модуль числа и уравнения с модулем — тема особенная, прямо-таки заколдованная. Она совсем не сложная, просто в школе ее редко объясняют нормально.

В результате без специальной подготовки почти никто из школьников не может дать правильное определение модуля и тем более решить уравнение с модулем. И эту картину мы наблюдаем на протяжении многих лет.

Освоив эту тему, вы сумеете обойти множество конкурентов на ЕГЭ, олимпиадах и вступительных экзаменах.

Модуль числа называют еще абсолютной величиной этого числа. Попросту говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак. В записи положительного числа и так нет никакого знака, поэтому модуль положительного числа равен ему самому. Например, $|5| = 5$. Модуль нуля равен нулю. А модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному (без знака!).

Например, $|-7| = 7$, $|-9{,}36| = 9{,}36$.

Обратите внимание: модуль числа всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

Дадим определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

От большинства известных из школы определений оно отличается лишь одним: в нем есть выбор. Есть условие. И в зависимости от этого условия мы раскрываем модуль либо так, либо иначе.

Так же, как в информатике — в разветвляющихся алгоритмах с применением условных операторов. Как, вообще-то, и в жизни: если сдал ЕГЭ на минимальный балл — можешь подавать документы в вуз. Не сдал на минимальный балл — можешь идти в армию.

Таким образом, если под знаком модуля стоит выражение, зависящее от переменной, мы раскрываем модуль по определению. Например,

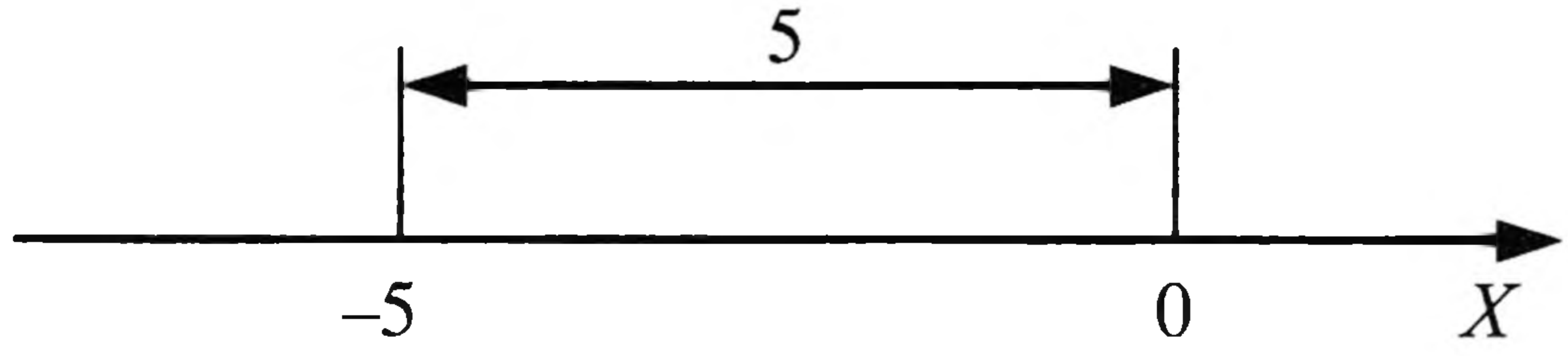
$$|2x-5|=\begin{cases}2x-5, \text{ если } 2x-5\geq 0,\\ 5-2x, \text{ если } 2x-5<0.\end{cases}$$

В некоторых случаях модуль раскрывается однозначно. Например, $|x^2+y^2|=x^2+y^2$, так как выражение под знаком модуля неотрицательно при любых x и y. Или: $|-z^2-1|=z^2+1$, так как выражение под модулем отрицательно при любых z.

Геометрическая интерпретация модуля

Нарисуем числовую прямую. **Модуль числа** — *это расстояние от нуля до данного числа.*

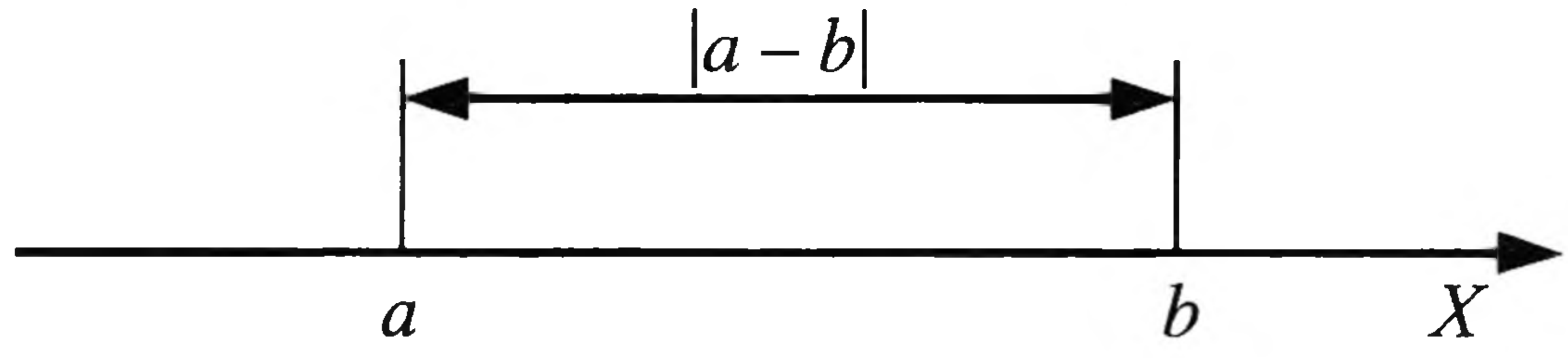
Например, $|-5|=5$. То есть расстояние от точки -5 до нуля равно 5.



Эта геометрическая интерпретация очень полезна для решения уравнений и неравенств с модулем.

Рассмотрим простейшее уравнение $|x|=3$. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трем. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения $|x|=3$ есть два решения: $x=3$ и $x=-3$.

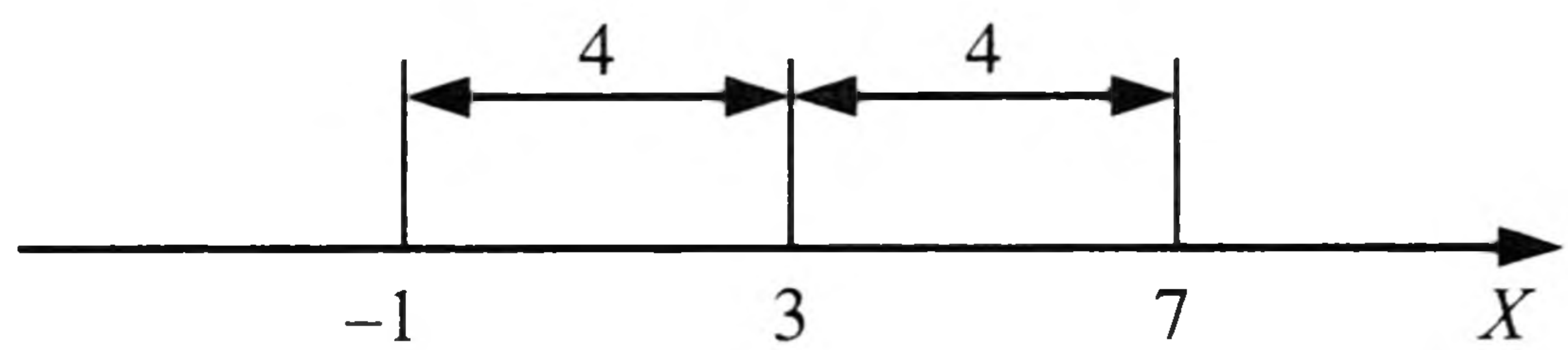
Вообще, если имеются два числа a и b, то $|a-b|$ равно расстоянию между ними на числовой прямой.



Мы уже встречали такое обозначение. Вспомните: $|AB|$ — это длина отрезка AB, то есть расстояние от точки A до точки B.

Ясно, что $|a-b| = |b-a|$ (расстояние от точки a до точки b равно расстоянию от точки b до точки a).

Решим уравнение $|x-3| = 4$. Эту запись можно прочитать так: расстояние от точки x до точки 3 равно 4. Отметим на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.

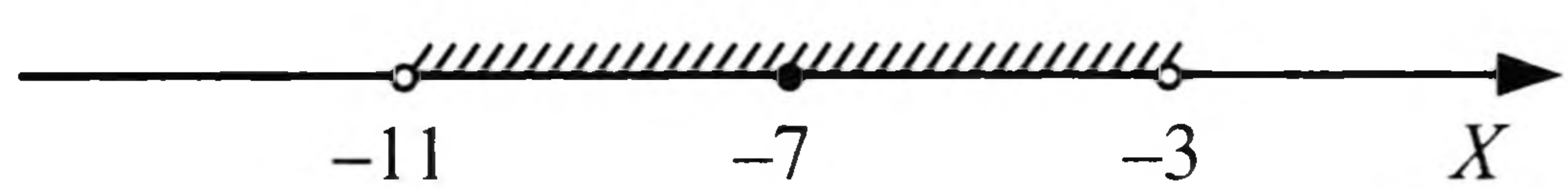


Мы видим, что наше уравнение имеет два решения: –1 и 7. Мы решили его самым простым способом — без использования определения модуля.

Перейдем к неравенствам. Решим неравенство $|x+7| < 4$.

Эту запись можно прочитать так: «расстояние от точки x до точки –7 меньше четырех».

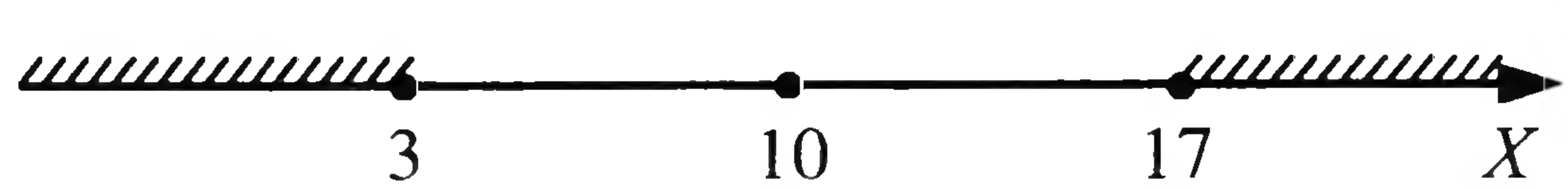
Отмечаем на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.



Ответ: (–11; –3).

Другой пример. Решим неравенство $|10-x| \geq 7$.

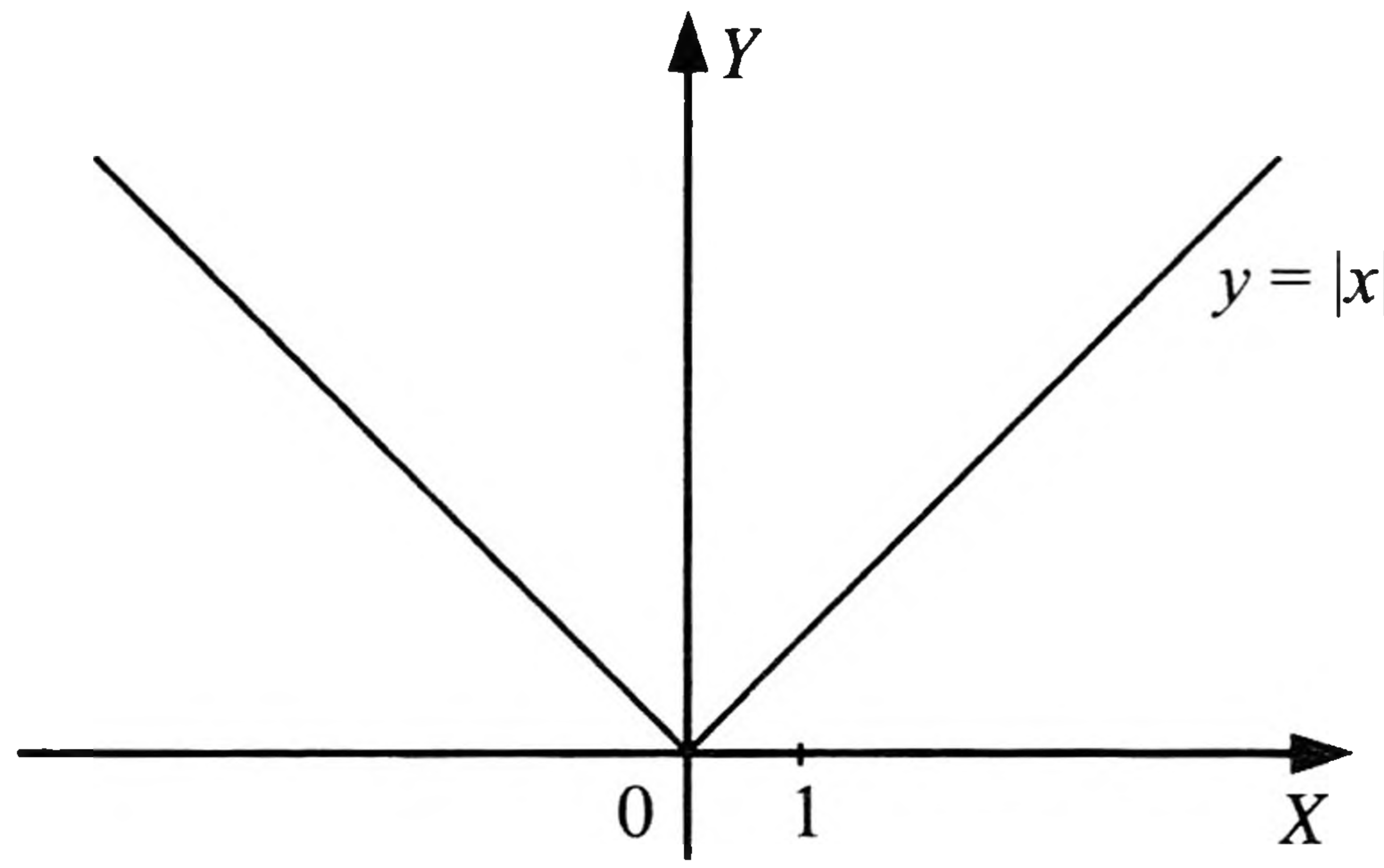
Расстояние от точки 10 до точки x больше или равно семи. Отметим эти точки на числовой прямой.



Ответ: $(-\infty; 3] \cup [17, +\infty)$.

График функции $y = |x|$

Этот график надо знать обязательно. Для $x \geq 0$ имеем $y = x$. Для $x < 0$ имеем $y = -x$. В результате получаем:



С помощью этого графика также можно решать уравнения и неравенства.

Корень из квадрата

Нередко в задачах ЕГЭ требуется вычислить $\sqrt{a^2}$, где a — некоторое число или выражение.

Вспомните, мы об этом уже говорили.

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

Действительно, по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a^2. Оно равно a при $a \geq 0$ и $-a$ при $a < 0$, т. е. как раз $|a|$.

Уравнения и неравенства с модулем

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым

Если на экзамене вам попадется уравнение или неравенство с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного экзаменационного времени.

Поэтому мы и хотим рассказать вам о приемах, упрощающих решение таких задач. Прежде всего вспомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим различные типы уравнений с модулем. К неравенствам перейдем позже.

Слева модуль, справа число

Это самый простой случай.

1. Решим уравнение $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

Есть только два числа, модули которых равны четырем. Это 4 и –4. Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \text{ или } x^2 - 5x + 4 = -4.$$

Второе уравнение не имеет решений. Решения первого: $x = 0$ и $x = 5$.

Ответ: 0; 5.

Слева функция под модулем, справа функция без модуля

Здесь приходится раскрывать модуль по определению... или соображать!

2. $|2 - x| = 5 - 4x$.

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем.

Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ 2 - x = 5 - 4x; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы: $x = 1$. У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

3. $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

Первый случай: $x \geq 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2},\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Число x_2, будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли условию $x \geq 3$ число x_1. Для этого составим разность и определим ее знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит, x_1 больше трех и потому является корнем исходного уравнения.

Второй случай: $x < 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(3-x) - 7x + 11 = 0,$$

$$x^2 - 11x + 23 = 0,$$

$$x_3 = \frac{11+\sqrt{29}}{2},\ x_4 = \frac{11-\sqrt{29}}{2}.$$

Число x_3 больше, чем $\frac{11}{2}$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4:

$$x_4 - 3 = \frac{11-\sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

4. $|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1$.

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не точный квадрат. Давайте лучше воспользуемся следующим соображением: уравнение вида $|A| = B$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = B, \\ B \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} A = -B, \\ B \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

То же самое, но немного по-другому:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B; \end{array}\right. \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geq 0$.

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:

$$2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1,$$

$$2x^2 - 9x - 3 = 0,$$

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{105}}{4},\ x_2 = \frac{9-\sqrt{105}}{4}.$$

Затем решаем второе уравнение:

$$2x^2 - 3x - 4 = 1 - 6x,$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

$$x_3 = 1,\ x_4 = -\frac{5}{2}.$$

Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

$$6x_1 - 1 = 6 \cdot \frac{9+\sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50+6\sqrt{105}}{4} > 0;$$

$$6x_2 - 1 = 6 \cdot \frac{9-\sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50-6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500}-\sqrt{3780}}{4} < 0;$$

$$6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0;$$

$$6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0.$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3.

Ответ: 1; $\frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

Квадратные уравнения с заменой $|x| = t$

Решим уравнение: $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

Поскольку $x^2 = |x|^2$, удобно сделать замену $|x| = t$. Получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 1, \\ |x| = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ \text{решений нет.} \end{array}\right.$$

Ответ: ± 1.

«Слева модуль, справа модуль»

Речь идет об уравнениях вида $|A| = |B|$. Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Все просто:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B. \end{array}\right.$$

Например, рассмотрим уравнение: $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$. Оно равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{array}\right.$$

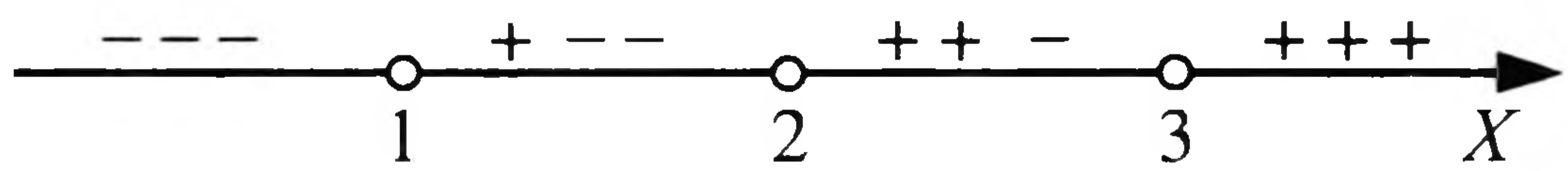
Остается решить каждое из уравнений совокупности и записать ответ.

Два или несколько модулей в уравнении. Метод интервалов для модулей

Решим уравнение: $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — **метод интервалов для модулей.**

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1, x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Сразу уточним, что точки, являющиеся границами интервалов, можно «приклеивать» либо к одному, либо к другому интервалу. Можно и к обоим сразу.

Случай 1.
$x \geq 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) = 4,$$
$$x = 5.$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2.
$2 \leq x < 3$. Последний модуль теперь раскрываем «с минусом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 2.$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3:
$1 \leq x < 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$4 = 4.$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Из предыдущего пункта мы узнали, что $x = 2$ — тоже решение. Значит, все числа из промежутка $[1; 2]$ — решения данного уравнения.

Случай 4.
$x < 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 1.$$

Точка $x = 1$ не входит в этот промежуток. Зато она входит в предыдущий, значит, $x = 1$ является решением.

Ответ: $[1; 2] \cup \{5\}$.

«Модуль в модуле»

5. Решим уравнение: $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$.

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x < 3$. Получаем:

$$|3 - x - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|4 - 3x| = 4x - 10.$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому, чтобы раскрыть еще один модуль, приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} < x < 3$. Получаем в этом случае:

$$3x - 4 = 4x - 10,$$
$$x = 6.$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \le \frac{4}{3}$. Тогда:

$$4 - 3x = 4x - 10,$$
$$x = 2.$$

Это значение x также не годится.

Итак, при $x < 3$ решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) $x \ge 3$. Имеем:

$$|x - 3 - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|x + 2| = 4x - 10.$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно в рассматриваемом промежутке, то есть при $x \ge 3$! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$x + 2 = 4x - 10,$$
$$x = 4.$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

Неравенства с модулем

Никаких принципиально новых идей здесь не возникает. Всеми необходимыми знаниями вы уже владеете. Поэтому мы разберем лишь две задачи.

6. $2|x-4|+|3x+5|\geq 16$.

1) $x>4$. Имеем:

$$2(x-4)+3x+5\geq 16,$$

$$x\geq \frac{19}{5}.$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x>4$. Иными словами, все числа из промежутка $(4;+\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3}\leq x\leq 4$. Имеем в данном случае:

$$2\,(4-x)+3x+5\geq 16,$$

$$x\geq 3.$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3;4]$.

3) $x<-\frac{5}{3}$. Имеем:

$$2(4-x)-3x-5\geq 16,$$

$$x\leq -\frac{13}{5}.$$

Так как $-\frac{13}{5}<-\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right]$ служат решениями исходного неравенства.

Остается объединить множества решений, полученные в трех рассмотренных случаях.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right]\cup[3;+\infty)$.

7. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

В этой задаче корни квадратного трехчлена под модулем — целые числа. Значит, раскрыть модуль по определению будет легко. А что будет в случае, если дискриминант не является точным квадратом?

Замените, например, под модулем –3 на –5. Объем вычислительной работы существенно возрастет!

Покажем другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид $|A| < B$. Очевидны следующие утверждения.

- Если $B \le 0$, то неравенство не имеет решений.
- Если $B > 0$, то неравенство равносильно двойному неравенству $-B < A < B$ или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases}$$

Иными словами, мы берем пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства $B > 0$, то есть решаем систему

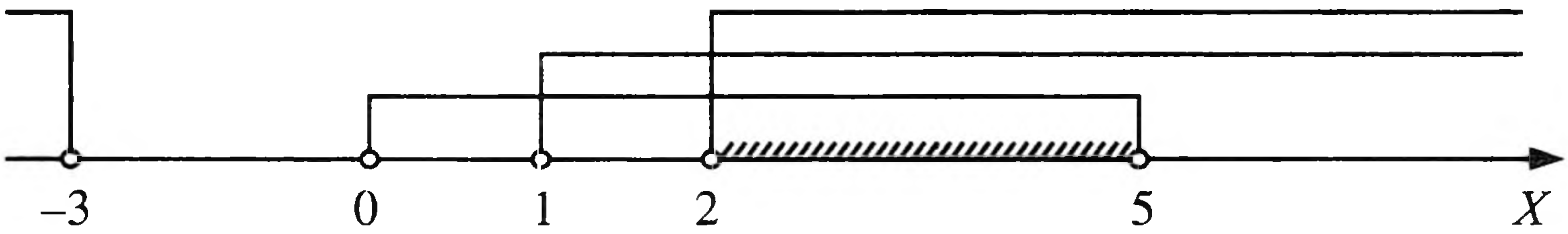
$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B, \\ B > 0. \end{cases}$$

В нашей задаче получаем:

$$|x^2-2x-3| < 3x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 < 3x-3, \\ x^2-2x-3 > -(3x-3), \\ 3x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x<0, \\ x^2+x-6>0, \\ x>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<5, \\ \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-3, \end{array}\right. \\ x>1. \end{cases}$$

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют все три линии. Оно заштриховано.

Ответ: (2; 5).

Показательные уравнения

Вернемся к показательным уравнениям, причем на новом уровне. Покажем основные идеи их решения.

1. $33 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 29.$

Лучше всего вынести за скобку двойку в наименьшей степени:

$$2^{x-1}(33 - 2^2) = 29,$$
$$2^{x-1} \cdot 29 = 29,$$
$$2^{x-1} = 1,$$
$$x - 1 = 0,$$
$$x = 1.$$

2. $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0.$

Делаем замену $t = 2^x$.

Тогда $4^x = 2^{2x} = t^2$, и относительно t мы получаем квадратное уравнение:

$$t^2 - 5t - 24 = 0.$$

Его корни: $t_1 = 8$ и $t_2 = -3$.

В первом случае имеем: $2^x = 8$, откуда $x = 3$.

Во втором случае: $2^x = -3$, решений нет.

Ответ: 3.

3. $3 \cdot 16^x + 36^x - 2 \cdot 81^x = 0.$

Замечаем, что $16 = 4^2$, $81 = 9^2$, а $36 = 4 \cdot 9$:

$$3 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 9^x - 2 \cdot 9^{2x} = 0.$$

Делим обе части на положительную величину 9^{2x}:

Делаем замену: $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$.

Очевидно, $t > 0$, так как показательная функция принимает только положительные значения.

$$3t^2 + t - 2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{2}{3}$.

В случае $t_1 = -1$ решений нет.

В случае $t_2 = \frac{2}{3}$ имеем единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Вообще, показательные уравнения вида

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C \cdot b^{2x} = 0$$

называются *однородными*. Для них существует стандартный прием решения — деление обеих частей на b^{2x} (эта величина не равна нулю, так как показательная функция может принимать только положительные значения). Именно этим приемом мы в данной задаче и воспользовались.

С однородными уравнениями мы еще встретимся — в тригонометрии. Там это будут уравнения вида

$$A\sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0.$$

К ним мы применим похожий прием — деление на $\cos^2 x$.

Тригонометрические уравнения

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым

Эта тема — одна из самых сложных для абитуриентов. Тригонометрические уравнения встречаются в части 2 вариантов ЕГЭ, а также в заданиях вступительных экзаменов в вузы.

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии. О них, как правило, рассказывает абитуриенту репетитор.

Любой метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, чтобы привести их к простейшим, то есть к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения мы уже умеем решать.

Теперь — сами методы.

Замена переменной и сведение к квадратному уравнению

Это универсальный способ. Применяется в любых уравнениях — степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических, каких угодно. Замена не всегда видна сразу, и уравнение нужно сначала преобразовать.

1. Рассмотрим уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x = 5.$$

Преобразуем его, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 5,$$
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0.$$

Заменяя $\sin x$ на t, приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая его, получим:

$$t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что мы обозначили за t.

Первый корень приводит нас к уравнению $\sin x = \frac{3}{2}$.

Оно не имеет решений, поскольку $-1 \le \sin x \le 1$.

Второй корень дает простейшее уравнение $\sin x = 1$.

Решаем его: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Это и есть ответ.

2. Решить уравнение

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0.$$

Здесь нужно применить формулу косинуса двойного угла. Какую именно? Судя по уравнению — ясно, что ту, которая с косинусом!

$$3 + 2\cos^2 x - 1 + 3\sqrt{2}\cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0.$$

Теперь замена $t = \cos x$ и... дальше вы знаете.

3. Бывает, что оба рассмотренных выше метода нужно комбинировать. Например:

$$2\cos 2x - 3\cos^2 x - 2\sin x = 0.$$

Здесь все подчиняется синусу. Именно через него выражаем косинус двойного угла, а $\cos^2 x$ выражаем из основного тригонометрического тождества:

$$2(1 - 2\sin^2 x) - 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x = 0.$$

Дальше понятно: квадратное уравнение.

Разложение на множители

Очень хорошо, если уравнение удается представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль.

Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

4. Начнем с уравнения $\sin 2x = \cos x$.

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x \cos x = \cos x.$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что $\cos x$ обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим все в одну часть, и общий множитель — за скобки:

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0,$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$. Решаем каждое из них и берем объединение множества решений.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

5. Рассмотрим уравнение $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x$.

Применим формулу суммы синусов:

$$2\sin 5x \cos 2x = 2\sin 5x.$$

Дальше действуем так же, как и в предыдущей задаче:

$$2\sin 5x \cos 2x - 2\sin 5x = 0,$$
$$2\sin 5x (\cos 2x - 1) = 0.$$

Решаем уравнение $\sin 5x = 0$:

$$x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z. \qquad (1)$$

Решаем уравнение $\cos 2x - 1 = 0$:

$$x = \pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Ну что, перечисляем обе серии (1) и (2) в ответе через запятую? Нет! Серия (2) является в данном случае частью серии (1). Действительно, если в формуле (1) число n кратно 5, то мы получаем все решения серии (2).

Поэтому ответ: $x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

Бывает, что перед разложением суммы или разности тригонометрических функций в произведение надо проделать обратную процедуру: превратить произведение в сумму (разность).

6. Решим уравнение: $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Домножаем обе части на 2, преобразуем левую часть в разность косинусов, а правую часть — в сумму косинусов:

$$2\sin 2x \sin 6x = 2\cos x \cos 3x,$$
$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x,$$
$$\cos 2x + \cos 8x = 0,$$
$$2\cos 5x \cos 3x = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5};\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

7. Еще пример, где финальное разложение на множители поначалу замаскировано:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

Здесь используем формулу понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(которая является ничем иным, как переписанной в другом виде формулой косинуса двойного угла). Получаем:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1,$$

$$\cos 4x + \cos 6x = 0.$$

и дальше ясно.

8. Многие оказываются в ступоре при виде следующего уравнения:

$$\sin 3x = \cos 5x.$$

Переносим косинус влево и применяем формулу приведения $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\sin 3x - \cos 5x = 0,$$

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Дальше — дело техники.

9. А в этом примере нужны совсем другие манипуляции:

$$\sin 2x - \cos x + 2\sin x = 1.$$

Раскладываем синус двойного угла, все собираем в левой части и группируем:

$$2\sin x\cos x - \cos x + 2\sin x - 1 = 0,$$

$$\cos x\,(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1) = 0,$$

$$(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

Цель достигнута.

Однородные уравнения

10. Рассмотрим уравнение: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Степень каждого слагаемого в левой части равна двум. Точно так же, как в обычном многочлене $a^2 + 2ab - 3b^2$ степень каждого слагаемого равна двум (степень одночлена — это сумма степеней входящих в него сомножителей).

Поскольку степени всех слагаемых одинаковы, такое уравнение называют *однородным*. Для однородных уравнений существует стандартный прием решения — деление обеих его частей на $\cos^2 x$. Возможность этого деления, однако, должна быть обоснована: а что, если косинус равен нулю?

Следующий абзац предлагаем выучить наизусть и всегда прописывать его при решении однородных уравнений.

Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда в силу уравнения и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$, и мы можем поделить обе его части на $\cos^2 x$.

В результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

и дальнейший ход решения трудностей не представляет.

11. Рассмотрим уравнение

$$10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3.$$

Если бы в правой части стоял ноль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приемом: заменим число 3 на выражение $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$7 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0,$$

и дело сделано.

12. Неожиданным образом сводится к однородному следующее уравнение:

$$3 \cos x + 2 \sin x = 1.$$

Казалось бы, где тут однородность? Переходим к половинному углу:

$$3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2},$$

$$4\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x=2\ \operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\in Z. \qquad (3)$$

Мы не случайно довели это уравнение до ответа. В следующем разделе оно будет решено другим методом, и ответ окажется внешне не похожим на этот.

Введение дополнительного угла

Этот метод применяется для уравнений вида $a\cos x+b\sin x=c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в 30°, 45° или 60°.

На ЕГЭ метод введения дополнительного угла может встретиться вам в задаче с параметрами.

13. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2.$$

Делим обе части на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1.$$

Замечаем, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=1.$$

В левой части получили синус суммы:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1,$$

откуда

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

14. Другой пример:

$$\cos x+\sin x=1.$$

Делим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сделаем теперь для разнообразия в левой части косинус разности:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Рассмотрим теперь общий случай — уравнение

$$a\cos x+b\sin x=c.$$

Делим обе части на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

Для чего мы выполнили это деление? Все дело в получившихся коэффициентах при косинусе и синусе. Легко видеть, что сумма их квадратов равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1.$$

При этом $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$.

Это означает, что данные коэффициенты сами являются косинусом и синусом некоторого угла φ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Соотношение (4) тогда приобретает вид:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Исходное уравнение сведено к простейшему. Теперь понятно, почему рассматриваемый метод называется *введением дополнительного угла*. Этим дополнительным углом как раз и является угол φ.

15. Снова решим уравнение

$$3\cos x + 2\sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{3^2+2^2}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Существует такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Например,

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Получаем:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$\cos(x-\varphi)=\frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,$$

$$x=\varphi\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,$$

$$x=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,\ n\in Z.$$

В предыдущем разделе мы решили это уравнение, сведя его к однородному, и получили в качестве ответа выражение (3). Сравните с полученным только что выражением. А ведь это одно и то же множество решений!

Универсальная подстановка

Мы даем этот метод, поскольку он может быть полезен в решении задач с параметрами, а также в решении задач по геометрии.

Запомним две важные формулы:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Их ценность в том, что они позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла. Именно поэтому они получили название **универсальной подстановки**.

Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

16. Рассмотрим уравнение

$$6+6\cos x+5\sin x\cos x=0.$$

Обратите внимание — здесь использование универсальной подстановки сужает ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставляем $x = \pi + 2\pi n$ в уравнение и убеждаемся, что это — решение. Теперь обозначаем и применяем универсальную подстановку:

$$6+6\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{10t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=0.$$

После простых алгебраических преобразований приходим к уравнению:

$$5t^3-6t^2-5t-6=0,$$
$$(t-2)(5t^2+4t+3)=0,\ t=2.$$

Следовательно, .

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = 2\operatorname{arctg}2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Метод оценки в тригонометрических уравнениях

В некоторых уравнениях на помощь приходят оценки $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.

17. Рассмотрим уравнение

$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$

Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:

$$\begin{cases}\sin 5x = 1,\\ \sin 9x = 1.\end{cases}$$

Таким образом, должны одновременно выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases}5x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\[2mm] 9x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5},\\[2mm] 9x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi k}{9},\ n,k\in Z.\end{cases}$$

Обратите внимание, что сейчас речь идет о *пересечении* множества решений (а не об их объединении, как это было в случае разложения на множители). Нам еще предстоит понять, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Имеем:

$$\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}.$$

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π:

$$9+36n=5+20k,$$
$$20k=36n+4,$$
$$5k=9n+1.$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m$, $5m+1{,}5m+2{,}5m+3$ и $5m+4$, где $m \in Z$. Для того чтобы $9n+1$ делилось на 5, годится лишь $n=5m+1$.

Искать k, в принципе, уже не нужно. Сразу находим x:

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi(5m+1)}{5}=\frac{\pi}{2}+2\pi m.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z.$

Учет тригонометрических неравенств

18. Рассмотрим уравнение:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0.$$

Перепишем его в виде, пригодном для возведения в квадрат:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x.$$

Тогда наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x,\\ \sin x\le 0.\end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$5\cos x-(2\cos^2 x-1)=4(1-\cos^2 x),$$
$$2\cos^2 x+5\cos x-3=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2},\\ \cos x = -3.\end{array}\right.$$

Второе уравнение данной совокупности не имеет решений, а первое дает две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь нужно произвести отбор решений в соответствии с неравенством $\sin x \le 0$. Серия x_1 не удовлетворяет этому неравенству, а серия x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, решением исходного уравнения служит только серия x_2.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Мы рассмотрели основные методы решения тригонометрических уравнений. Знать их нужно обязательно, это — необходимая база.

В более сложных и нестандартных задачах нужно еще догадаться, как использовать те или иные методы. Это приходит только с опытом.