Стереометрия на ЕГЭ по математике. Часть 2

Считается, что стереометрическая задача на ЕГЭ по математике — только для отличников. Что для ее решения необходимы особые таланты и загадочное «пространственное мышление», которым обладают с рождения лишь редкие счастливцы.

Так ли это?

К счастью, все значительно проще. То, что так красиво называют «пространственным мышлением», чаще всего означает знание основ стереометрии и умение строить чертежи.

Во-первых, необходимо знание формул стереометрии. В главе «Стереометрия, часть 1» приведены все формулы, по которым вычисляются объемы и площади поверхности трехмерных тел.

Во-вторых — уверенное решение задач по геометрии, представленных в главе «Геометрия, часть 1».

И главное — знание аксиом и теорем стереометрии. Без них вы не решите ни одну задачу.

Выпишите в тетрадь определения и формулировки теорем, которые мы даем. Сделайте чертежи.

Внимание. Мы даем теоремы без доказательства! Доказывать их старайтесь самостоятельно. Вам поможет в этом учебник по геометрии для 10–11 класса (автор — А. В. Погорелов или Л. С. Атанасян).

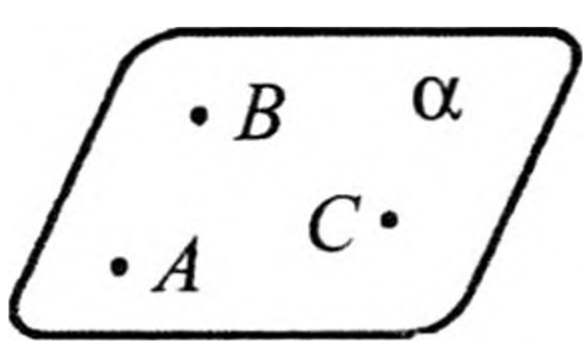
Обратите внимание на термины **«определение» и «признак».** Сформулируйте для себя, чем они отличаются. Есть, например, определение параллельности прямой и плоскости — и признак параллельности прямой и плоскости. В чем разница между ними?

Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей

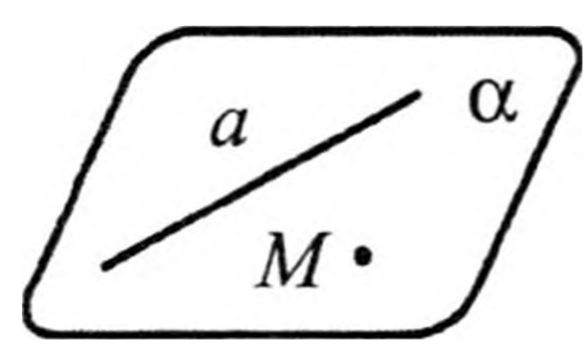
Плоскость, прямая, точка — основные понятия геометрии. Нам трудно дать им четкие определения, однако интуитивно мы понимаем, что это такое. Плоскость имеет только два измерения. У нее нет глубины. Прямая имеет лишь одно измерение, а у точки вообще нет размеров — ни длины, ни ширины, ни высоты.

Плоскость бесконечна. Поэтому в задачах мы рисуем только часть плоскости. Надо же как-то ее изобразить.

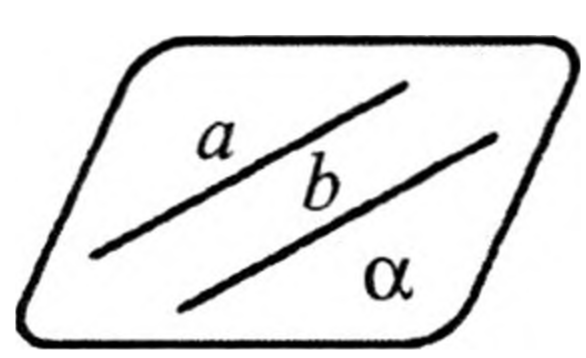
Плоскость в пространстве можно провести:



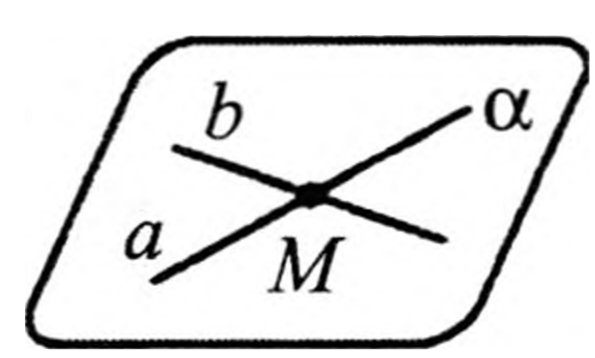
1) Через три точки, не лежащие на одной прямой.



2) Через прямую и не лежащую на ней точку.



3) Через две параллельные прямые.



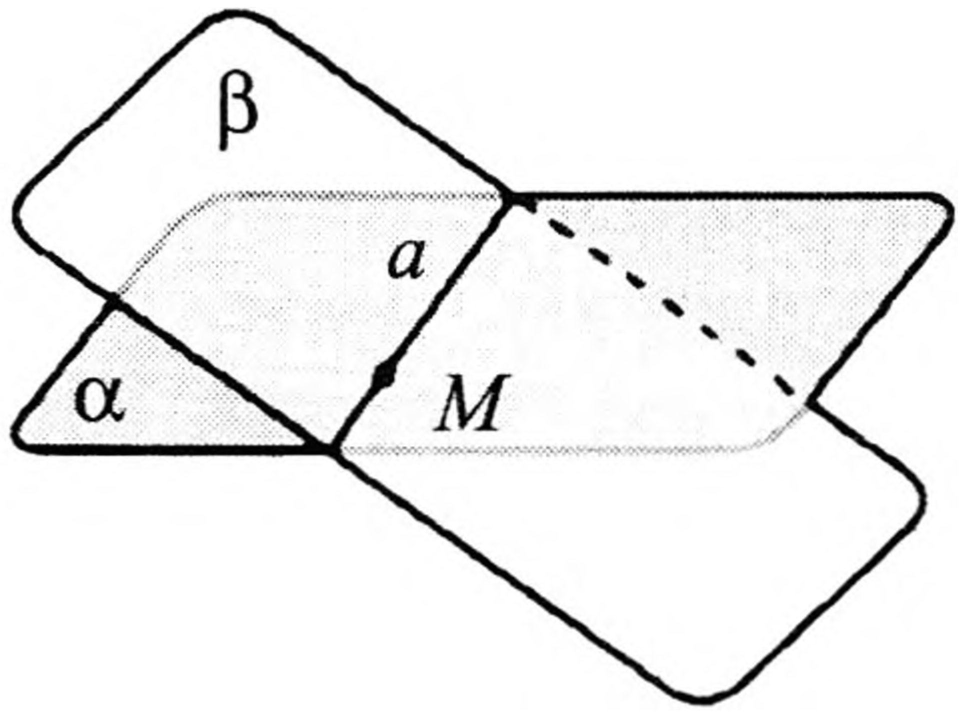
4) Через две пересекающиеся прямые.

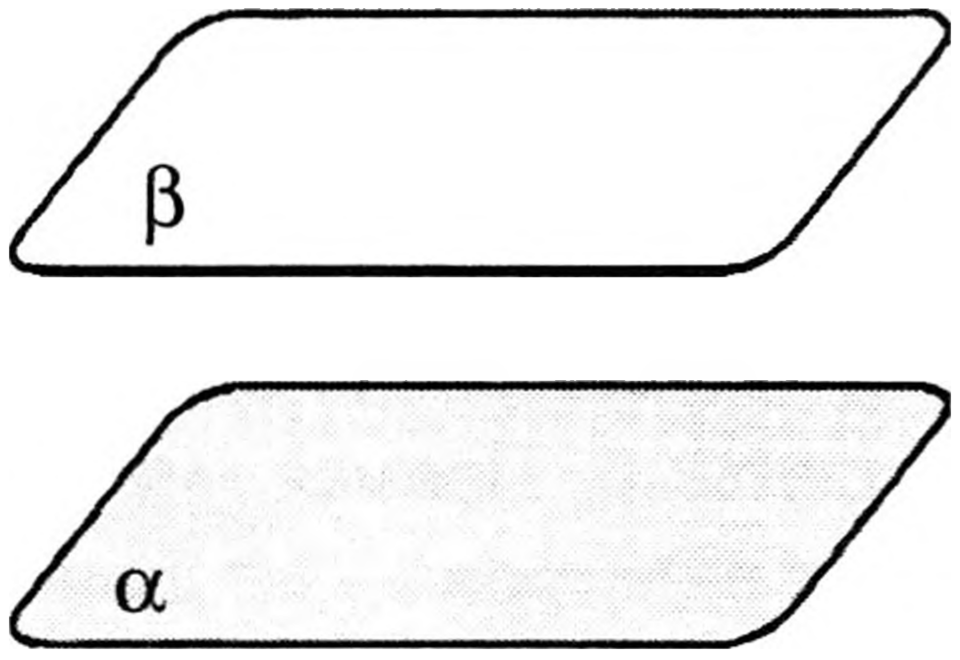
А как все это выглядит в пространстве? Очень просто. Лист плотной бумаги послужит «моделью» плоскости. Карандаши вполне могут изобразить прямые. Все аксиомы и теоремы стереометрии можно показать «на пальцах», то есть с помощью подручных материалов. Читаете — и сразу стройте такую «модель».

Две плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются. Примеры в окружающем пространстве найти легко.

Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Плоскости в пространстве





Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

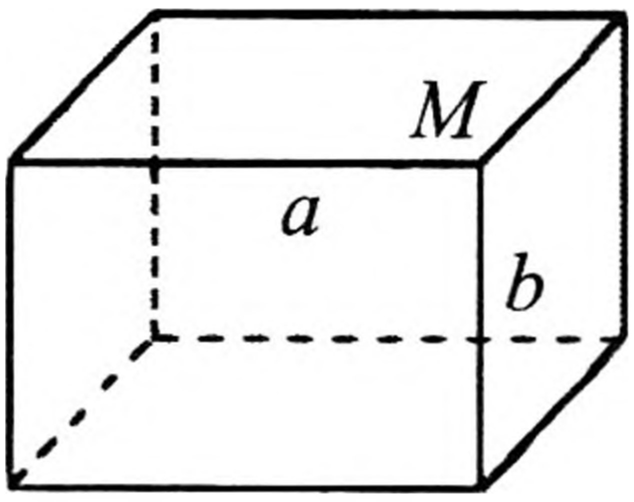
Если две плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу.

Мы не рассматриваем отдельно случай «плоскости совпадают». Раз совпадают — значит, это одна плоскость, а не две.

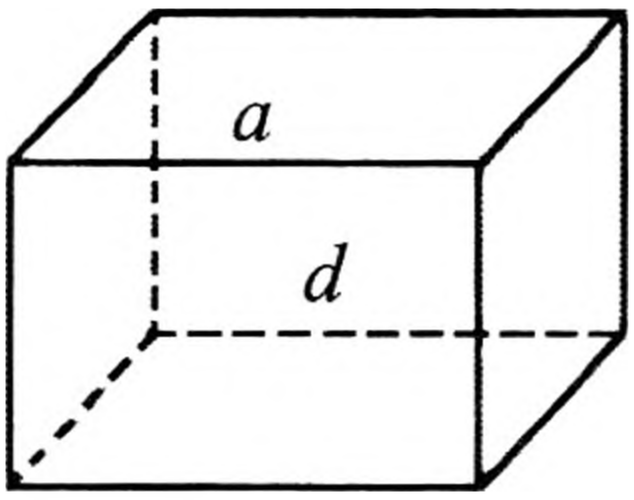
Прямые в пространстве. Пересекающиеся, параллельные, скрещивающиеся прямые

На плоскости две прямые или пересекаются, или параллельны друг другу. А в пространстве возможен еще один случай взаимного расположения прямых.

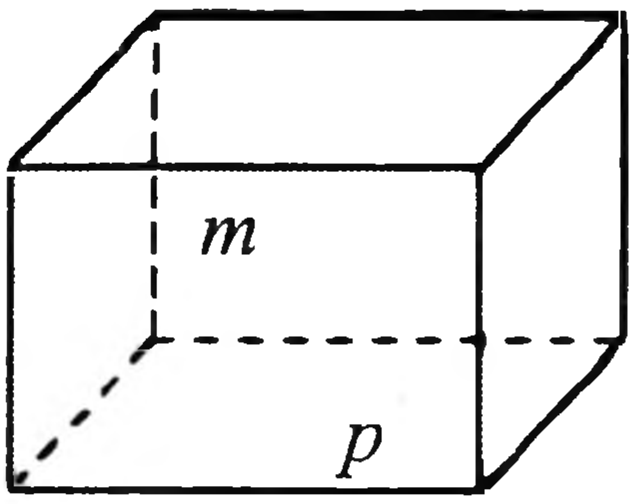
Расположение прямых в пространстве



Пересекаются
$a \cap b = M$



Параллельны
$a \| d$



Скрещиваются
$m \dot{-} p$

Две прямые в пространстве параллельны друг другу, пересекаются или скрещиваются.

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны друг другу. Через них невозможно провести плоскость. Скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.

Мы еще вернемся к теме «скрещивающиеся прямые» и расскажем, как найти угол и расстояние между ними.

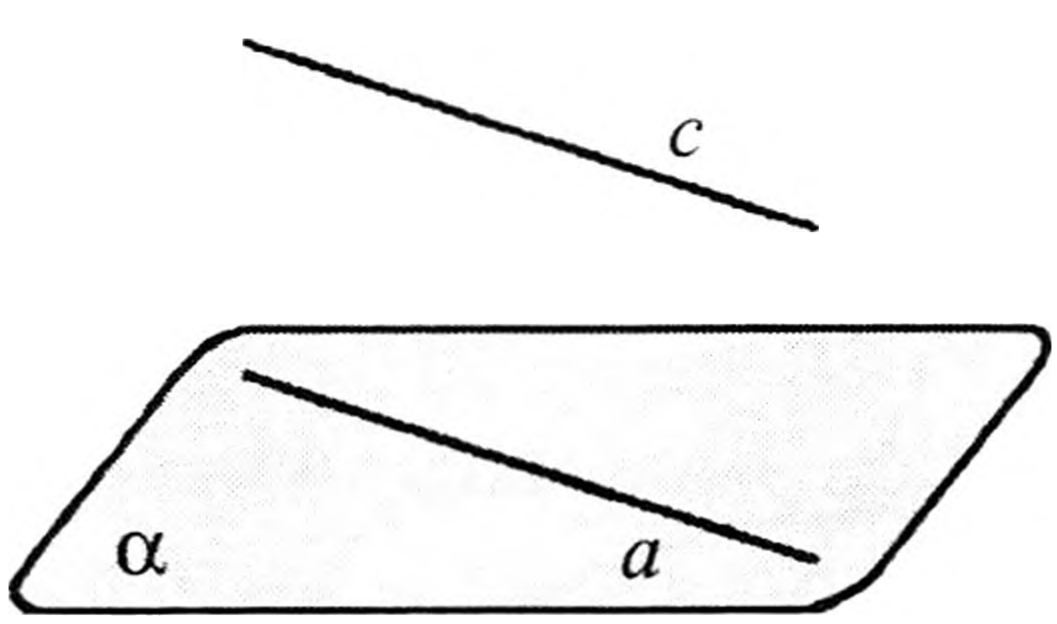
Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость могут пересекаться или быть параллельными друг другу. Еще один случай — прямая лежит в плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

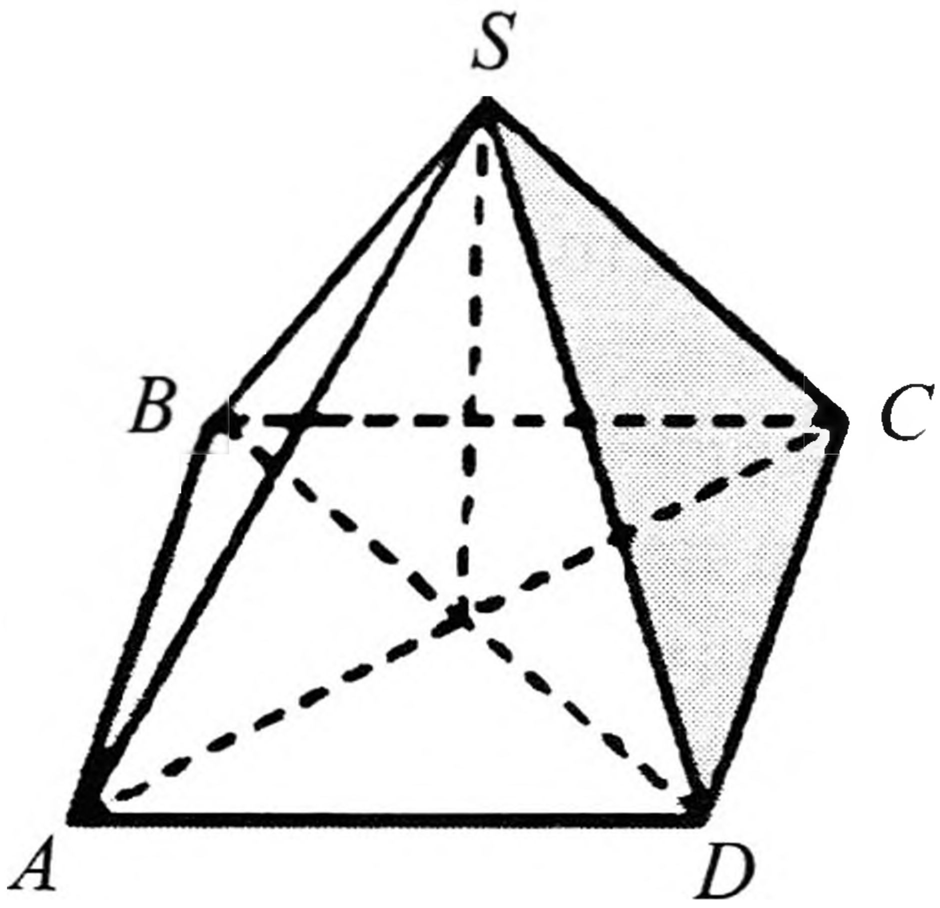
Это определение. Сложность только в одном — как на практике проверить, что бесконечная прямая нигде не пересечет бесконечную плоскость? Для практического применения используется **признак параллельности прямой и плоскости**.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.



$$\left.\begin{matrix} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$

Этот признак часто используется в решении задач по стереометрии. Например, в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ прямая AB параллельна прямой CD — значит, AB параллельна всей плоскости SCD.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD; \\ CD \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD).$$

Угол между прямой и плоскостью. Перпендикулярность прямой и плоскости

Если две прямые лежат в одной плоскости, угол между ними легко измерить — например, с помощью транспортира. А как измерить **угол между прямой и плоскостью**?

Пусть прямая пересекает плоскость, причем не под прямым, а под каким-то другим углом. Такая прямая называется **наклонной**.

Опустим перпендикуляр из какой-либо точки наклонной на нашу плоскость. Соединим основание перпендикуляра с точкой пересечения наклонной и плоскости. Мы получили **проекцию наклонной на плоскость**.

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Обратите внимание — в качестве угла между прямой и плоскостью мы выбираем острый угол.

Если прямая параллельна плоскости, значит, угол между прямой и плоскостью равен нулю.

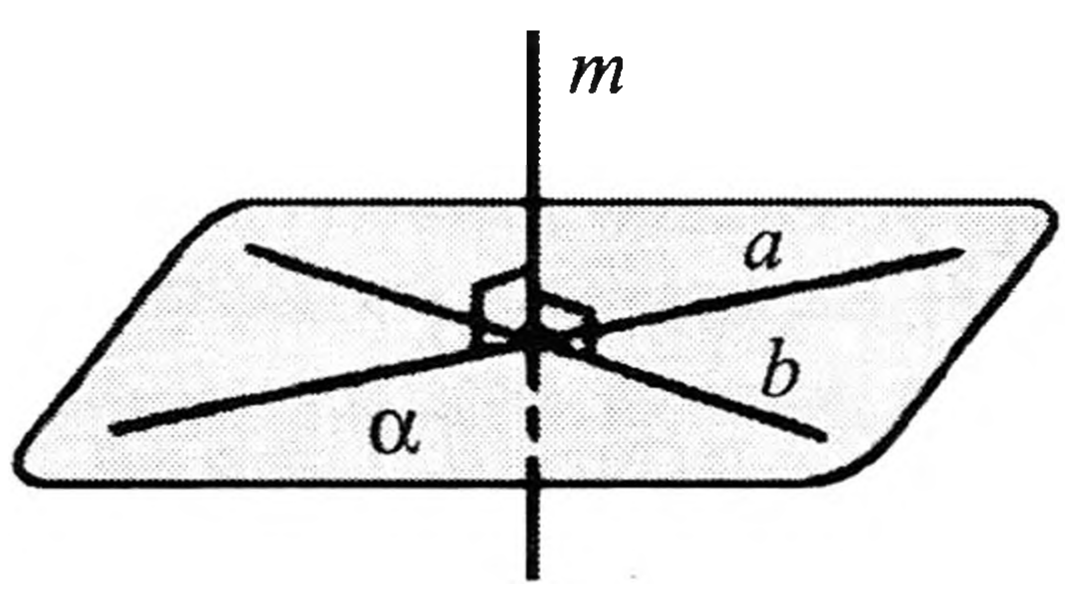
Если прямая перпендикулярна плоскости, ее проекцией на плоскость окажется точка. Очевидно, в этом случае угол между прямой и плоскостью равен 90°.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Это определение. Но как же с ним работать? Как проверить, что данная прямая перпендикулярна всем прямым, лежащим в плоскости? Ведь их там бесконечно много.

На практике применяется **признак перпендикулярности прямой и плоскости**.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.



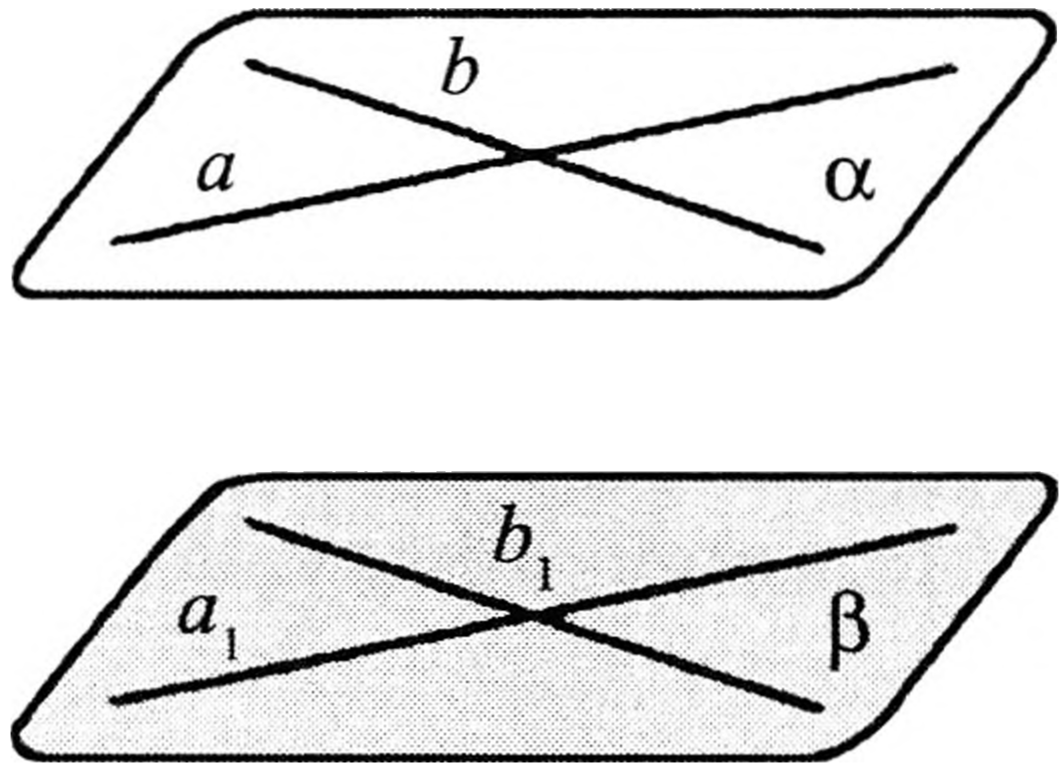
$$\left.\begin{array}{l} a\in\alpha,\ b\in\alpha,\\ m\perp a,\\ m\perp b; \end{array}\right\}\Rightarrow m\perp\alpha.$$

Параллельность плоскостей

Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

Это определение. Однако в практических целях чаще используется **признак параллельности плоскостей**.

Плоскости параллельны друг другу, если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

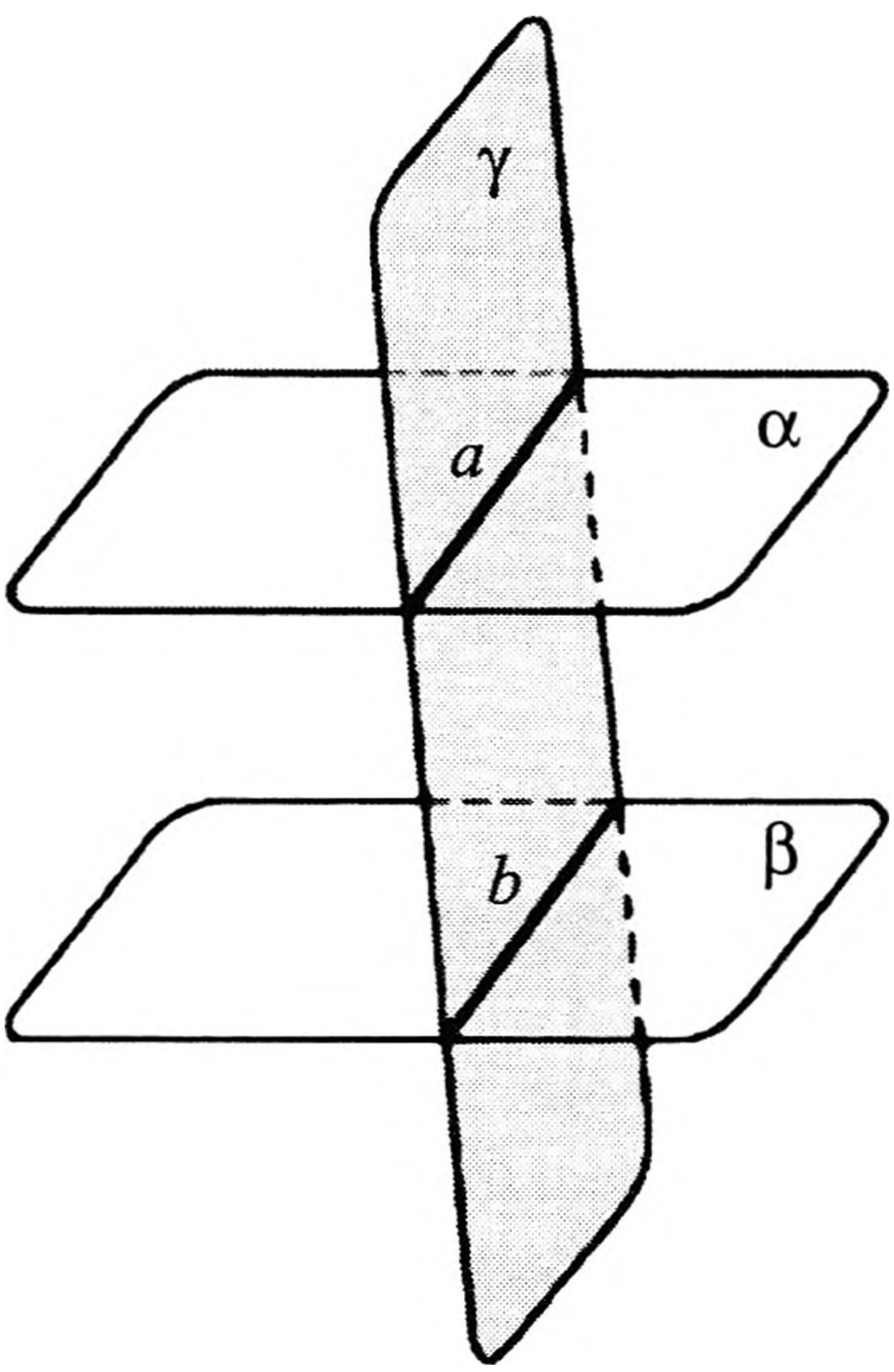


$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a_1 \\ b \parallel b_1 \\ a, b \in \alpha \\ a_1, b_1 \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Свойства параллельных плоскостей:

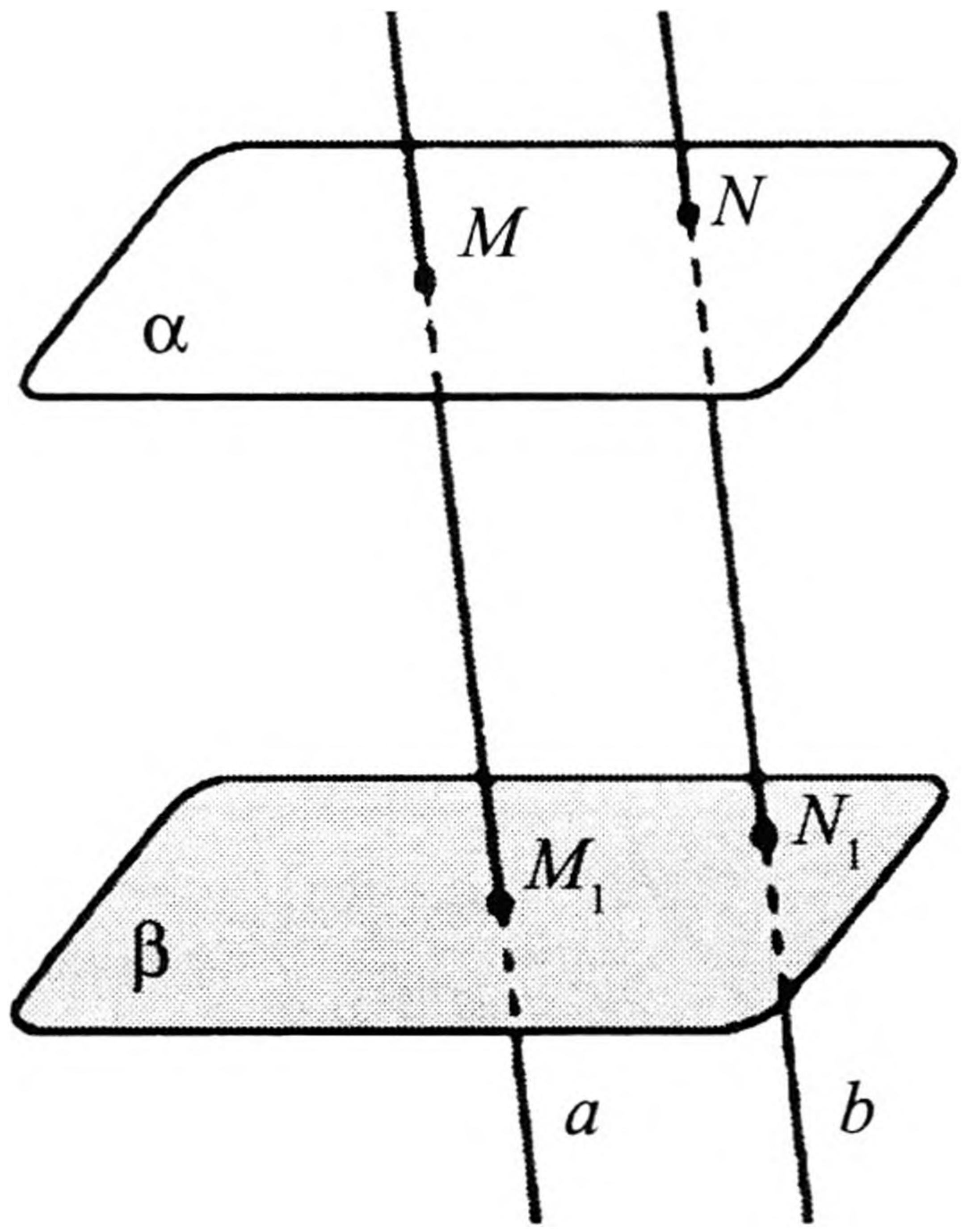
1. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

2. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.



$$\left.\begin{array}{l} \gamma \cap \alpha = a, \\ \gamma \cap \beta = b, \\ \alpha \parallel \beta; \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



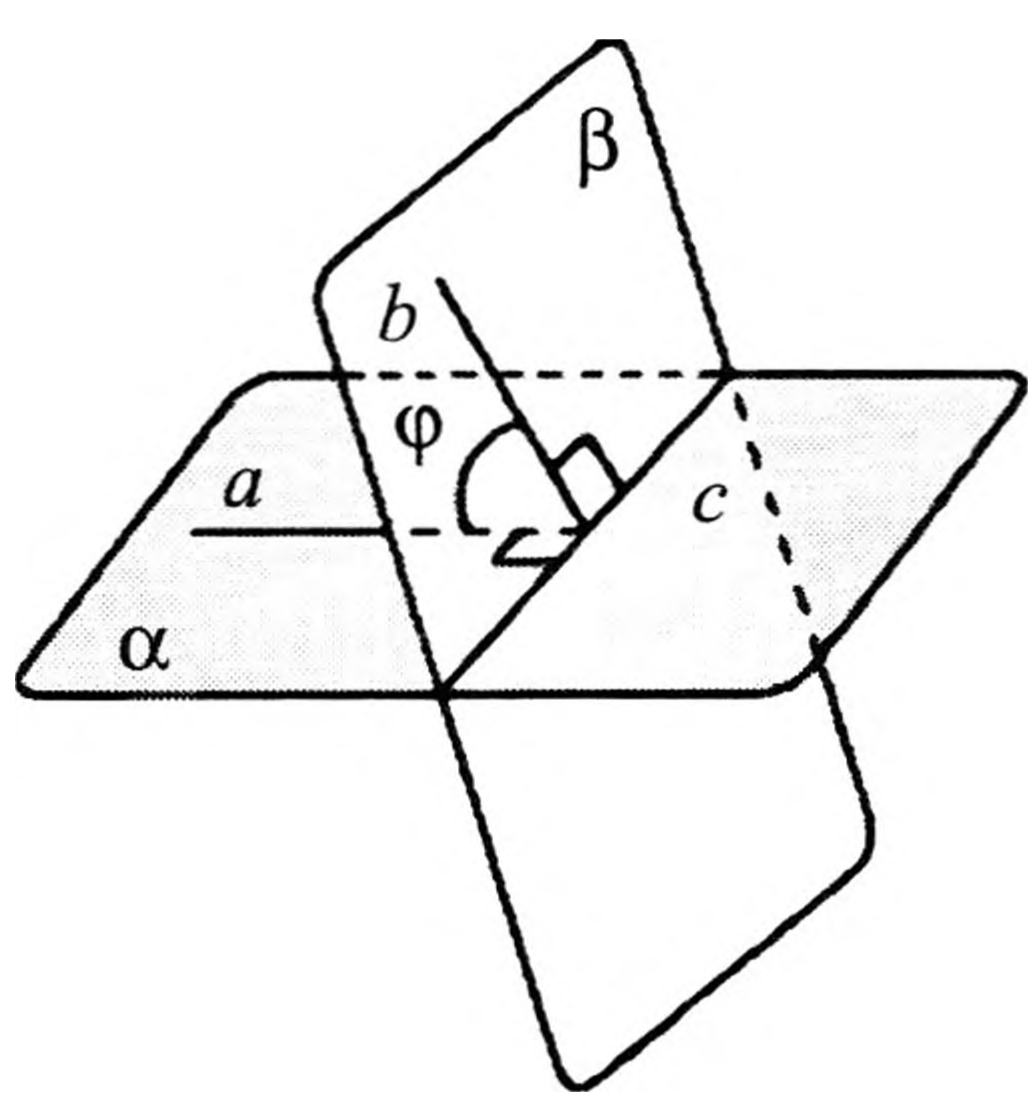
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta,\\ a \parallel b,\end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 \parallel NN_1.$$

Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c.

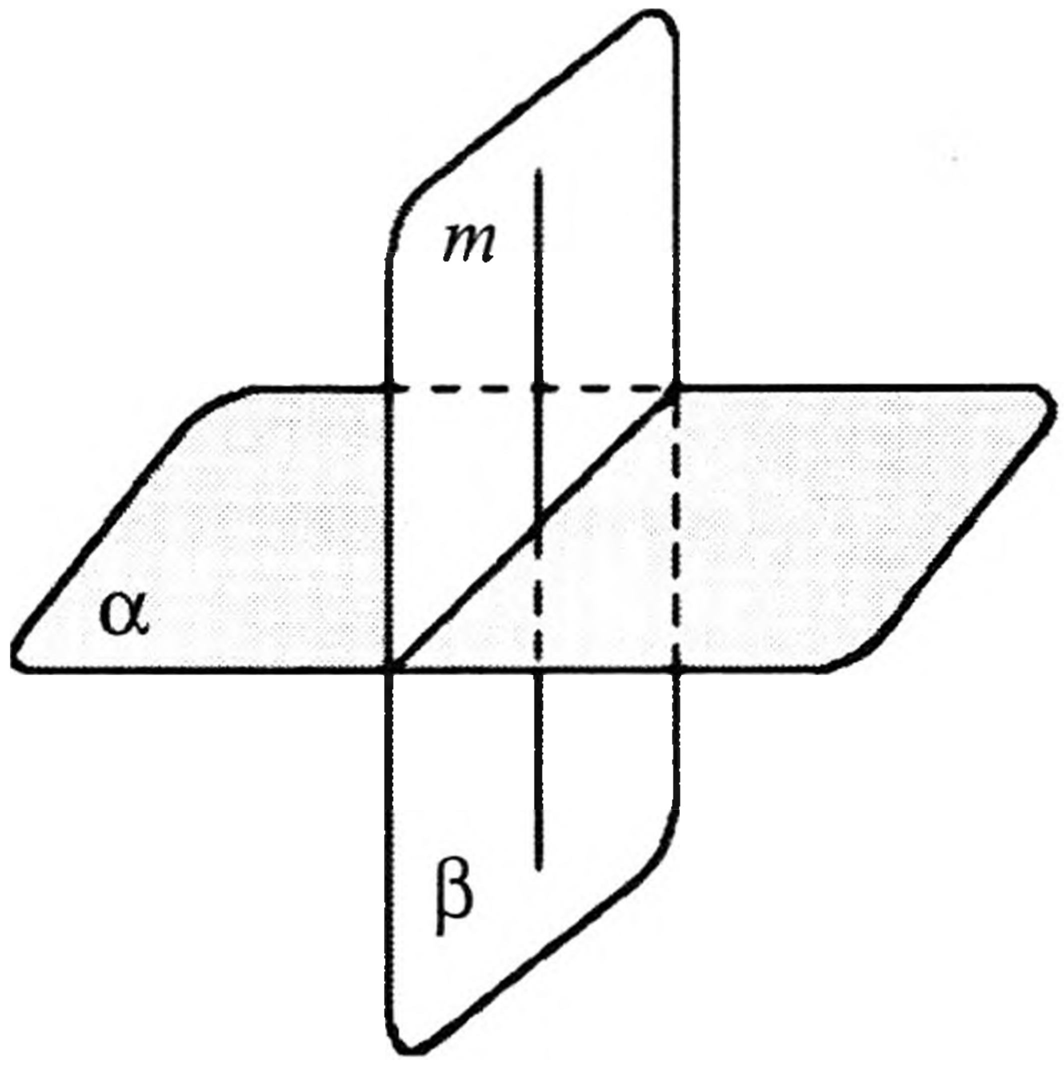
Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Другими словами, в плоскости α мы провели прямую a, перпендикулярную c. В плоскости β — прямую b, также перпендикулярную c. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.



Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла. Видите их на рисунке? В качестве угла между плоскостями мы берем **острый** угол.

Если угол между плоскостями равен 90 градусов, то плоскости **перпендикулярны.**



$$\left.\begin{array}{l} m \in \beta, \\ m \perp a, \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

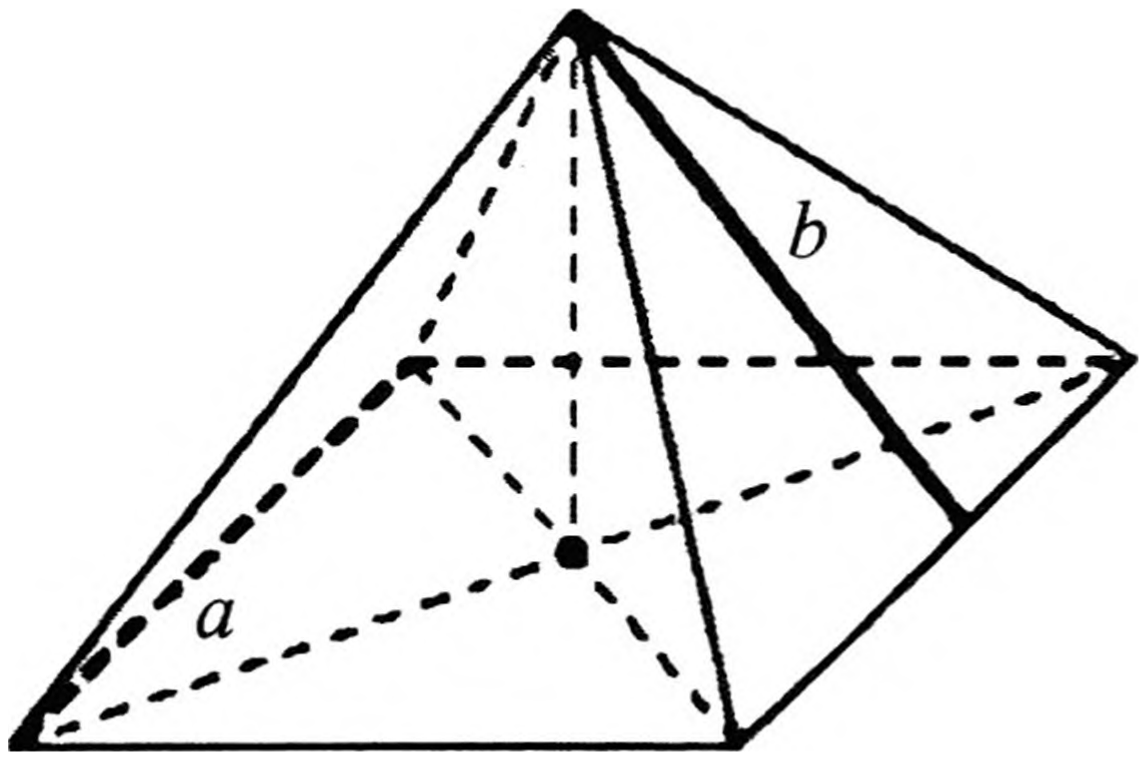
Это определение перпендикулярности плоскостей. Решая задачи по стереометрии, мы используем также **признак перпендикулярности плоскостей**.

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

Угол между скрещивающимися прямыми и расстояние между ними. Расстояние от точки до плоскости и от прямой до параллельной ей плоскости

Скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются. Они лежат в параллельных плоскостях, и поместить их в одну плоскость невозможно.

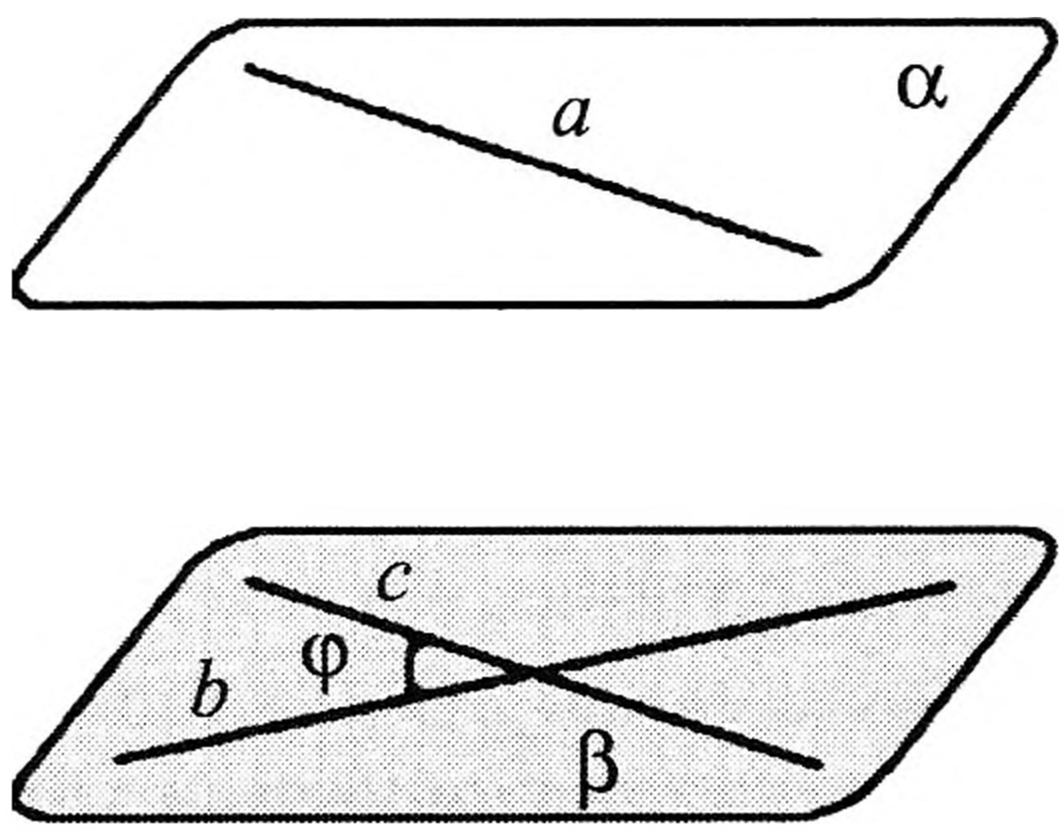
Например, такими будут прямые a и b на чертеже.



Часто в задачах требуется найти угол между скрещивающимися прямыми. Как это сделать?

Угол между прямыми, лежащими в одной плоскости, найти нетрудно. Можно измерить его транспортиром. Можно найти из какого-нибудь треугольника по теореме синусов или косинусов.

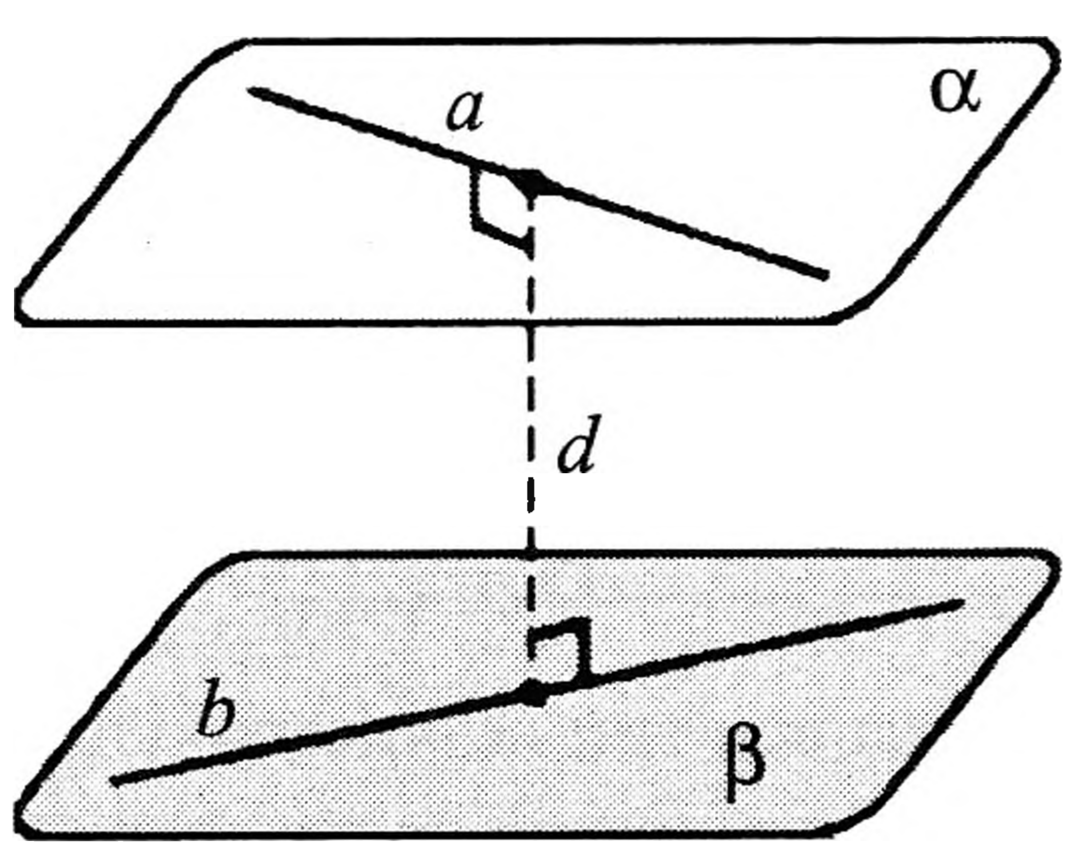
Пусть скрещивающиеся прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β. Проведем в плоскости β прямую c, параллельную прямой a. Угол между прямыми a и b равен углу между прямыми b и c.



a и b скрещиваются.
$a \in \alpha$,
$b \in \beta$,
$\alpha \parallel \beta$.
$c \parallel a$,
$c \in \beta$,
$(\widehat{a,b}) = (\widehat{c,b}) = \varphi$.

Можно сказать, что **угол между скрещивающимися прямыми** — это угол между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.



Другими словами, расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат.

Дадим еще два полезных определения.

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

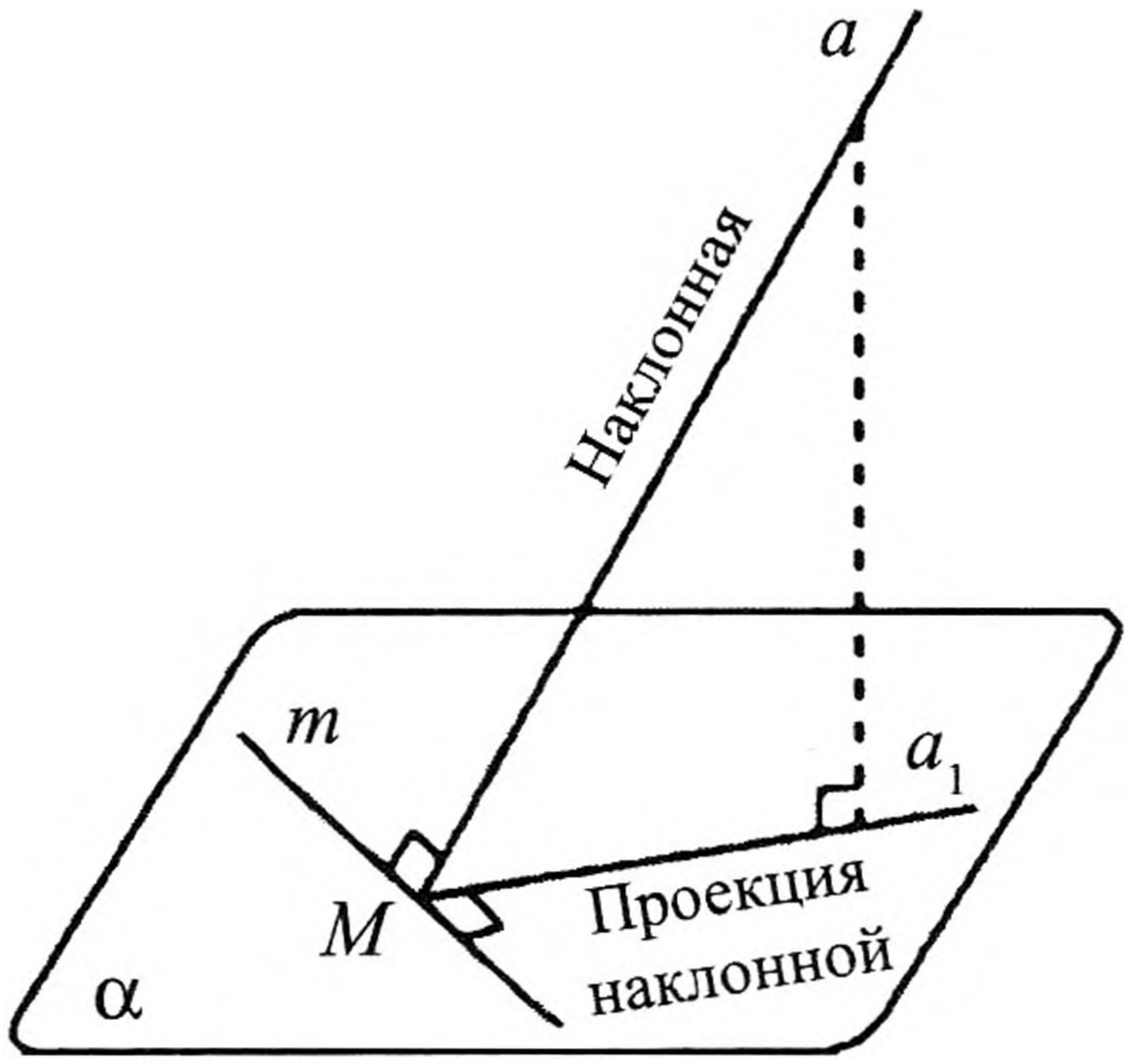
Заметим, что расстояние от точки до плоскости или угол между скрещивающимися прямыми иногда проще найти с помощью *координатно-векторного метода*.

Теорема о трех перпендикулярах

Рассмотрим чертеж. На нем изображены плоскость α и лежащая в ней прямая m. Наклонная a пересекает плоскость α в точке M. Прямая a_1 — проекция наклонной a на плоскость α.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

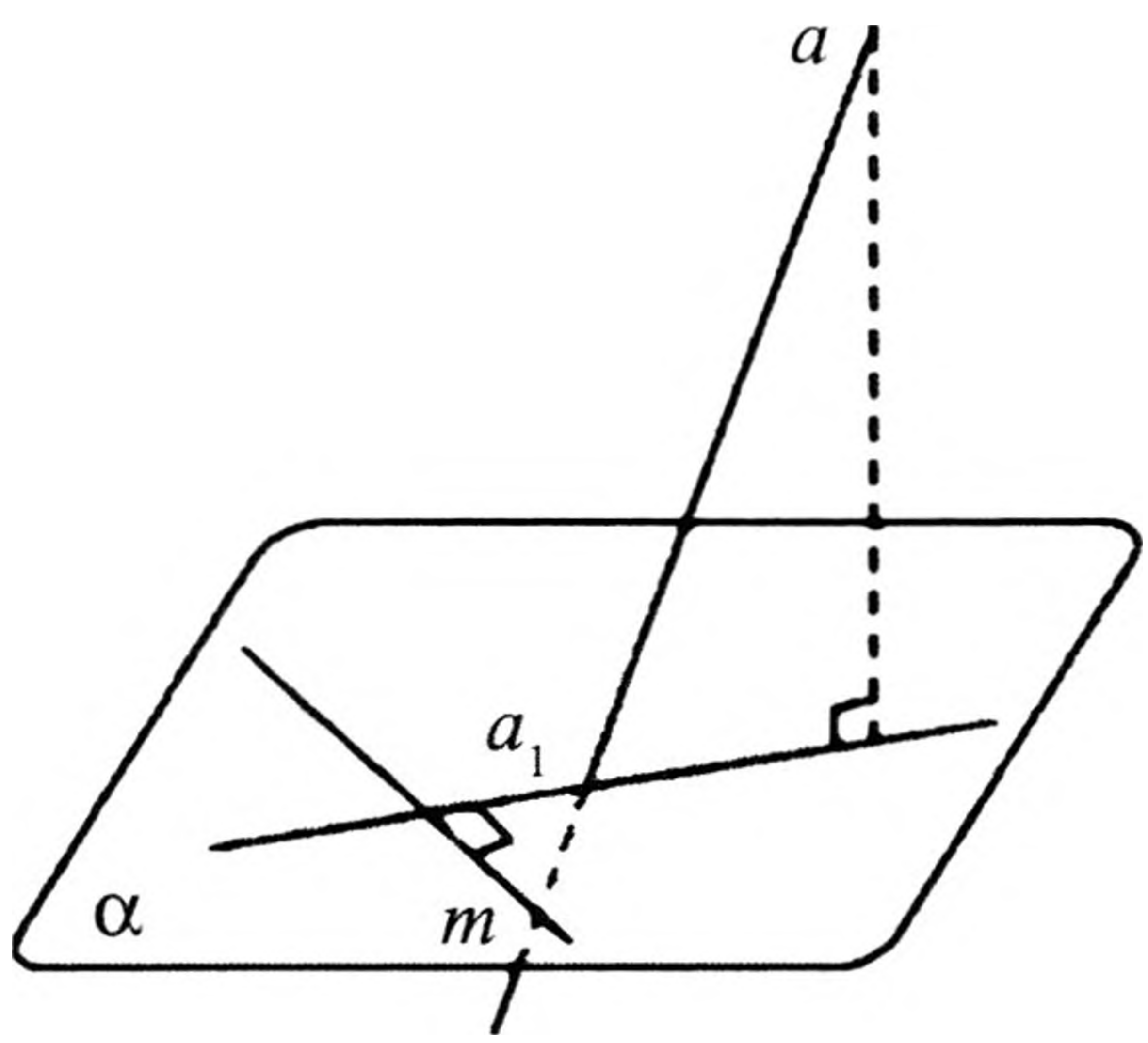


На рисунке показаны все три перпендикуляра.

Если прямая m, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Слова «тогда и только тогда» в формулировке теоремы означают, что прямая m перпендикулярна одновременно и наклонной, и ее проекции. Если m перпендикулярна наклонной, значит, перпендикулярна и ее проекции, и наоборот.

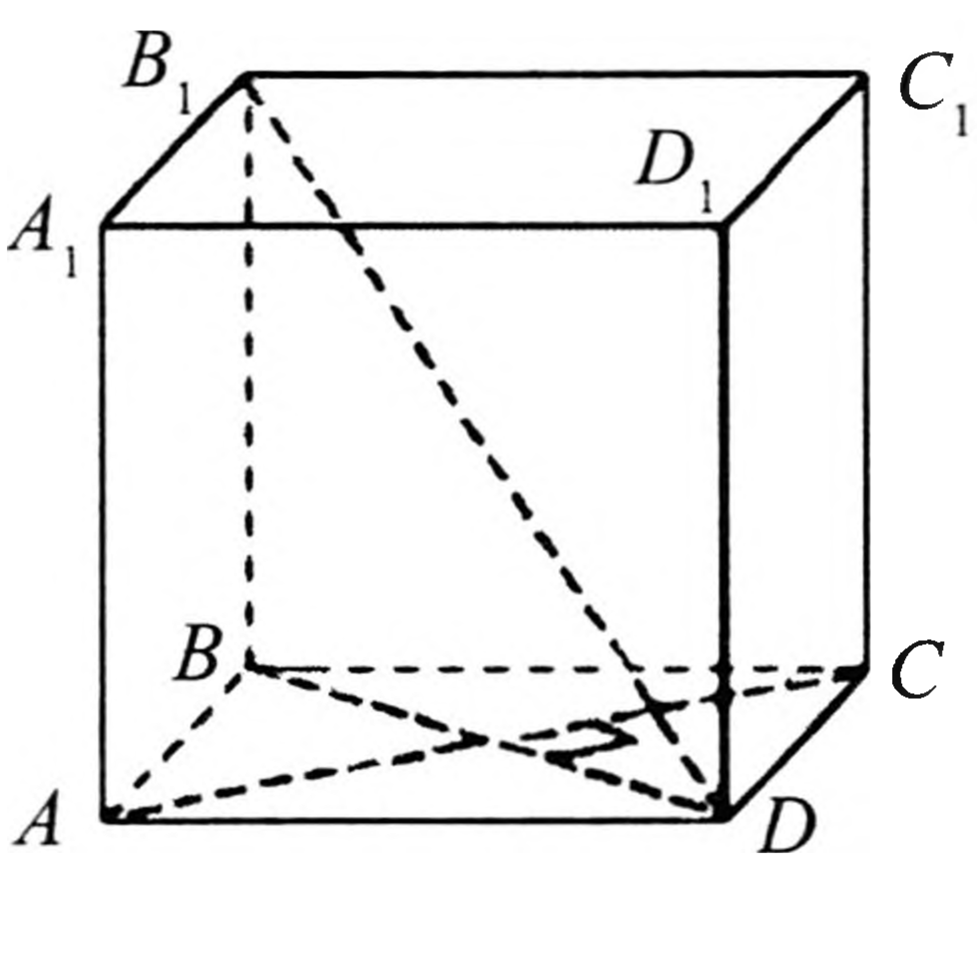
На нашем чертеже прямая m проведена через основание наклонной. Этого требует формулировка теоремы о трех перпендикулярах в большинстве учебников. Но прямая m, лежащая в плоскости, вовсе не обязана проходить через основание наклонной. Главное — чтобы она была перпендикулярна проекции наклонной. Тогда она будет перпендикулярна и самой наклонной.



$m \in \alpha$,
a и m — скрещиваются,
a_1 — проекция наклонной a на плоскость α,
$m \perp a_1 \Leftrightarrow m \perp a$.

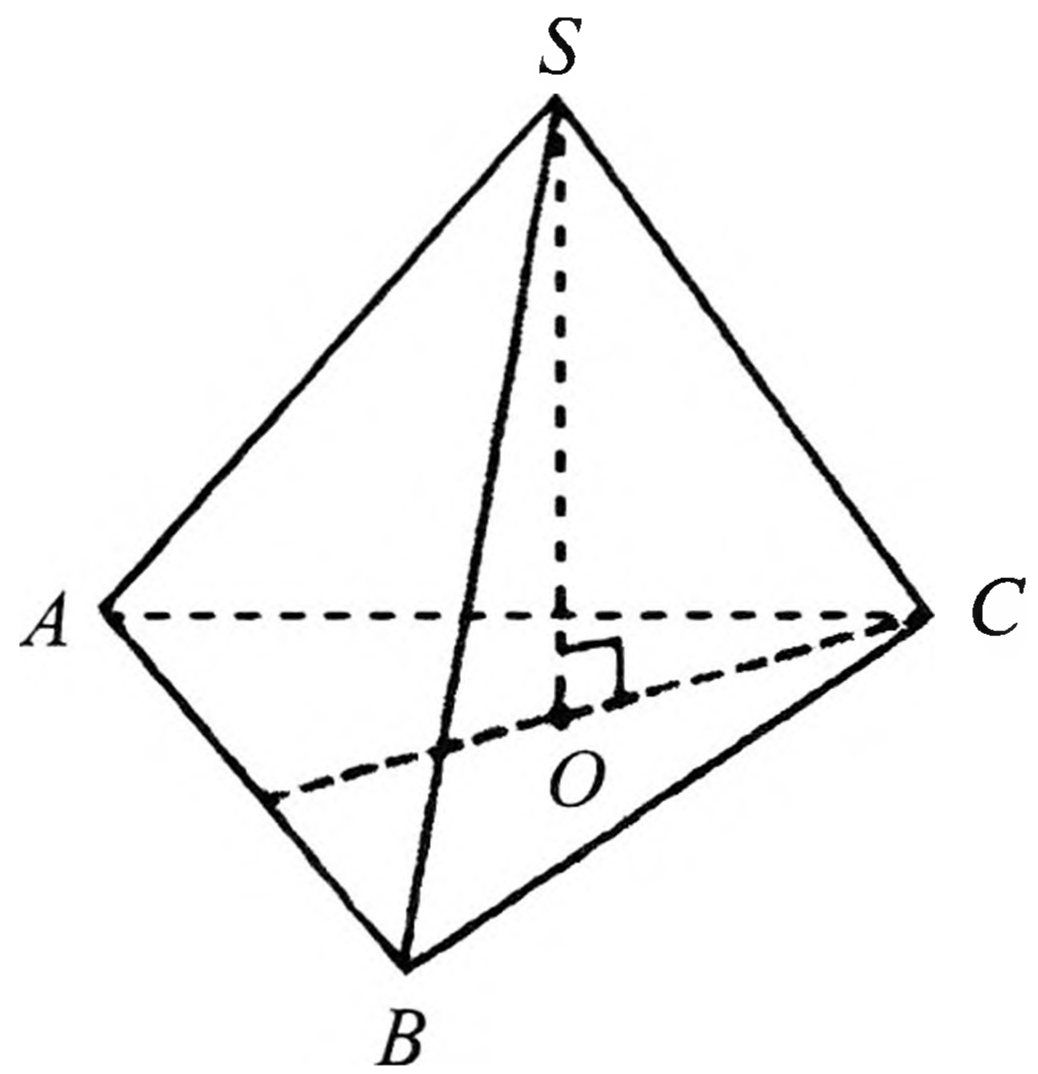
Теорема о трех перпендикулярах — полезный инструмент для решения задач.

Например, с ее помощью можно доказать, что диагональ куба B_1D перпендикулярна прямой AC.



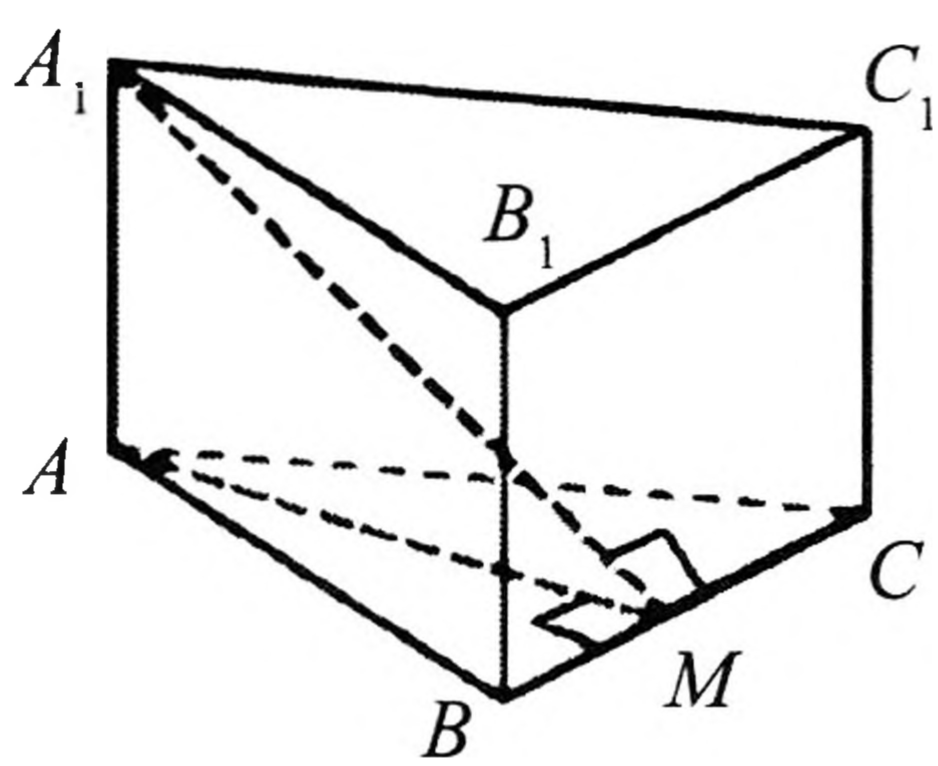
$BD \perp AC \Rightarrow B_1D \perp AC$.

Или — что скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра взаимно перпендикулярны.



$SABC$ — правильный тетраэдр,
OC — проекция SC
на плоскость (ABC),
$OC \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$.

Или — что в правильной треугольной призме прямая A_1M (где M — середина BC) перпендикулярна ребру BC.



$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма,
M — середина BC,
$AM \perp BC \Rightarrow A_1M \perp BC$.

Параллельное проецирование. Площадь проекции фигуры

В задачах по геометрии успех зависит не только от знания теории, но от качественного чертежа.

С плоскими чертежами все более-менее понятно. А в стереометрии дело обстоит сложнее. Ведь изобразить надо **трехмерное** тело на **плоском** чертеже, причем так, чтобы и вы сами, и тот, кто смотрит на ваш чертеж, увидели бы то же самое объемное тело.

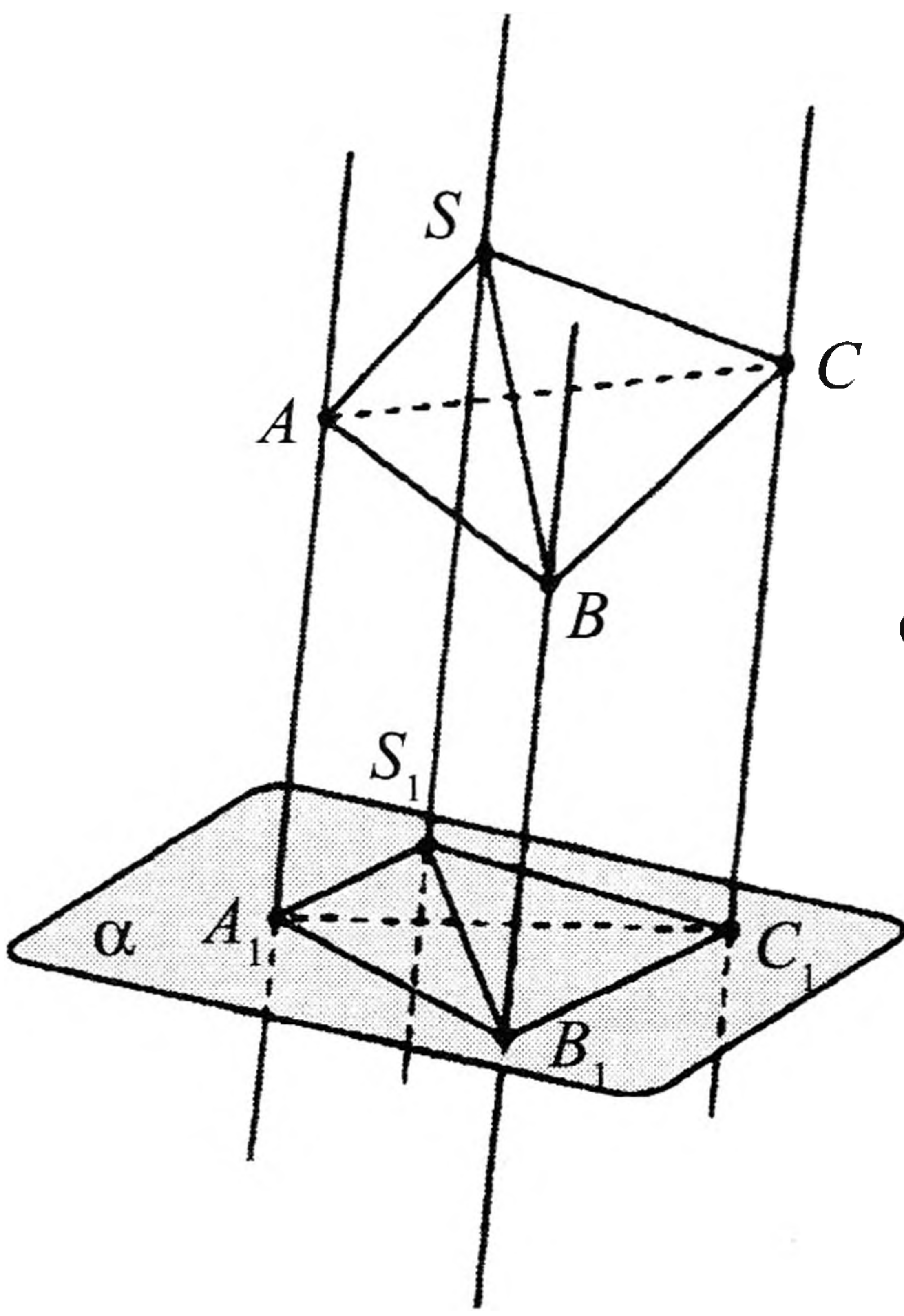
Как это сделать?

Конечно, любое изображение объемного тела на плоскости будет условным. Однако существует определенный набор правил. Существует общепринятый способ построения чертежей — **параллельное проецирование**.

Возьмем объемное тело.

Выберем **плоскость проекции**.

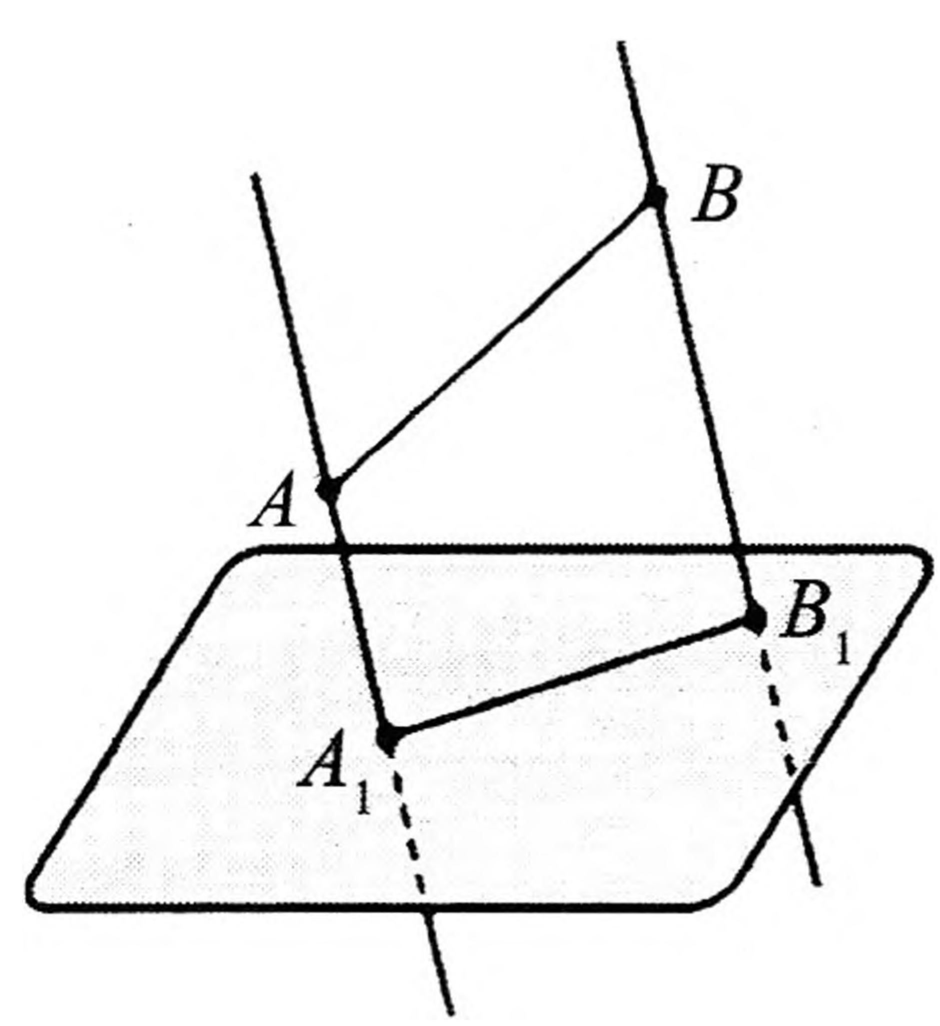
Через каждую точку объемного тела проведем прямые, параллельные друг другу и пересекающие плоскость проекции под каким-либо углом. Каждая из этих прямых пересекает плоскость проекции в какой-либо точке. А все вместе эти точки образуют **проекцию** объемного тела на плоскость, то есть его плоское изображение.



α — плоскость проекции

Как строить проекции объемных тел?

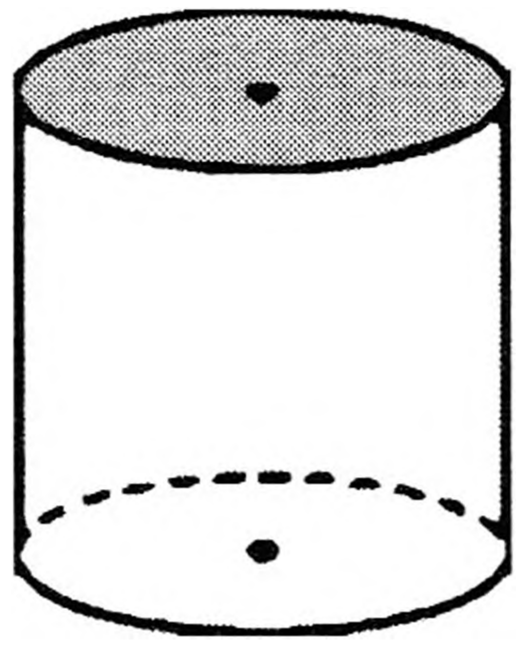
Представьте, что у вас есть каркас объемного тела — призмы, пирамиды или цилиндра. Освещая его параллельным пучком света, получаем изображение — тень на стене или на экране. Заметим, что в разных ракурсах получаются разные изображения, но некоторые закономерности все же присутствуют.



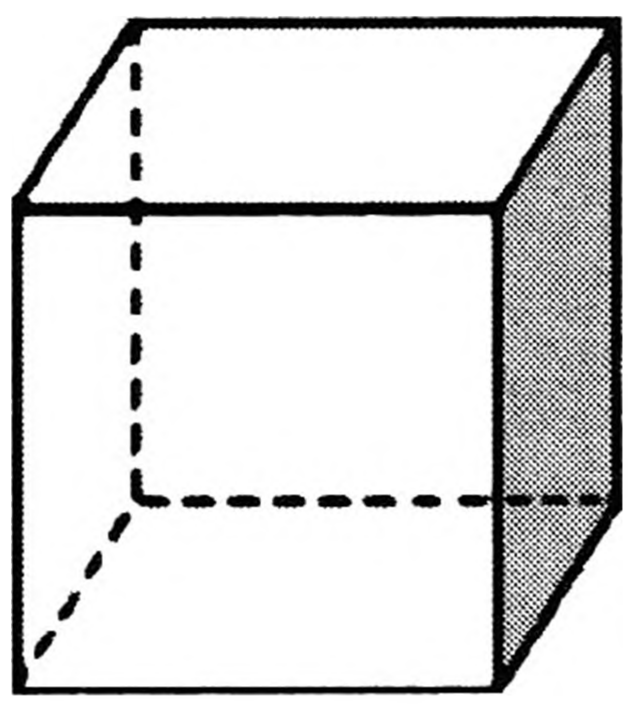
Проекцией отрезка будет отрезок.

Конечно, если отрезок перпендикулярен плоскости проекции — он отобразится в одну точку.

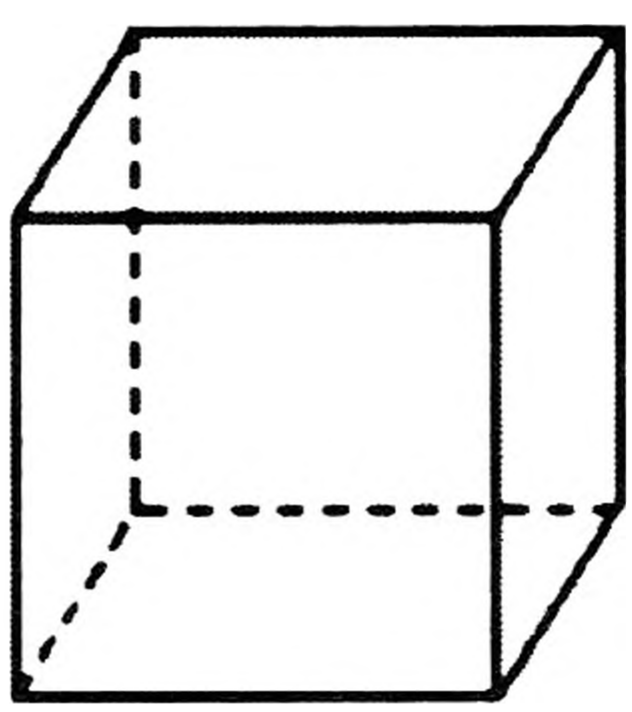
Проекцией круга в общем случае окажется эллипс.



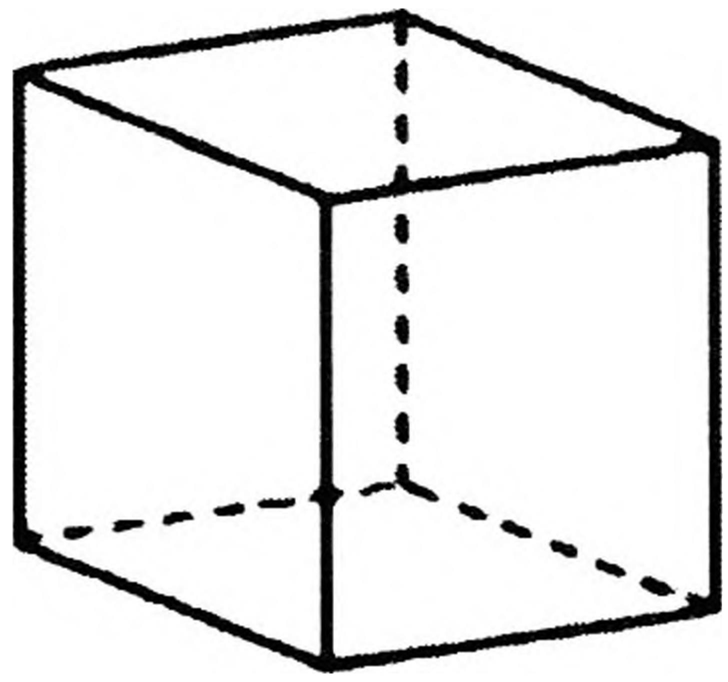
Проекцией прямоугольника — параллелограмм.



Вот как выглядит проекция куба на плоскость.

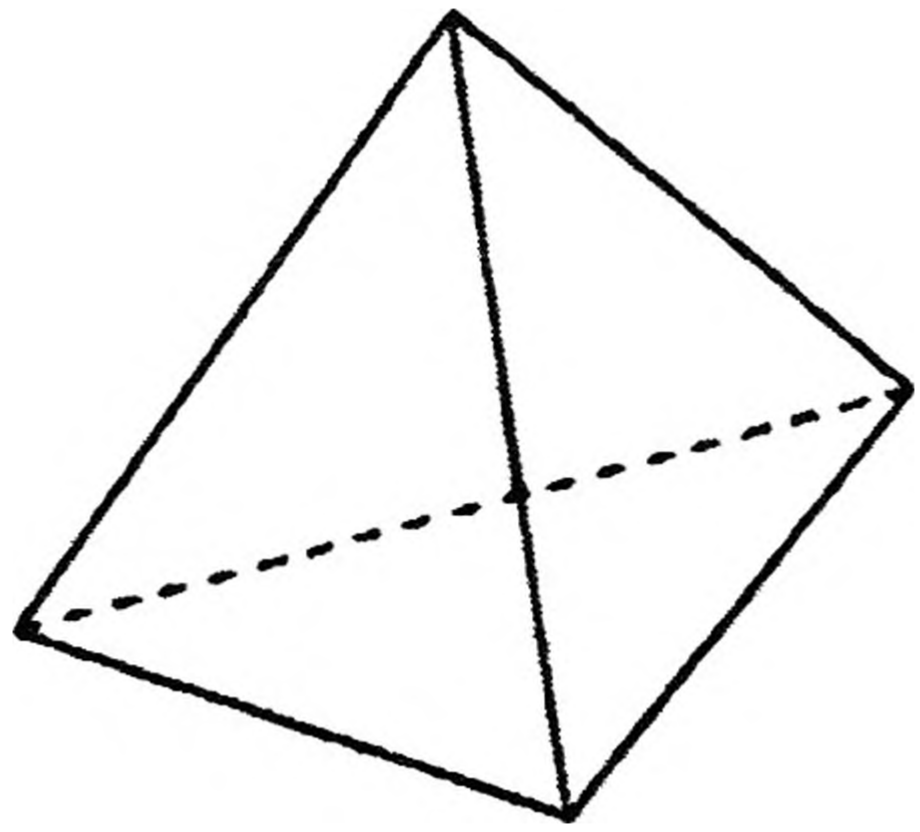


Здесь передняя и задняя грани параллельны плоскости проекции. Можно сделать по-другому.

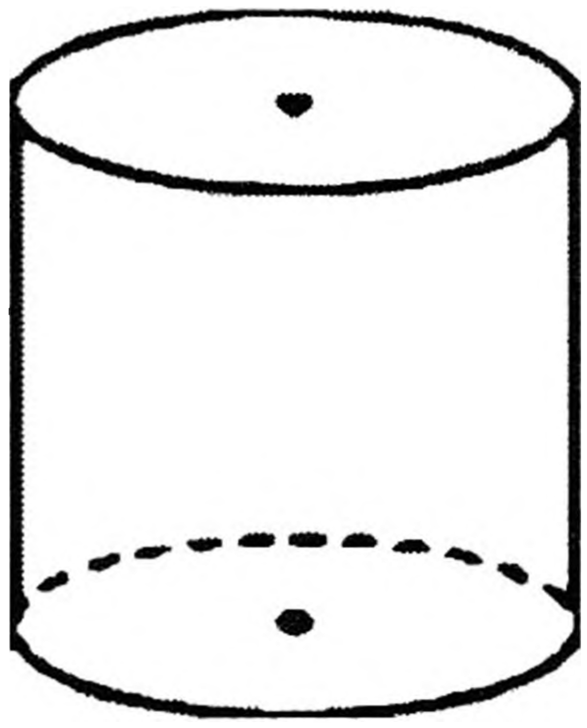


Какой бы ракурс мы ни выбрали, **проекциями параллельных отрезков на чертеже тоже будут параллельные отрезки**. Это один из принципов параллельного проецирования.

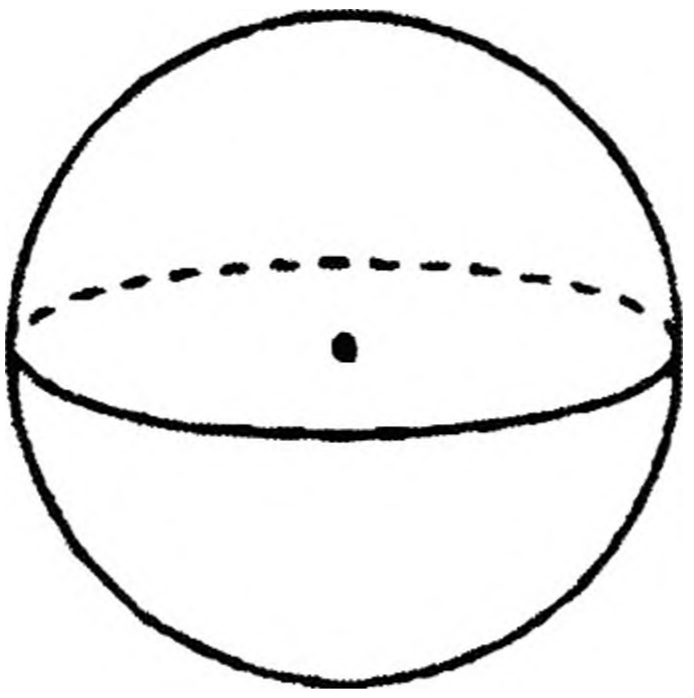
Рисуем проекции пирамиды,



цилиндра,

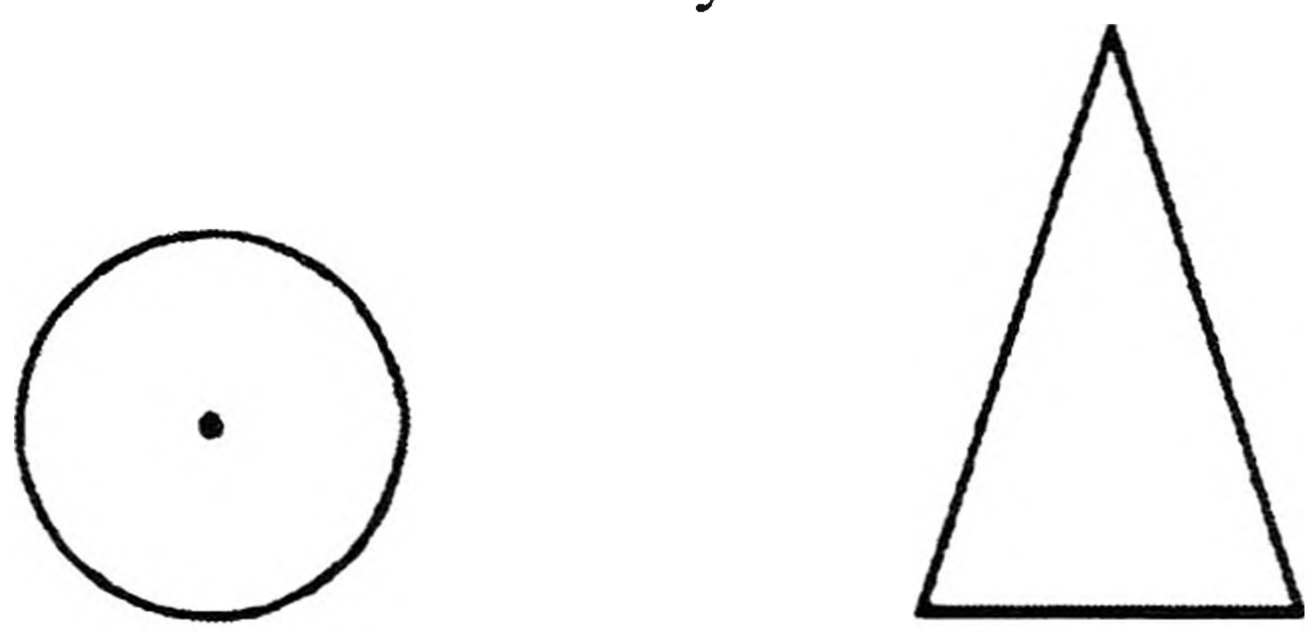


и шара.



Еще раз повторим основной принцип параллельного проецирования. Выбираем плоскость проекции и через каждую точку объемного тела проводим параллельные друг другу прямые. Эти прямые пересекают плоскость проекции под каким-либо углом. Если этот угол равен 90° — речь идет о **прямоугольном проецировании**. С помощью прямоугольного проецирования строятся чертежи объемных деталей в технике. В этом случае мы говорим о виде сверху, виде спереди и виде сбоку.

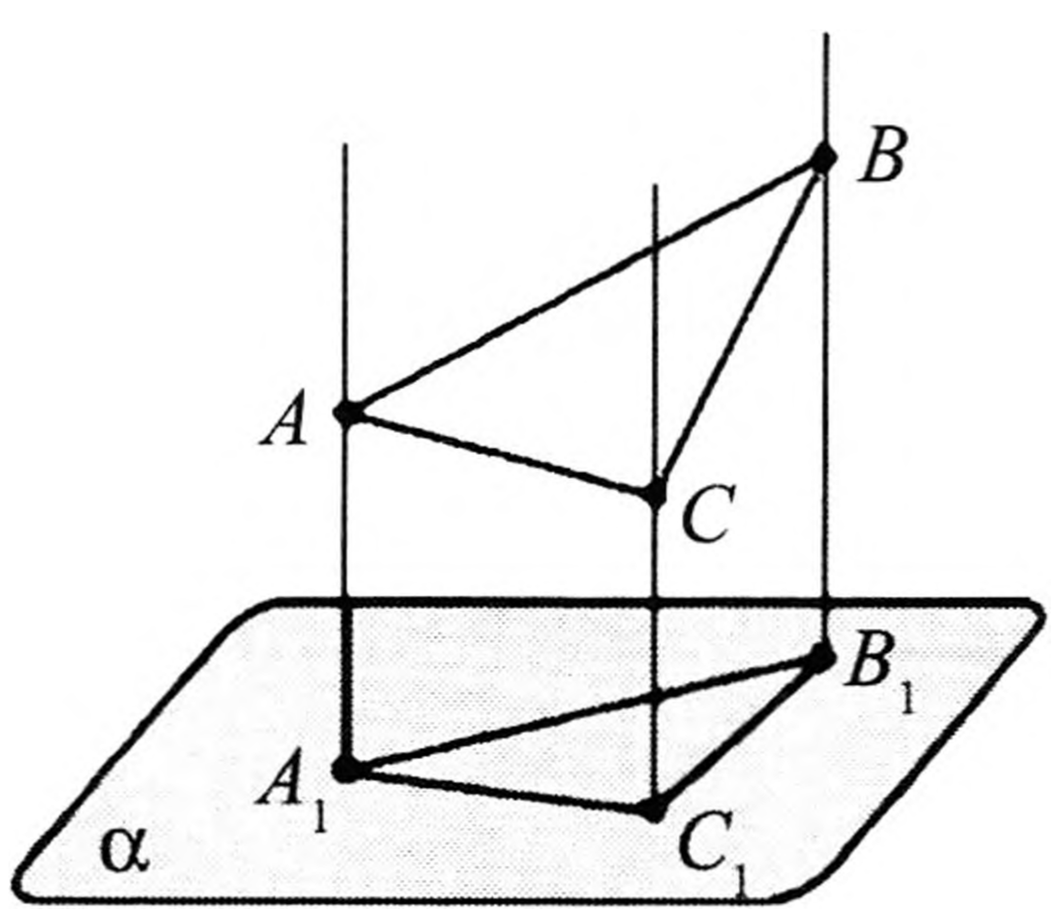
Конус



Вид сверху Вид сбоку

Иногда в задачах требуется найти **площадь прямоугольной проекции** фигуры.

Пусть S — площадь фигуры. Тогда площадь ее прямоугольной проекции равна $S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.



$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$,
где φ — угол между плоскостями (ABC) и α.

Как строить чертежи в задачах по стереометрии

Мы рассказали о том, что такое *параллельное проецирование* и как строить чертежи объемных тел. Однако часто бывает так, что вы построили чертеж — и непонятно, что делать дальше. На чертеже ничего хорошего не видно. Почему?

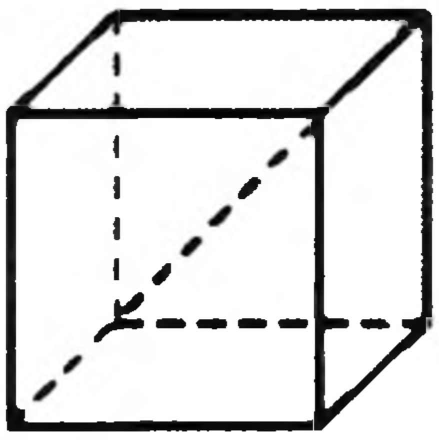
Не спешите обвинять себя в отсутствии пространственного мышления. Может быть, просто ракурс выбран неудачно.

Очень важно, чтобы объемное тело на вашем чертеже выглядело действительно объемным, а не складывалось, как зонтик. Следите, чтобы одна грань не накладывалась на другую, а непараллельные отрезки (например, ребро куба и его диагональ) не совпадали.

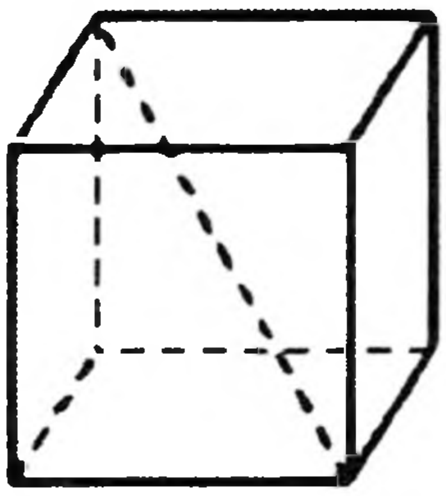
Мы рисуем чертеж **крупным**, чтобы на нем все было хорошо видно. Не стоит, как «лучший в мире рисовальщик петухов» Карлсон, изображать крошечного одинокого петушка (или малюсенький кубик) в углу тетради.

Приведем примеры удачных и неудачных чертежей.

Куб

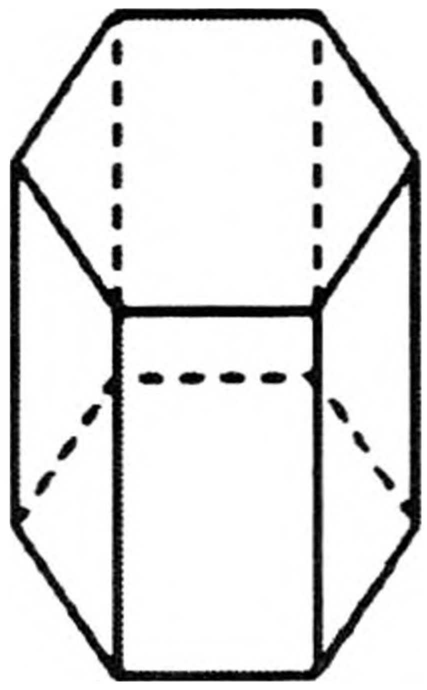


Неудачно. Главная диагональ и боковые ребра оказались на одной линии.

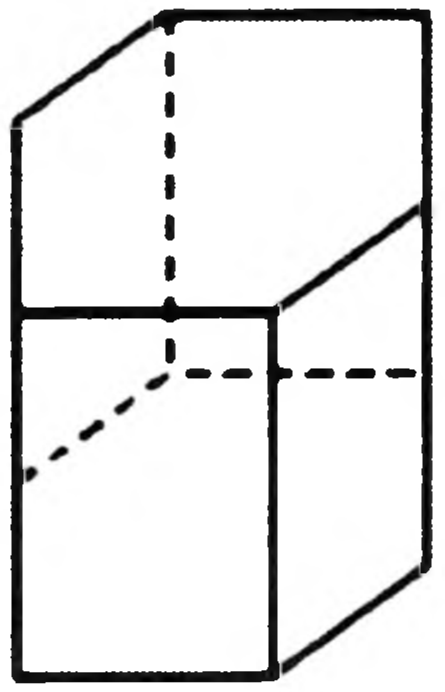


ОК

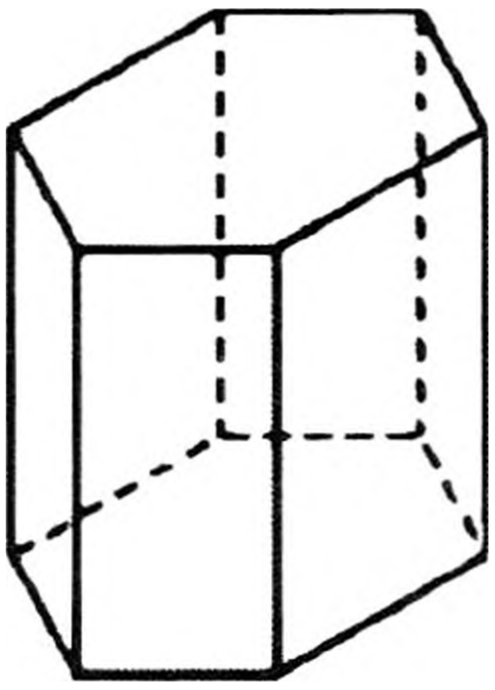
Шестигранная призма



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней грани оказались на одной линии.

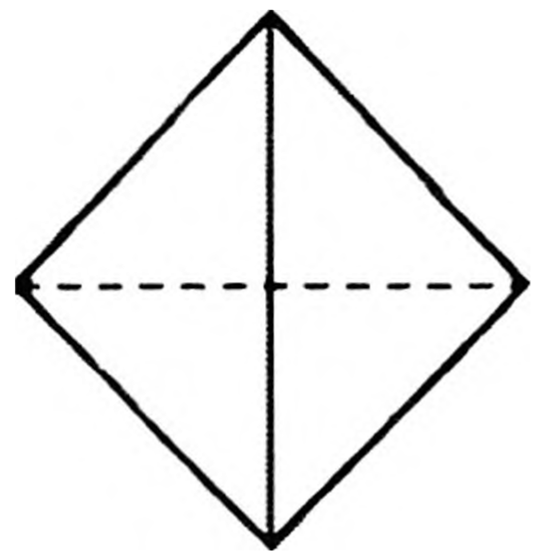


Неудачно. Стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии.

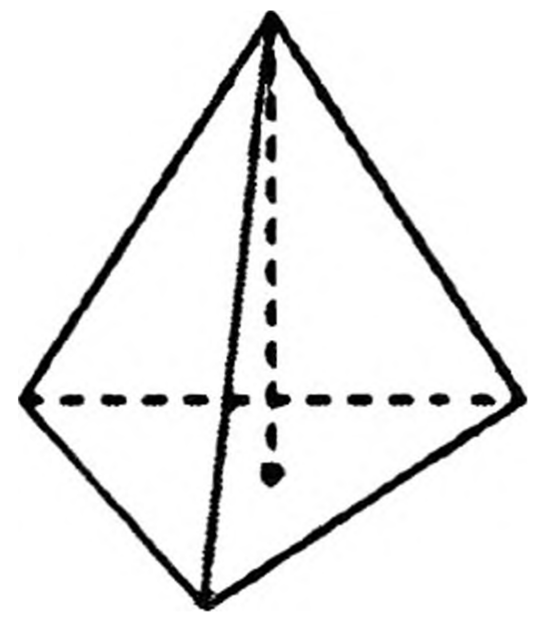


ОК

Тетраэдр

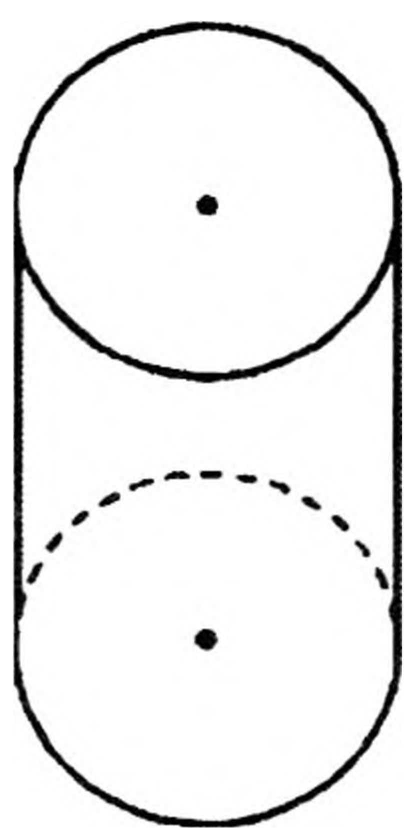


Неудачно. Рисунок стал плоским. Не видна высота тетраэдра.

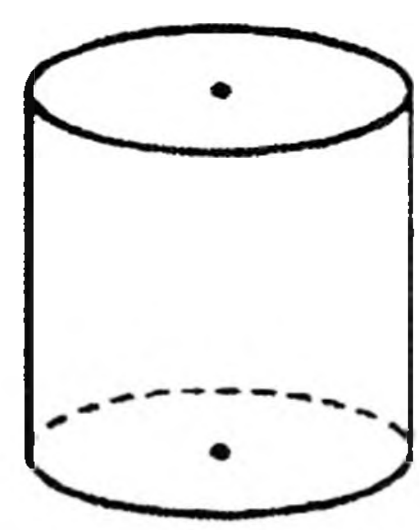


ОК

Цилиндр

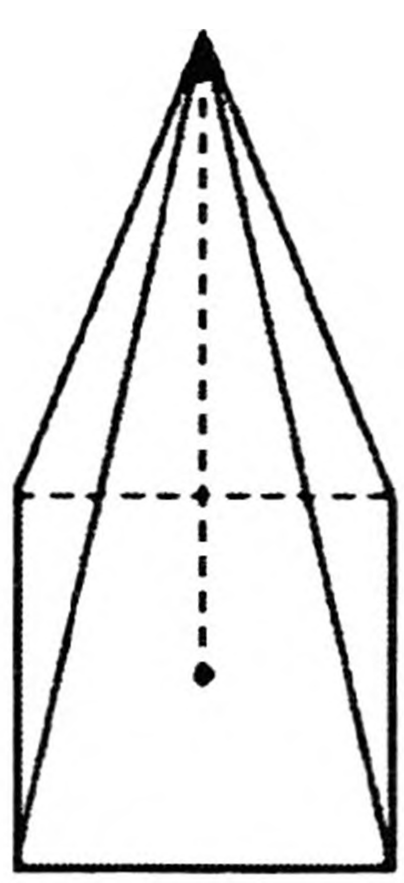


Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.

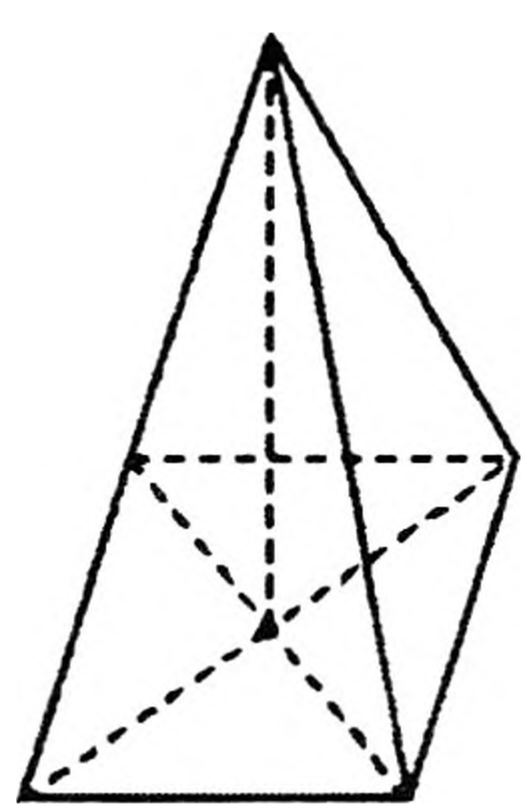


ОК

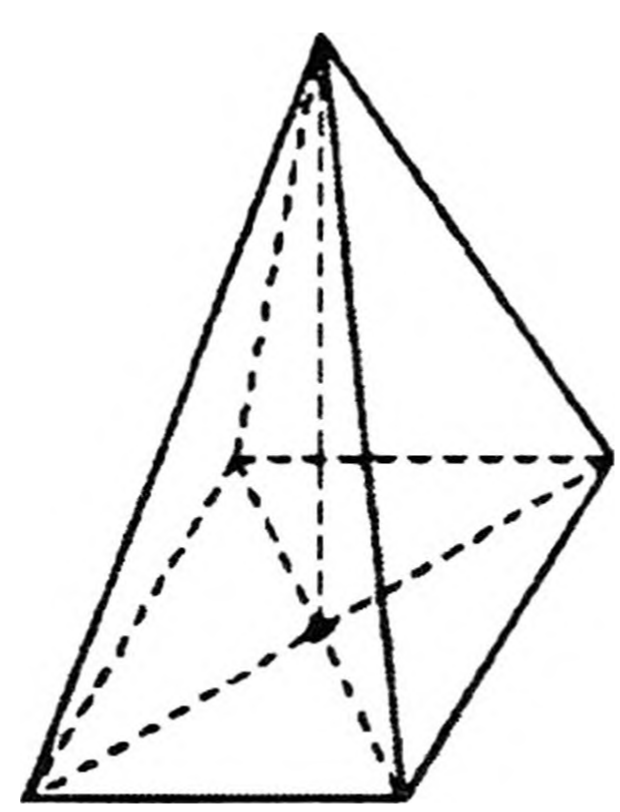
Правильная четырехугольная пирамида



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.



Неудачно. Левая боковая грань не видна.



ОК

Видимые линии изображаем сплошными, невидимые — штриховыми. Если решаете задачу векторно-координатным методом, ставьте рядом с точками их координаты. Это удобно.

Иногда одного чертежа недостаточно. Чаще всего для решения задач по стереометрии, кроме «объемного» чертежа, нужен один или несколько плоских.

Сейчас мы перейдем к решению задач по стереометрии. Повторим еще раз, чем же все-таки признак отличается от определения. Есть, например, определение перпендикулярности прямой и плоскости — и признак перпендикулярности прямой и плоскости. В чем разница между ними?

Предположим, в конкретной задаче нам надо доказать, что прямая m перпендикулярна плоскости α.

Если применять определение — придется перебрать все прямые, лежащие в плоскости α. Сделать это невозможно, да и не нужно. Достаточно, чтобы прямая m была перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости α.

Правила решения стереометрических задач ЕГЭ:

1. Начинаем с построения чертежа.

Строим чертеж ручкой (не карандашом!), с помощью линейки. Невидимые элементы объемного тела изображаем штриховыми линиями.

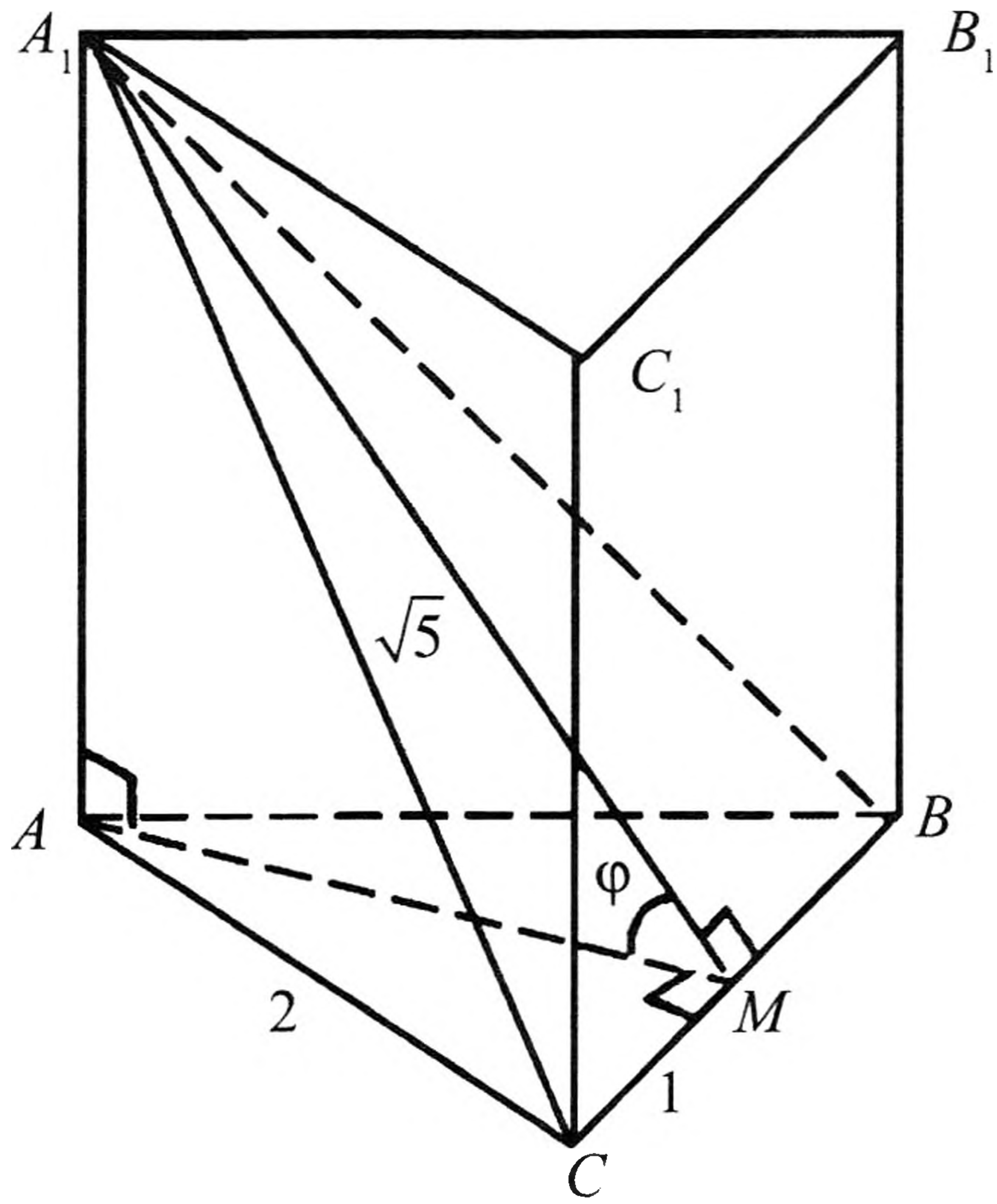
2. Записываем каждый шаг решения. Помним, что в задаче по стереометрии необходимы подробные объяснения. Не просто «Прямая AB перпендикулярна плоскости α», а «Прямая AB перпендикулярна плоскости α, потому что она перпендикулярна пересекающимся прямым c и d, лежащим в плоскости α». Конечно, все это лучше записать не словами, а символами.

3. От объемной задачи переходим к плоской, планиметрической. Все необходимые плоские чертежи рисуем отдельно.

Задачи по стереометрии

Для решения задач по стереометрии применяются два способа — классический и векторно-координатный. Мы начнем с классического.

1. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



По условию, призма правильная. Это значит, что в ее основании лежит правильный многоугольник, а боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

Сечение призмы плоскостью A_1BC изображено на чертеже.

Оформляя решение на ЕГЭ, записывайте все определения, которыми пользуетесь. В этой задаче мы запишем определение угла между плоскостями.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии пересечения плоскостей, проведенными в этих плоскостях.

Чтобы найти угол между плоскостями (ABC) и (A_1BC), надо провести перпендикуляры к линии BC пересечения этих плоскостей. В какой точке прямой BC их проводить? Конечно, можно взять любую точку прямой BC, однако выбираем ту, которая для нас наиболее удобна. Это точка M — середина отрезка BC.

Проведем AM и A_1M. Треугольник ABC — правильный, значит, AM — медиана и высота ($AM \perp BC$). Треугольник A_1BC — равнобедренный, значит, A_1M — также медиана и высота ($A_1M \perp BC$). Получаем: $\angle A_1MA = \varphi$ — искомый, согласно определению угла между плоскостями.

Осталось найти этот угол из какого-либо треугольника, в который он входит. Например, из прямоугольного треугольника A_1MA. Угол A в нем прямой, так как боковое ребро призмы AA_1 перпендикулярно плоскости основания, а значит, любой прямой, лежащей в плоскости основания.

Рассмотрим ΔCAM, $\angle M = 90°$. $CM = \frac{1}{2}BC = 1$. По теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Рассмотрим ΔAA_1C, $\angle A = 90°$. По теореме Пифагора

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{5-4} = 1.$$

Из треугольника AA_1M, в котором угол A прямой, найдем tg φ.

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AA_1}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Получаем $A_1MA = 30°$.

Ответ: 30°.

Покажем еще один, более короткий способ решения этой задачи.

Второй способ.

Правильный треугольник ABC, лежащий в основании, является проекцией треугольника A_1BC на плоскость основания. Вспомним, что площадь прямоугольной проекции фигуры равна произведению площади фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, то есть $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1BC} \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями, который нам и надо найти.

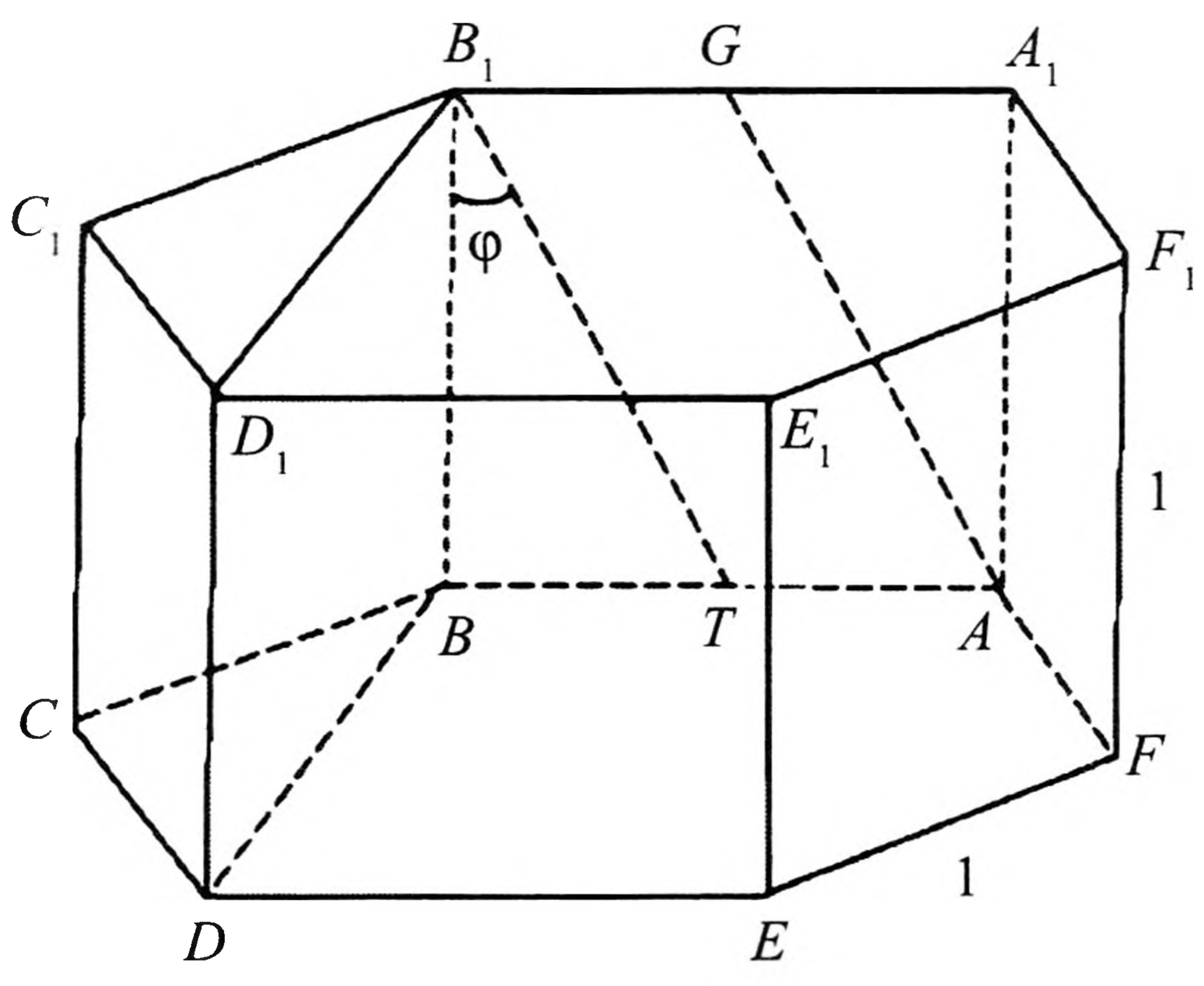
$S_{ABC} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, по формуле площади правильного треугольника.

В равнобедренном треугольнике A_1BC, где основание равно 2, а боковая сторона $\sqrt{5}$, найдем высоту A_1M.

Тогда $S_{A_1BC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot A_1M = 1$.

Получим, что $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi = 30°$.

2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямой AG и плоскостью BDD_1.



Мы видим, что прямая и плоскость пересекаются вне призмы. В этой ситуации возможны два выхода. Первый — достроить чертеж, продлив эти плоскость и прямую до точки пересечения. Второй — провести через какую-либо точку, лежащую в плоскости BB_1D_1, прямую, параллельную AG, и найти угол между плоскостью и полученной прямой. Мы выберем второй способ.

В плоскости ABB_1 проведем через точку B_1 прямую B_1T, параллельную AG. Точка T является серединой ребра AB, так как ATB_1G — параллелограмм.

Найдем угол между TB_1 и (BB_1D_1).

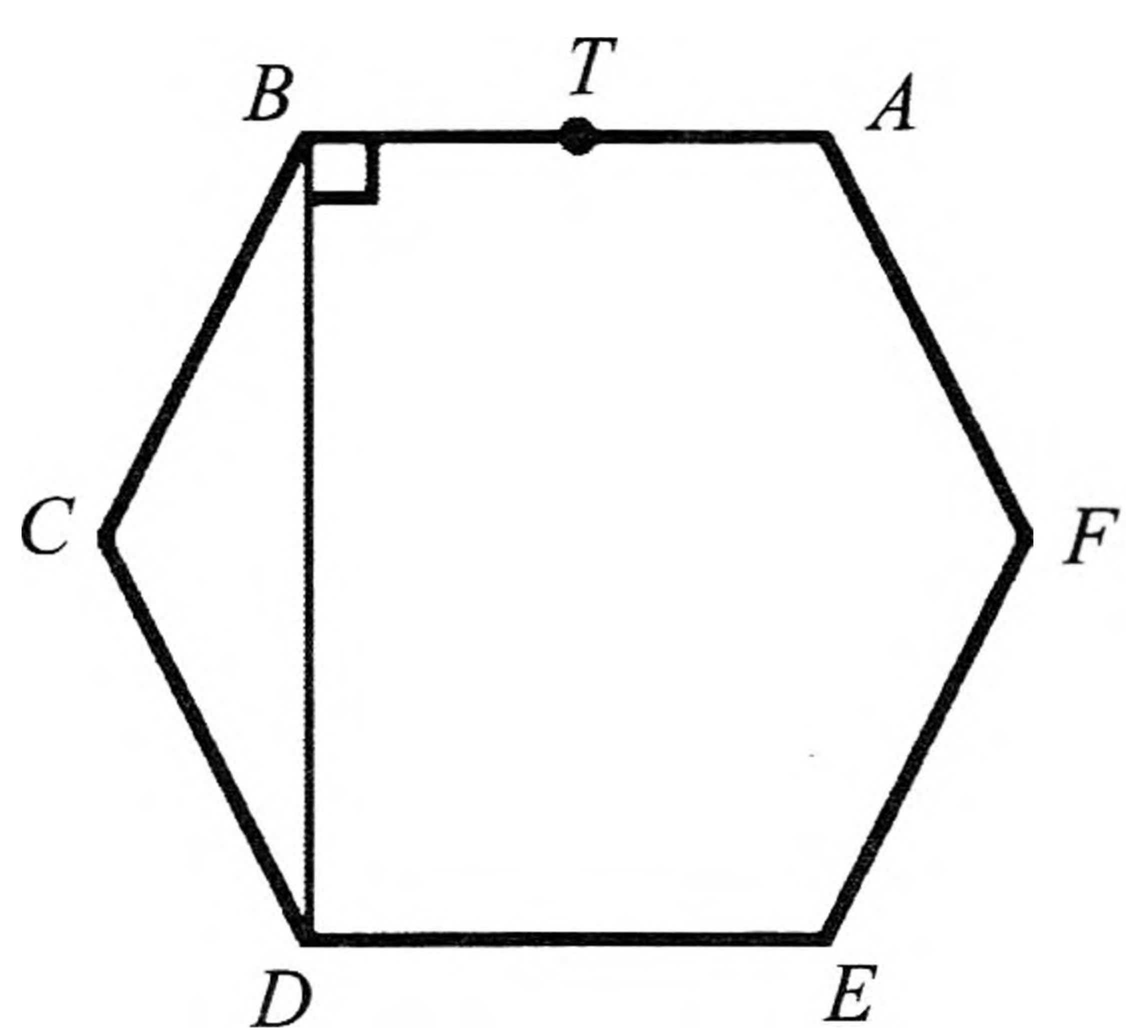
Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Точка B_1 уже лежит в нужной нам плоскости. Значит, надо найти проекцию точки T на эту плоскость. Для этого надо опустить из точки T перпендикуляр на эту плоскость. Но какая же точка будет основанием этого перпендикуляра? В какую точку плоскости BB_1D_1 проецируется точка T?

Вспомним признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Сделаем плоский чертеж нижнего основания и докажем, что $TB \perp DB$.



Угол ABC — угол правильного шестиугольника, и он равен $120°$, $\angle CDB = CBD = 30°$ (из равнобедренного треугольника DBC). Значит, $\angle CDB = 120° - 30° = 90°$. $TB \perp DB$.

Кроме того, TB лежит в плоскости нижней грани (ABC), а $BB_1 \perp (ABC)$ как высота призмы. Значит, BB_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABC, в том числе и прямой TB.

Итак, $TB \perp BB_1$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $TB \perp (DBB_1)$.

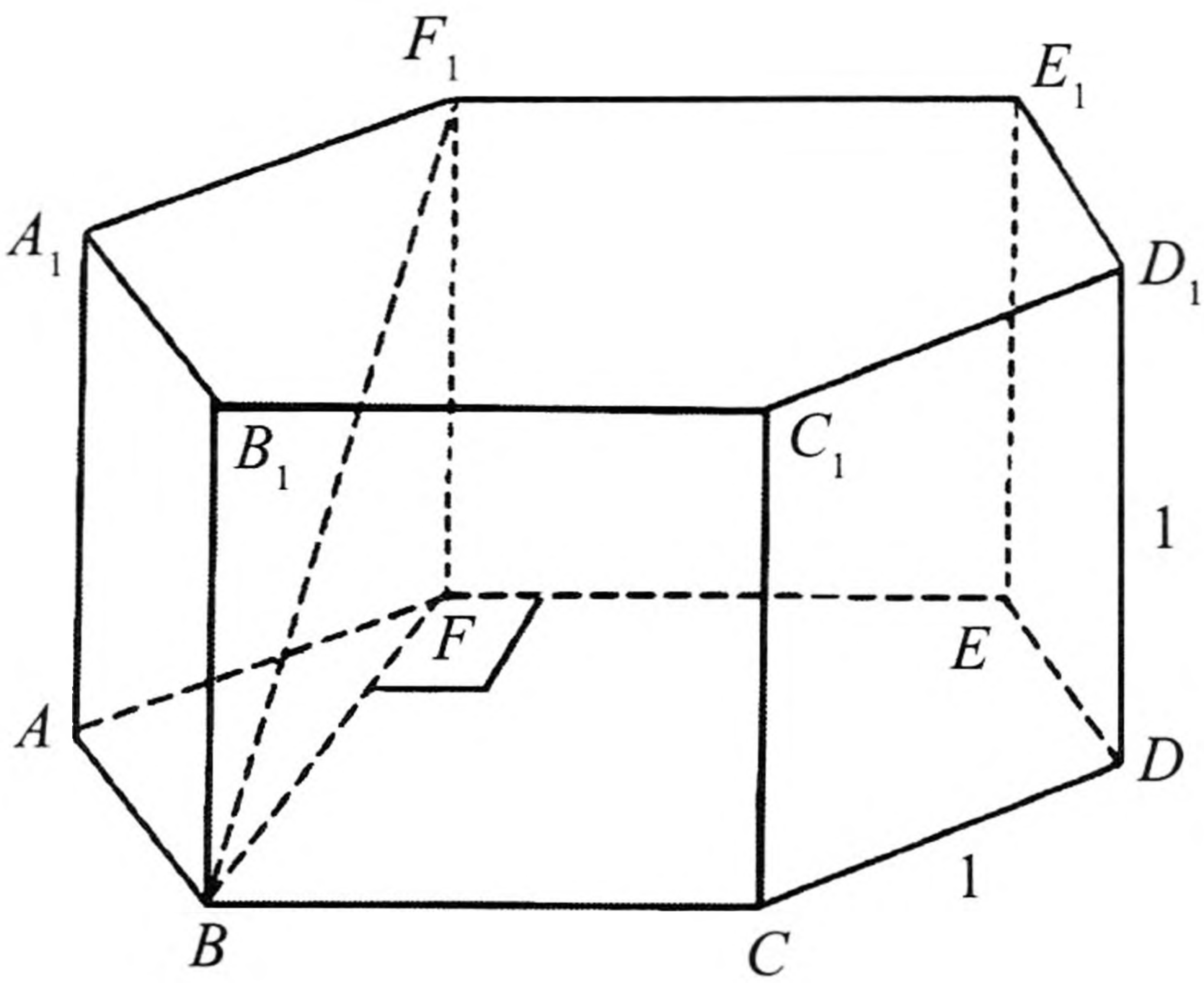
Тогда точка B — проекция точки T на (DBB_1).

Искомый угол $BB_1T = \alpha$.

$$BT = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2},\ BB_1 = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{BT}{BB_1} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

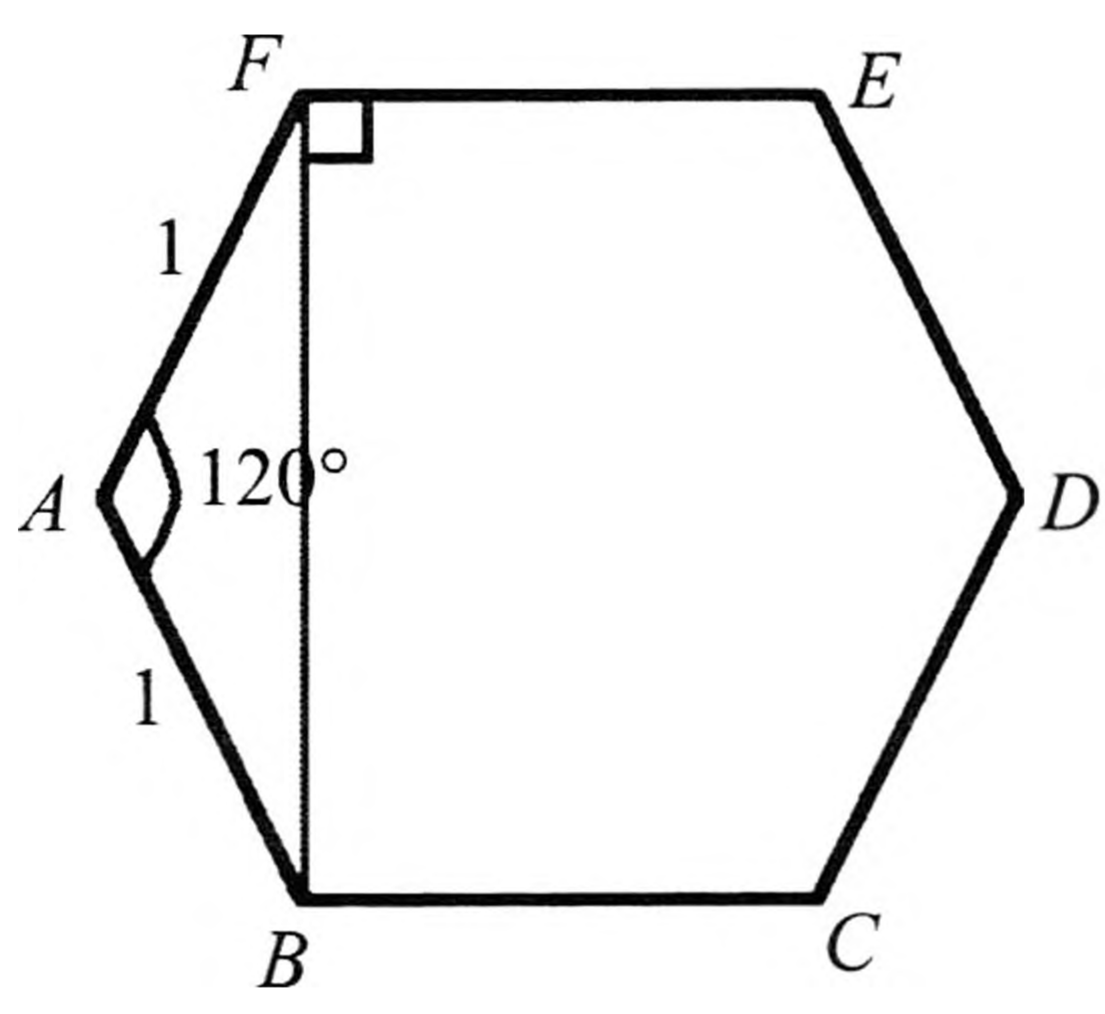
3. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.



Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Значит, необходимо опустить перпендикуляр из точки B на прямую E_1F_1. В какой же плоскости будет лежать этот перпендикуляр?

Сделаем плоский чертеж основания призмы.



Проведем BF. В предыдущей задаче мы доказали, что $BF \perp FE$.

При этом BF — проекция BF_1 на плоскость (ABC), $EF \in (ABC)$.

Поэтому по теореме о трех перпендикулярах $BF_1 \perp FE$.

$F_1E_1 \parallel FE$, значит, $BF_1 \perp F_1E_1$. Тогда BF_1 — искомое расстояние от точки B до F_1E_1. Найдем это расстояние из ΔBFF_1.

Найдем BF из плоского чертежа. Из ΔABF: $AB = AF = 1$, $\angle BAF = 120°$.

По теореме косинусов:

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AB \cdot AF \cdot \cos(\angle BAF),$$

$$BF^2 = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

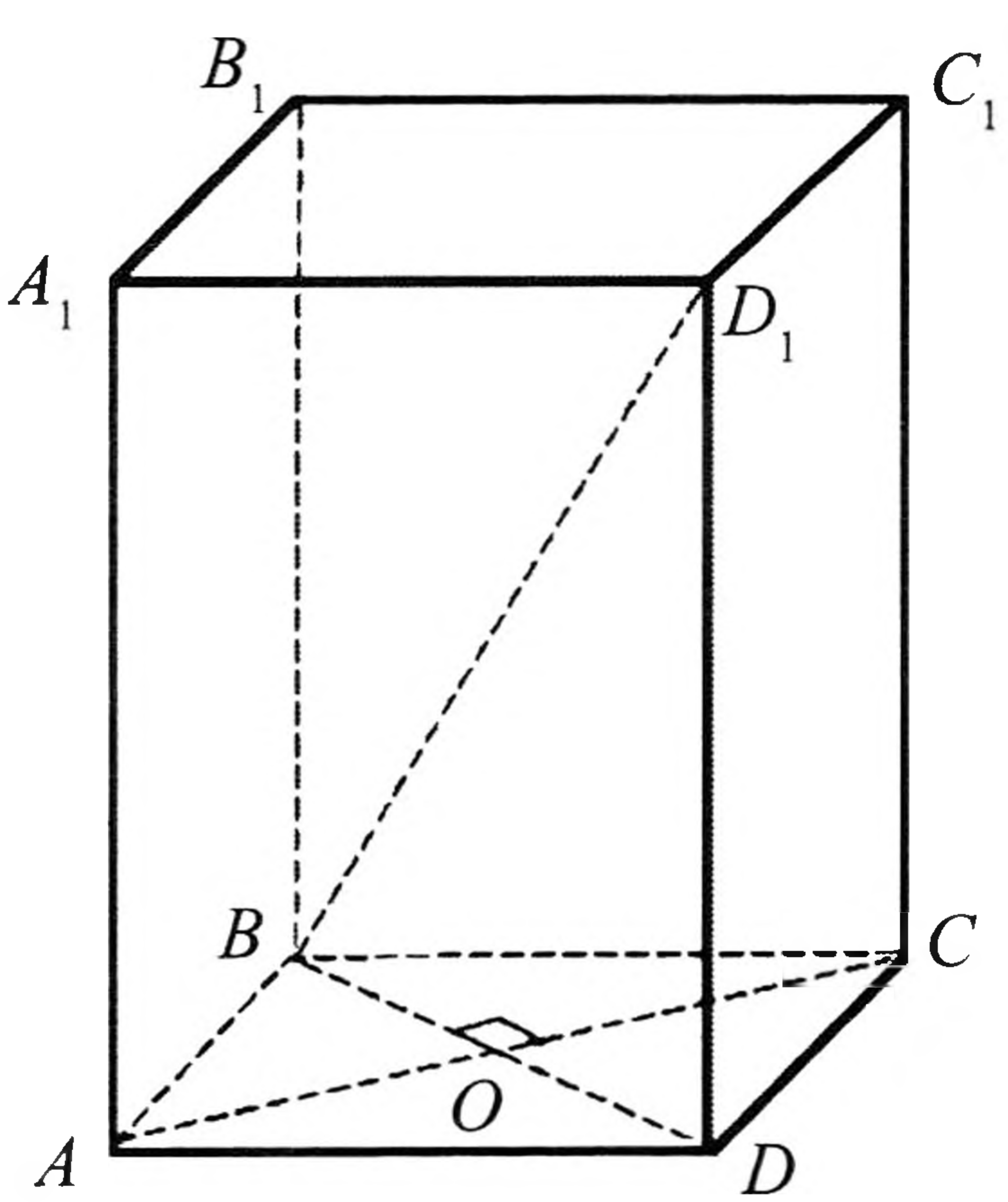
$$BF = \sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора из ΔBFF_1 находим гипотенузу

$$BF_1 = \sqrt{BF^2 + FF_1^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Ответ: 2.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб. Найти угол между прямыми AC и BD_1.



Диагонали ромба $ABCD$, лежащего в основании, взаимно перпендикулярны. Значит, $BD \perp AC$.

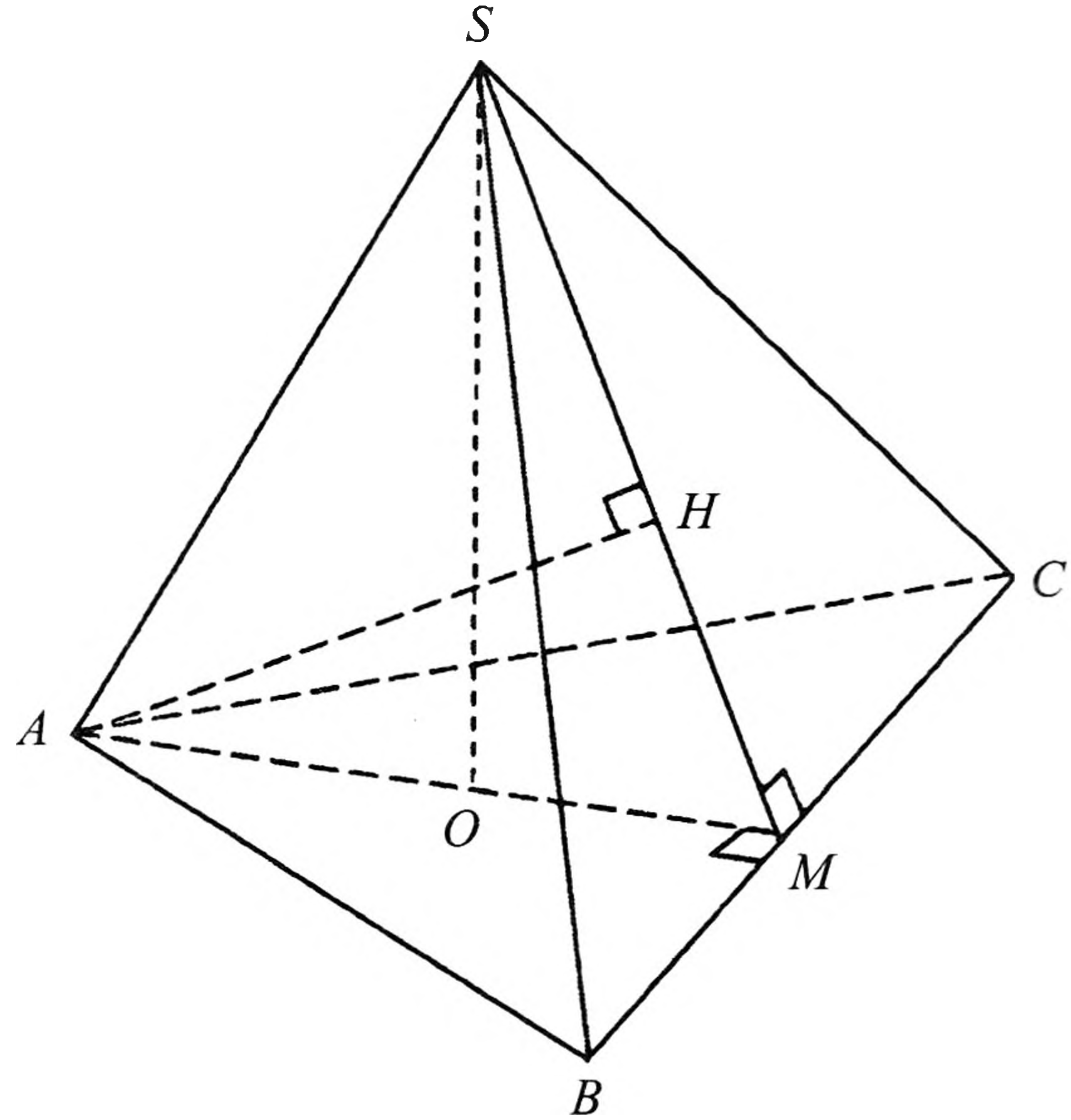
Вспомним теорему о трех перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

$BD \perp AC$, BD — проекция BD_1 на плоскость основания, значит, $BD_1 \perp AC$. Получаем, что искомый угол — прямой.

Ответ: 90°.

5. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60 градусов. Найдите расстояние от вершины основания до плоскости противолежащей ей боковой грани.



Обратите внимание на эту задачу. Она содержит базовые схемы для решения очень многих задач по стереометрии.

Будем искать расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости (SBC).

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим этой плоскости.

Значит, надо построить отрезок с одним из концов в точке A, перпендикулярный двум пересекающимся прямым в плоскости (SBC).

Пусть точка M — середина BC. Вспомните, мы уже пользовались этим приемом в самой первой задаче.

1) Проведем $AM \in (ABC)$. AM — медиана и высота правильного треугольника ABC, значит, $AM \perp BC$.

2) Проведем $SM \in (SBC)$. SM — медиана и высота равнобедренного треугольника SBC, значит, $SM \perp BC$.

Эти два пункта — важные шаги построения, часто встречающиеся в задачах по стереометрии. Запомните их.

3) Из пунктов 1) и 2) следует, что $(ASM) \perp BC$, а угол AMS — угол между боковой гранью и плоскостью основания, равный $60°$ (по определению угла между плоскостями).

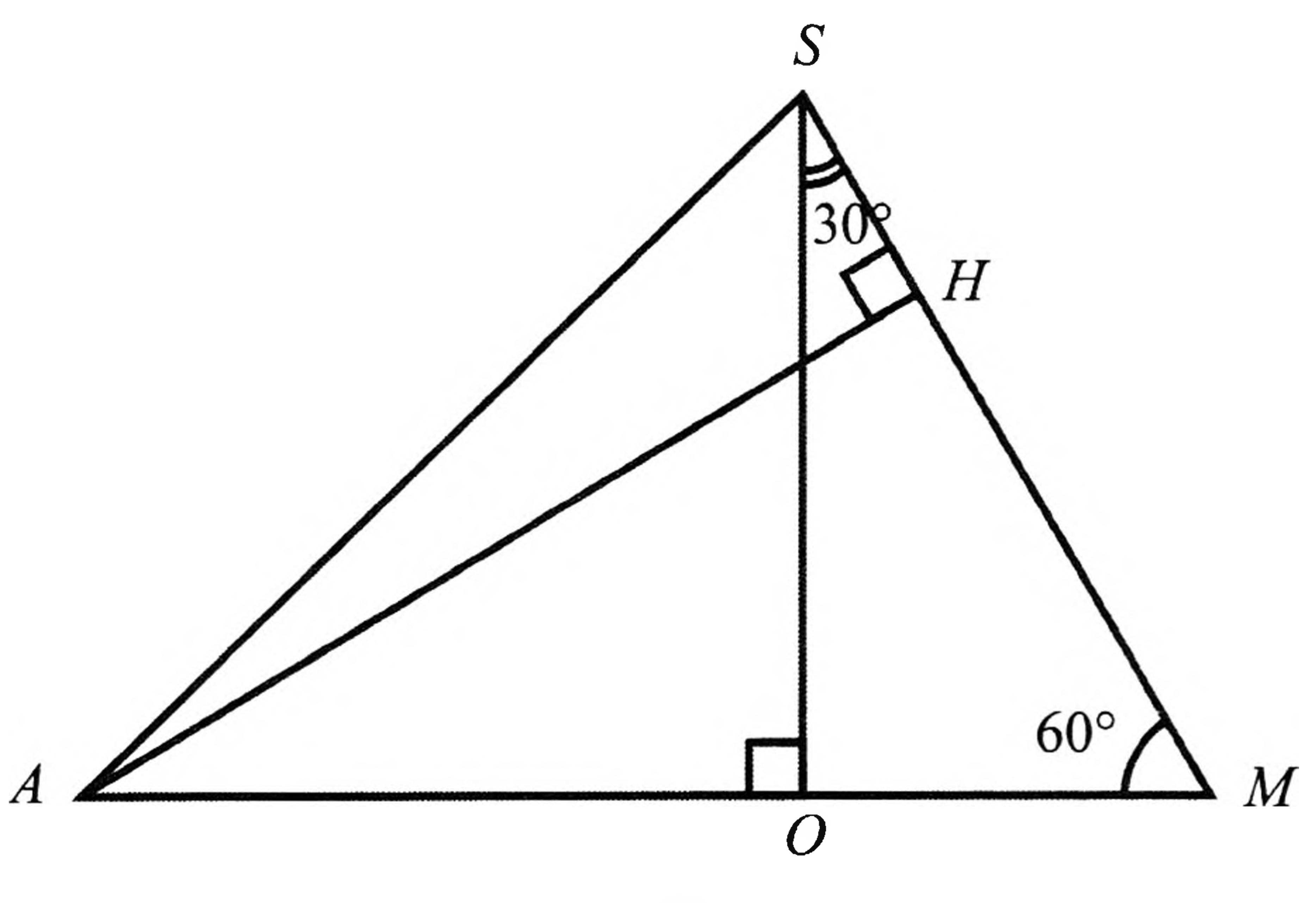
Проведем $AH \perp SM$ в плоскости (ASM).

Заметим, что нужно обязательно указывать, в какой плоскости идет построение. Мы не можем провести линию просто в воздухе. Необходима плоскость, в которой лежит эта линия.

Кроме того, $AH \perp BC$, так как $AH \in (ASM)$, $(ASM) \perp BC$.

Итак, отрезок AH перпендикулярен двум пересекающимся прямым в плоскости (SBC), поэтому $AH \perp (SBC)$. Значит, $|AH|$ — расстояние от A до плоскости (SBC).

Чтобы найти это расстояние, сделаем плоский чертеж сечения пирамиды плоскостью (ASM).



Пусть точка O — проекция точки S на плоскость основания пирамиды. По условию, $SO = 4$ как высота пирамиды.

Из ΔSOM ($\angle M = 60°$, $\angle O = 90°$) найдем OM:

$$\operatorname{tg}60° = \frac{SO}{OM},$$

$$\sqrt{3} = \frac{4}{OM},$$

$$OM = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Катет, лежащий напротив угла OSM, равного 30°, равен половине гипотенузы, поэтому $SM = 2OM = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

У правильной пирамиды вершина S проецируется в центр основания — точку O, которая является центром вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Также для правильного треугольника ABC точка O — точка пересечения его высот, медиан и биссектрис. Значит, по свойству медиан точка O лежит на AM и делит AM в отношении 2:1, считая от вершины A.

Следовательно, $AM = 3OM = \frac{12}{\sqrt{3}}$.

Воспользуемся методом площадей, записав площадь треугольника ABC двумя способами.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot SO = \frac{1}{2}SM \cdot AH,$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 4 = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot AH,$$

$$AH = 6.$$

Ответ: 6.

Второй способ.

Покажем, как решить данную задачу **методом объемов.** Суть метода заключается в том, чтобы разными способами записать объем нашей пирамиды, а затем найти неизвестное расстояние от вершины до противоположной грани, которое является высотой пирамиды. Ведь в качестве основания пирамиды мы можем выбрать любую ее грань.

Из прямоугольного треугольника SOM найдем $OM=\frac{4}{\sqrt{3}}$. Тогда $SM=\frac{8}{\sqrt{3}}$ и $AM=\frac{12}{\sqrt{3}}$, так как $OM=\frac{1}{3}AM$ (по свойству правильного треугольника). Отсюда $AB=AC=BC=8$, $S_{ABC}=\frac{16}{\sqrt{3}}$. Мы нашли площадь основания пирамиды.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO=\frac{64}{\sqrt{3}}$.

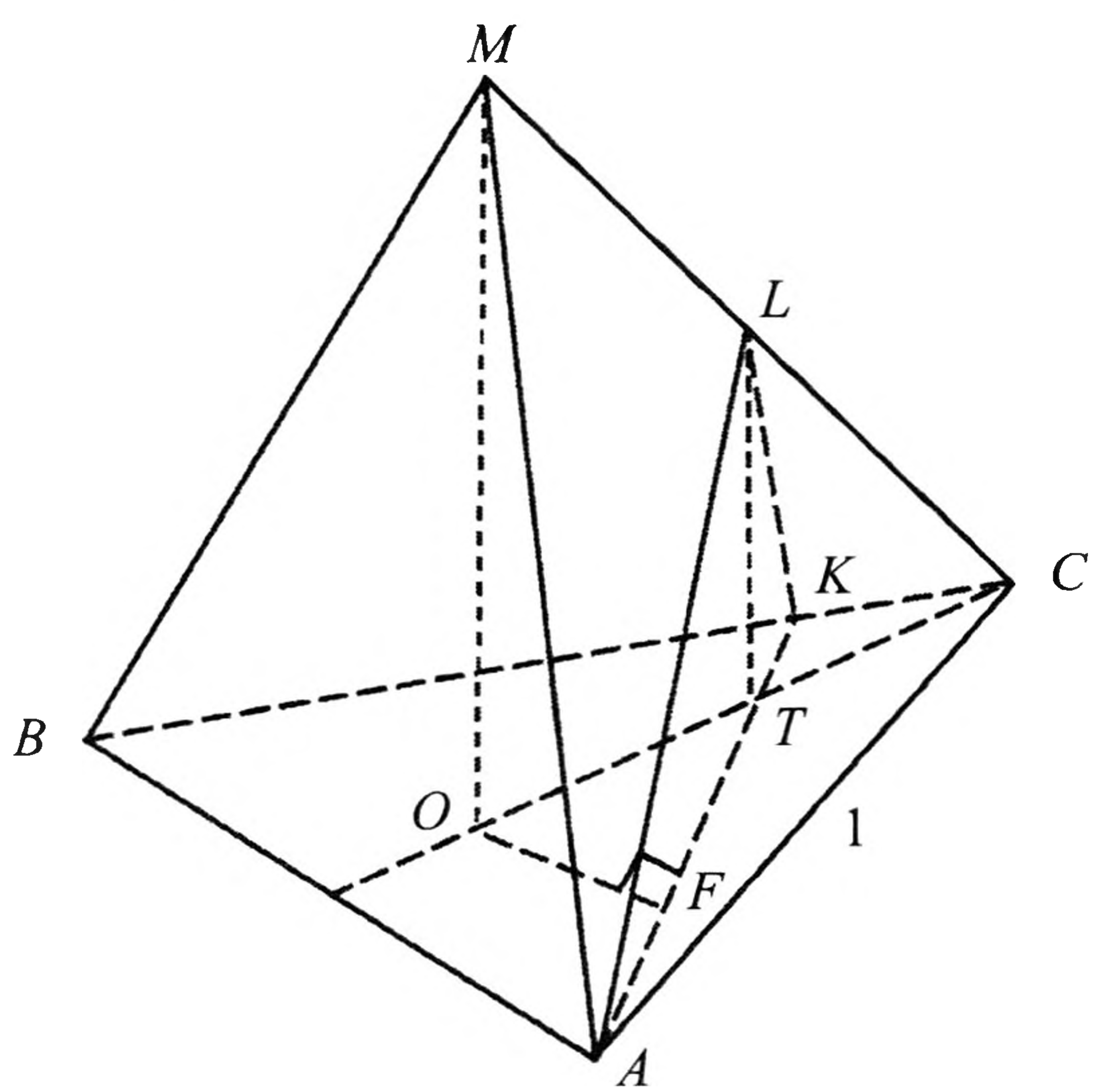
С другой стороны, объем пирамиды $V=\frac{1}{3}\cdot S_{SBC}\cdot AH$, где AH — неизвестное нам расстояние от вершины A до плоскости SBC, которое мы и хотим найти.

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot SM=\frac{32}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $AH=6$.

Ответ: 6.

6. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.



На вид задача простая, однако не каждый абитуриент с ней справляется. Прямые AL и MO скрещиваются (не параллельны и не пересекаются). Иначе говоря, скрещивающимися называются прямые, которые невозможно поместить в одну плоскость. Они лежат в параллельных плоскостях.

Найдем такую пару параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые. Иными словами, нам надо найти такую плоскость, которая проходит через AL параллельно прямой OM. Если ее пока нет на чертеже, значит, построим ее.

Опустим $LT \perp (ABC)$.

$LT \parallel MO$, так как $MO \perp (ABC)$ (два перпендикуляра к одной плоскости параллельны друг другу). Но где будет основание перпендикуляра — точка T?

Докажем, что точка T лежит на OC.

Отрезок OC — проекция отрезка MC на плоскость (ABC).

Тогда точка T — проекция L на (ABC), точка L — середина MC. И по свойству прямоугольного проецирования T — середина OC.

Проведем плоскость (ALT).

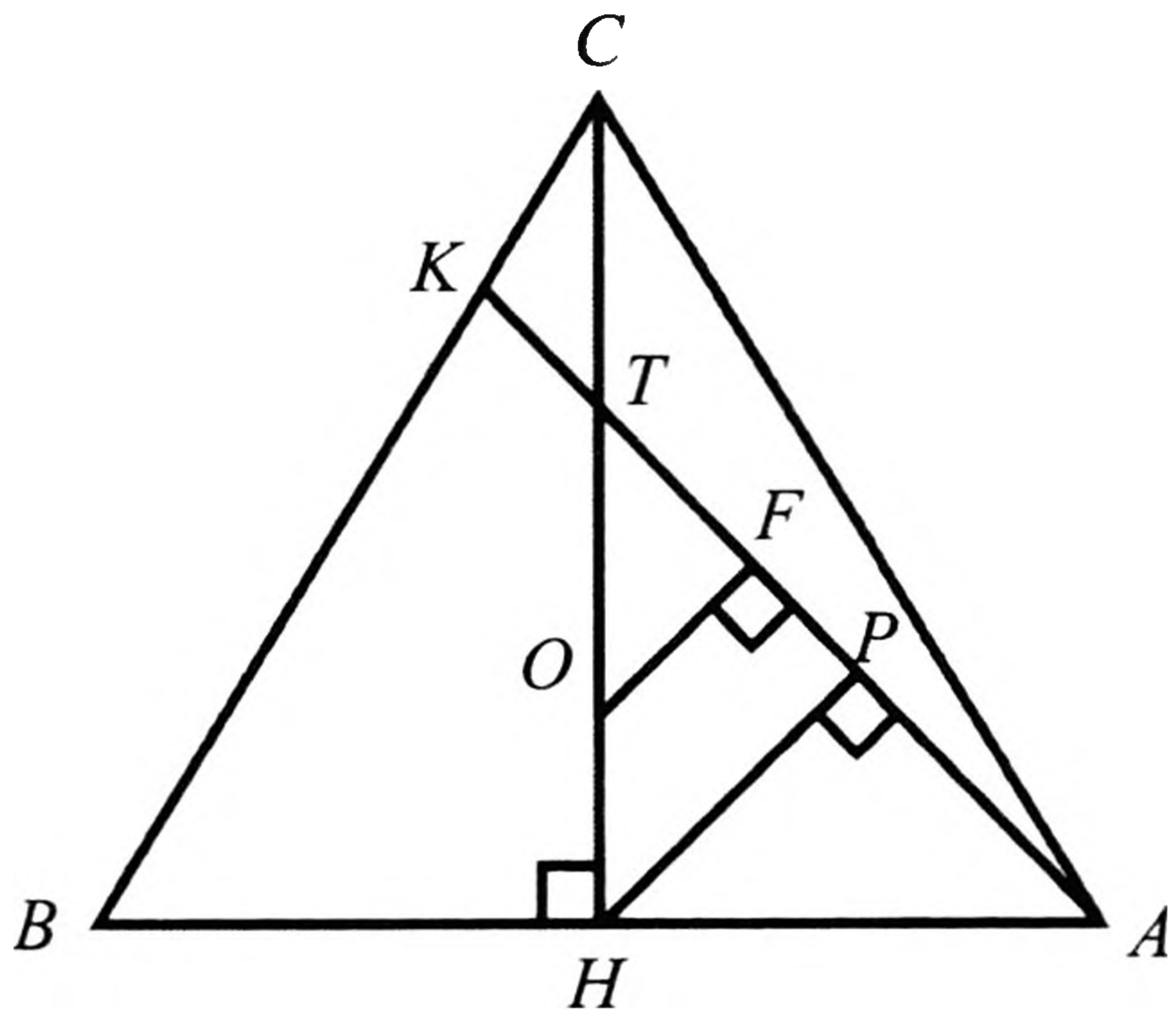
$LT \parallel MO, LT \in (ALT) \Rightarrow (ALT) \parallel OM$. Через одну из двух скрещивающихся прямых мы провели плоскость, параллельную второй прямой. Достроим сечение тетраэдра этой плоскостью, продлив AT до пересечения с BC в точке K ($AT \cap BC = K$) и соединив точки L и K. Тогда треугольник ALK — искомое сечение.

Найдем расстояние от прямой OM до плоскости ALK.

В плоскости (ABC) проведем $OF \perp AT$. Кроме того, $OF \perp LT$ (так как $LT \perp (ABC)$).

Значит, $OF \perp (ALT)$, OF — расстояние от точки O до (ALT). Другими словами, OF — расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, в которой лежит вторая прямая.

Переходим к плоскому чертежу основания ABC.



Вспомним навыки решения геометрических задач.

Из ΔAHT: $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, $TH = \frac{2}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (O — центр правильного треугольника, T — середина OC), тогда по теореме Пифагора

$$TA^2 = \sqrt{AH^2 + HT^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Проведем $HP \parallel OF \Rightarrow HP \perp AK$.

$\Delta TFO \sim \Delta TPH$ (по двум углам) $\Rightarrow FO = \frac{1}{2}HP$ (O — середина HT).

HP — высота прямоугольного треугольника HTA. Запишем его площадь двумя способами: как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе.

$$S_{\Delta AHT} = \frac{1}{2}AH \cdot HT = \frac{1}{2}HP \cdot AT,$$

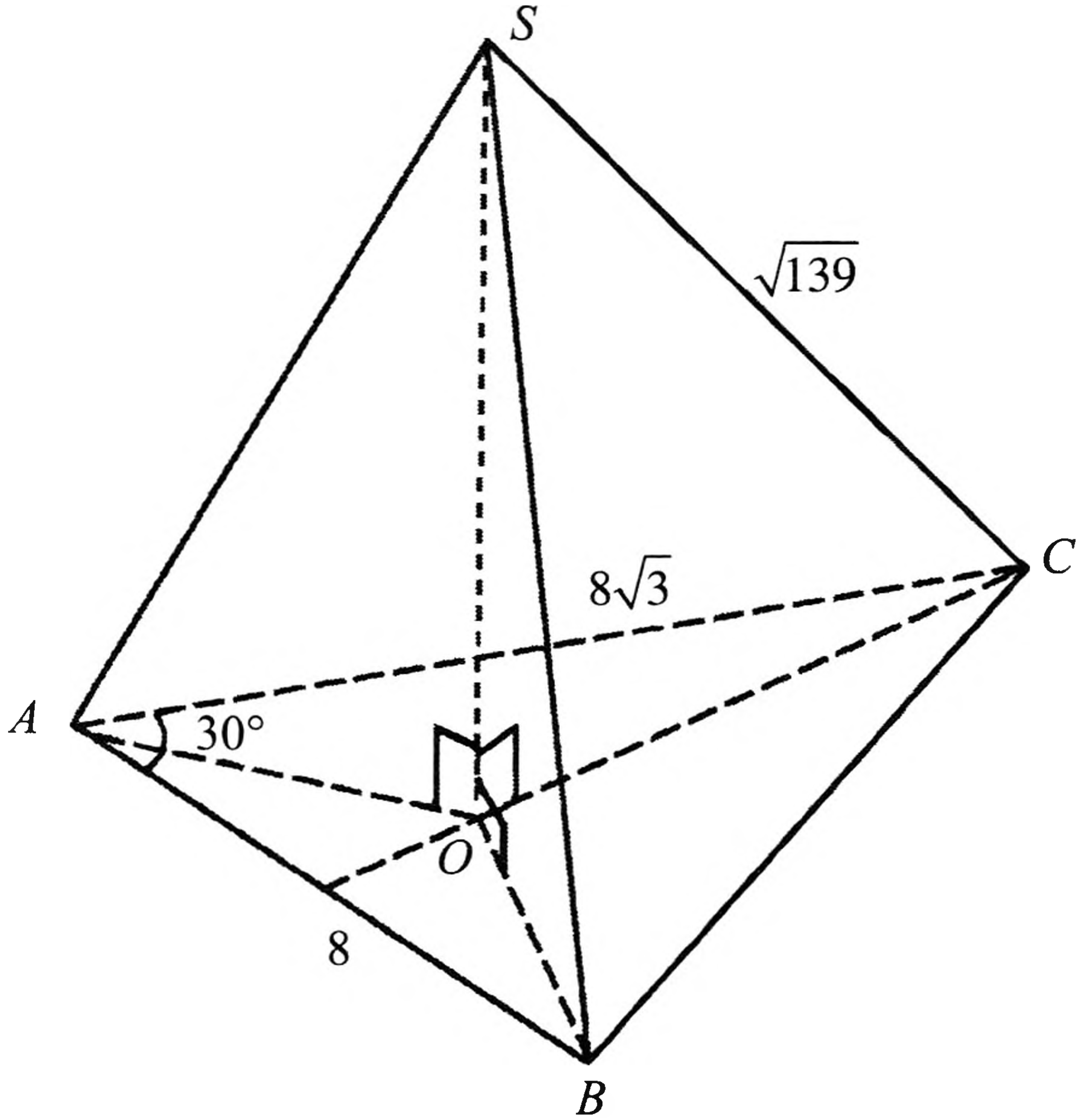
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = HP \cdot \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$HP = \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$OF = \frac{1}{2}HP = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

7. Основанием треугольной пирамиды является треугольник, две стороны которого равны 8 и $8\sqrt{3}$, а угол между ними равен 30 градусов. Длина каждого бокового ребра равна $\sqrt{139}$. Найдите объем пирамиды.



Хотя все боковые ребра этой пирамиды равны, она не является правильной. При этом одно интересное свойство у нее есть.

Докажем, что если все боковые ребра пирамиды равны, то вершина проецируется в центр окружности, описанной вокруг основания.

Рассмотрим треугольники *SOA*, *SOB* и *SOC*. Все они — прямоугольные, так как высота *SO* перпендикулярна плоскости *ABC*, а значит, и любой прямой, лежащей в плоскости *ABC*.

Более того.

$\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (по катету и гипотенузе, *SO* — общий катет, гипотенузы $SA = SB = SC$ по условию). Значит, $AO = OC = OB$.

Итак, точка *O* равноудалена от точек *A*, *B* и *C*. Значит, *O* — центр описанной окружности треугольника *ABC*.

Зная радиус этой описанной окружности и стороны треугольника ABC, мы сможем найти и его площадь. Затем по формуле $V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h$ найдем объем пирамиды.

Найдем BC по теореме косинусов из треугольника ABC.

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\angle BAC),$$

$$BC^2=64+192-2\cdot 8\cdot 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$BC=8.$$

Треугольник ABC оказался равнобедренным.

По теореме синусов найдем радиус описанной окружности:

$$\frac{BC}{\sin A}=2R,$$

$$R=\frac{BC}{2\sin A}=8.$$

Рассмотрим треугольник SOC:

$$OC=R=8,\ \angle O=90^\circ\Rightarrow SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=$$

$$=\sqrt{139-64}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\ \text{(по теореме Пифагора)}.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h.$$

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\left(\angle BAC\right)\cdot SO,$$

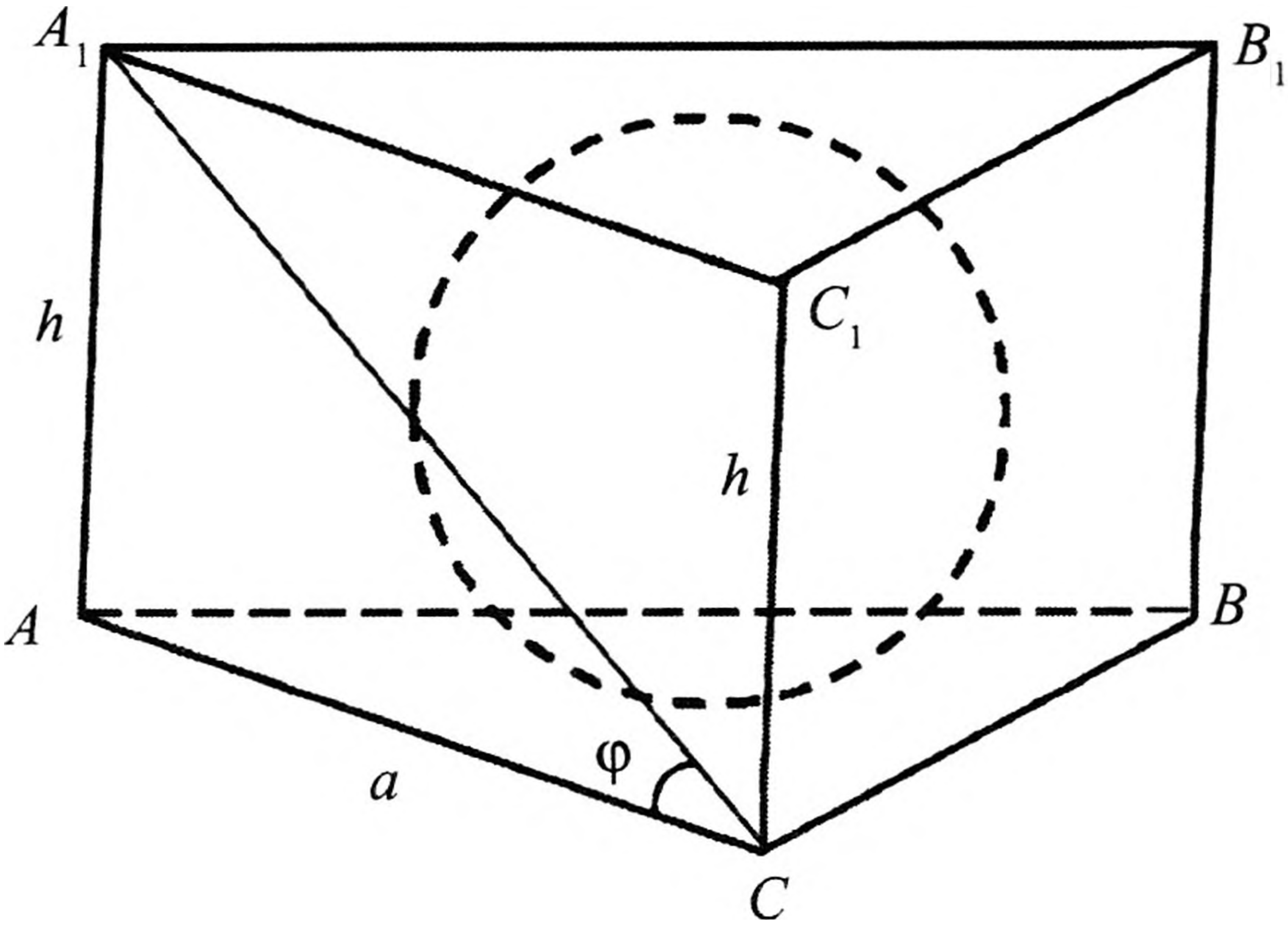
$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}=80.$$

Ответ: 80.

Дополнительная задача

Докажите самостоятельно, что у пирамиды, у которой все боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, вершина проецируется в центр окружности, вписанной в основание.

8. В правильную треугольную призму можно вписать шар таким образом, что он будет касаться всех боковых граней и оснований призмы. Найдите угол (в градусах) наклона диагонали боковой грани призмы к плоскости основания.



Задача кажется легкой, но в ней есть подвох. Надо найти, чему равен угол φ, показанный на чертеже. Первое, что может прийти в голову, — что этот угол равен 45 градусам, так как шар вписан в призму, и вроде бы все грани должны быть квадратами. Что же на самом деле?

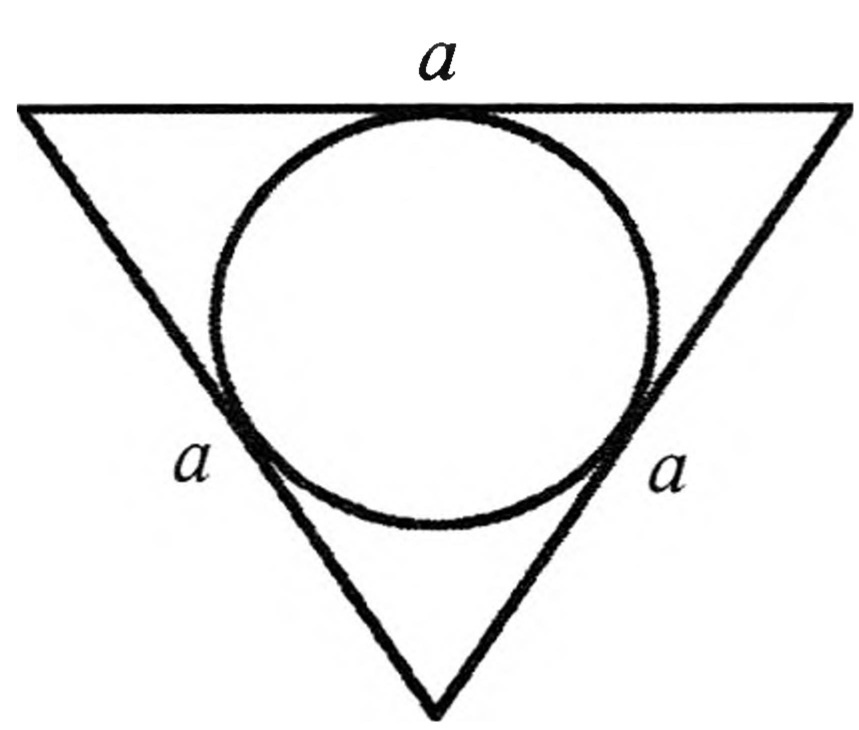
Обратите внимание, что линейные размеры в задаче не даны. Значит, мы введем их сами.

Пусть a — сторона основания призмы, h — ее высота.

Тогда $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{h}{a}$.

Так как шар касается нижней и верхней граней призмы, то его диаметр равен высоте призмы, $h = 2R$.

Изобразим вид сверху.



Круг вписан в правильный треугольник. Если его сторона a, то радиус вписанной окружности $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow a=\dfrac{6R}{\sqrt{3}}$.

Тогда

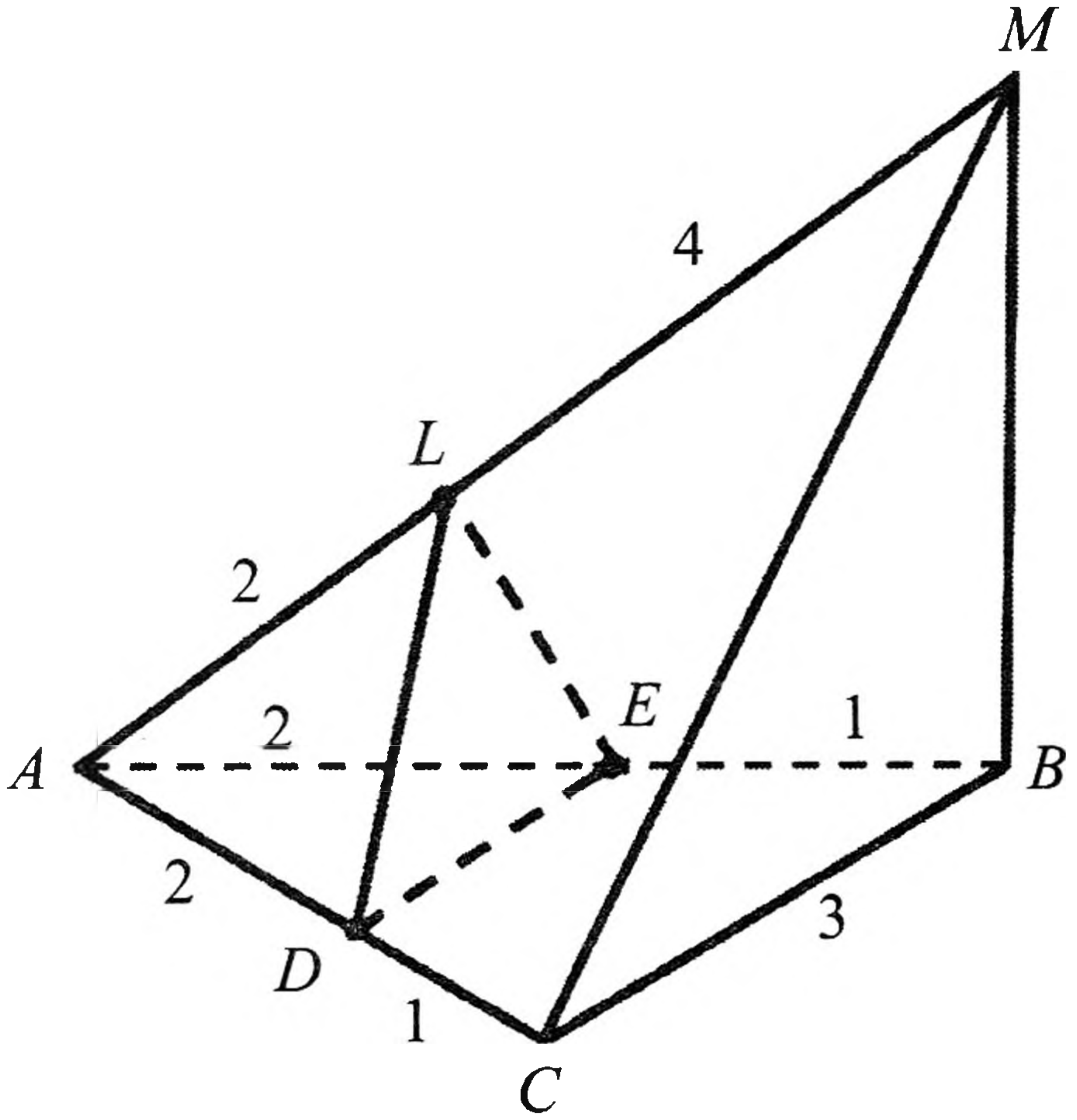
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{a}=\frac{2R}{6R}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\varphi=30^\circ.$$

Если вам все еще кажется, что угол должен быть 45 градусов, посмотрите на чертеж спереди. Сможете ли вы увидеть круг, вписанный в квадрат?

Вы увидите прямоугольник и круг, который касается верхнего и нижнего оснований прямоугольника.

Ответ: 30°.

9. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.



$AD = AL = 2$,
$BE = 1$.

В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник ABC. Кроме того, боковые грани MBA и MBC — прямоугольные треугольники, поскольку ребро MB перпендикулярно плоскости основания.

Сечение построить легко.

Точки D и L лежат в плоскости AMC, точки L и E — в плоскости AMB, точки D и E — в плоскости ABC. Соединяем попарно и получаем треугольник LDE.

Теперь найдем его стороны.

1) $\Delta AED \sim \Delta ABC$ по двум сторонам и углу между ними:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3},$$

угол A — общий.

Тогда $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{2}{3}$. Получим, что $DE = 2$.

2) ΔAMB — прямоугольный, $\angle B = 90°$.

Тогда угол AMB равен 30 градусам, так как $AB = \dfrac{1}{2}AM$ (катет, лежащий напротив угла в 30 градусов, равен половине гипотенузы). Значит, угол MAB равен 60 градусам.

В треугольнике ALE: угол $LAE = 60°$, $AL = AE$. Значит, треугольник ALE является равносторонним, поэтому $LE = 2$.

3) Сторону LD можно найти из ΔALD. В нем мы уже знаем две стороны. Для нахождения третьей не хватает угла A. Его можно найти из ΔAMC.

$\Delta AMB = \Delta CMB$ (треугольники прямоугольные с прямыми углами B, равны по двум катетам: MB — общий катет, $AB = BC$ по условию). Значит, $AM = MC = 6$.

Угол A можно найти по теореме косинусов.

$$MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2 \cdot AM \cdot AC \cdot \cos\angle MAC$$

$$\cancel{6^2} = \cancel{6^2} + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos\angle MAC,$$

$$3 = 2 \cdot 6 \cdot \cos\angle MAC,$$

$$\cos\angle MAC = \frac{1}{4}.$$

Из ΔALD найдем LD также по теореме косинусов.

$$LD^2 = AL^2 + AD^2 - 2 \cdot AL \cdot AD \cdot \cos(\angle LAD),$$

$$LD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4},$$

$$LD = \sqrt{6}.$$

Осталось найти площадь ΔELD. Можно найти высоту (треугольник равнобедренный) и воспользоваться формулой для площади треугольника через высоту, можно воспользоваться формулой Герона (так как известны все три стороны). А можно также заметить, что $\Delta LDE = \Delta CMB$ по трем сторонам, поэтому соответственные углы в них будут равны, и $\angle LED = \angle LAD$. Поэтому $\cos \angle LED = \cos \angle LAD = \frac{1}{4}$. По основному тригонометрическому тождеству: $\sin \angle LED = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$S_{\Delta LED} = \frac{1}{2} LE \cdot ED \cdot \sin \angle LED,$$

$$S_{\Delta LED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

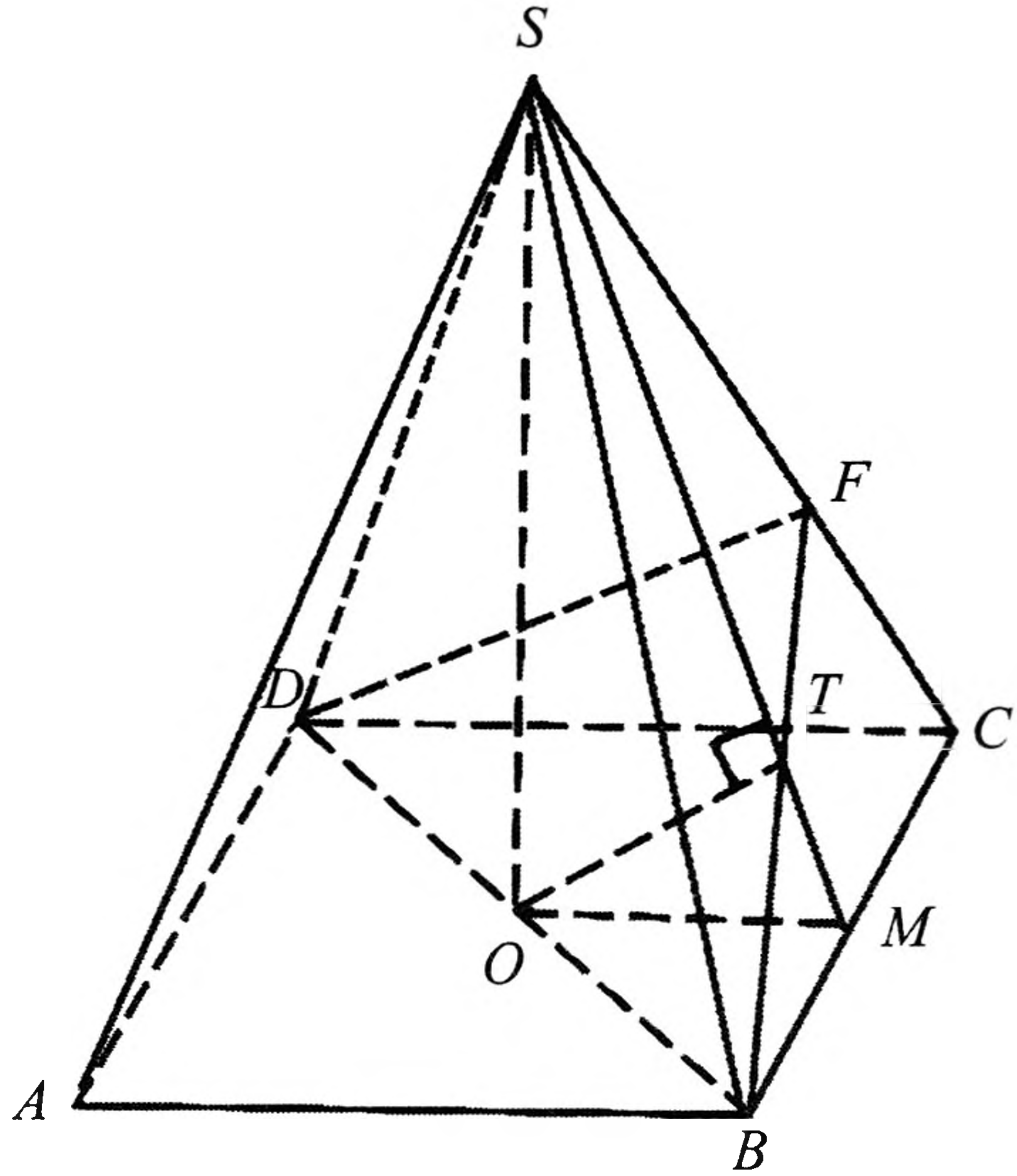
Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

10. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* плоскостью, проходящей через диагональ *BD* основания перпендикулярно плоскости *SBC*. Найдите площадь сечения, если каждое ребро пирамиды равно 1.

Вспомним признак перпендикулярности плоскостей.

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Заметим, что точки B и D принадлежат сечению, которое мы строим. Мы можем построить перпендикуляр к плоскости SBC, а затем через две пересекающиеся прямые — BD и этот перпендикуляр — провести нужную нам плоскость сечения.



1) Соединим точку O с точкой M — серединой BC. Легко доказать, что $OM \perp BC$.

2) Кроме того, $BC \perp SO$, поскольку BC лежит в плоскости основания пирамиды.

3) $SO \perp BC$, $OM \perp BC$, следовательно, $(SOM) \perp BC$.

Плоскость SBC содержит отрезок BC, перпендикулярный плоскости SOM. Значит, плоскости SBC и SOM перпендикулярны.

Проведем в плоскости SOM отрезок $OT \perp SM$.

Кроме того, $OT \perp BC$, так как $OT \in (SOM)$, $(SOM) \perp BC$.

Получим: $OT \perp (SBC)$.

4) Соединим точки B и T. $BT \cap SC = F$. Соединяем точки D и F получаем искомое сечение — треугольник FDB.

5) Найдем площадь сечения.

$DB = \sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной 1. Боковые грани пирамиды — равные друг другу правильные треугольники, отсюда $\Delta BCF = \Delta DCF$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $DF = FB$.

$$\left.\begin{aligned} OT \perp (SBC),\\ FB \in (SBC), \end{aligned}\right\} \Rightarrow OT \perp FB.$$

Рассмотрим ΔSOM:

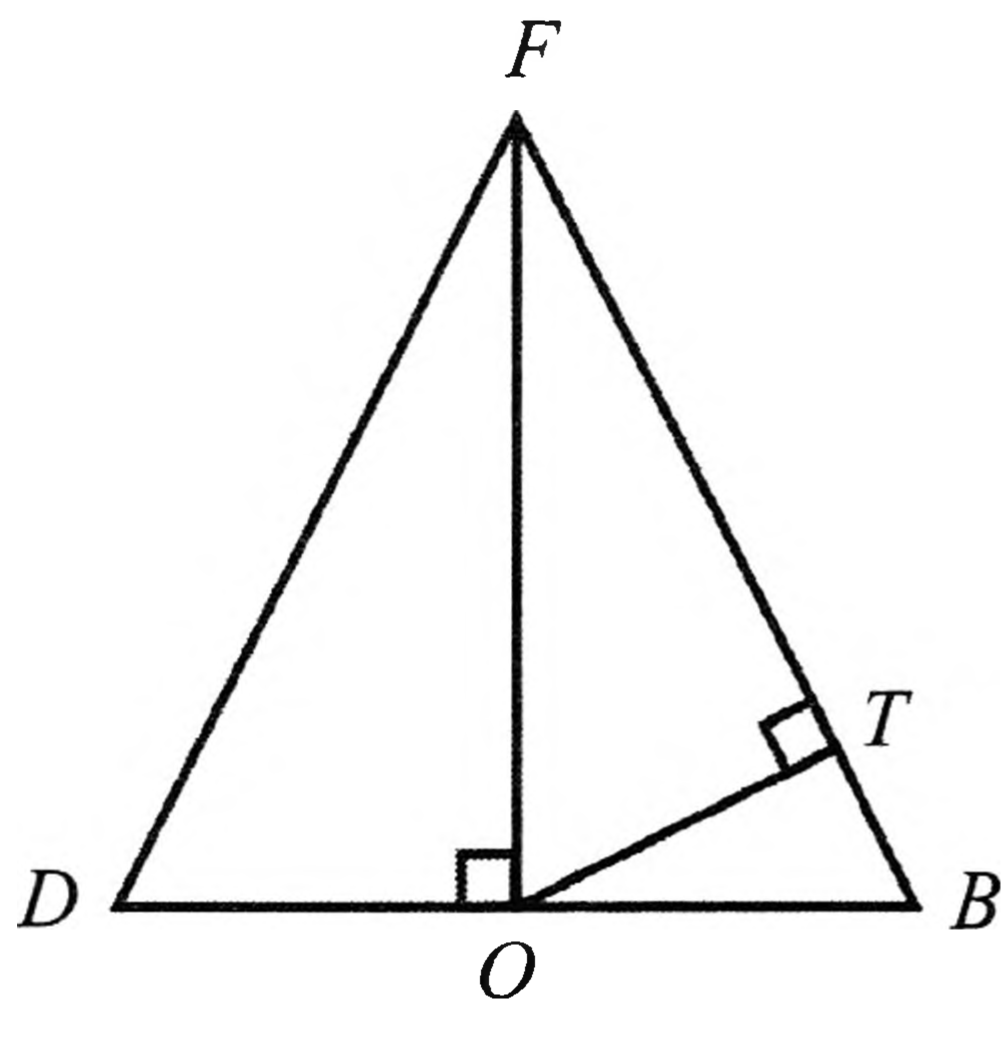
$OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$, $SO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, (из прямоугольного треугольника SAO),

$SM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (высота правильного треугольника SBC).

Площадь треугольника SOM равна $\dfrac{1}{2}SO \cdot OM = \dfrac{1}{2}OT \cdot SM$.

Отсюда $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = OT \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $OT = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.

Изобразим треугольник DFB на отдельном чертеже.



Из треугольника TOB:

$$\sin B = \frac{OT}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\cos B = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из треугольника FOB:

$$FO = OB \cdot \operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Итак, высота FO равнобедренного треугольника DFB равна $\frac{1}{2}$. Тогда его площадь

$$S_{\Delta DFB} = \frac{1}{2} FO \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Векторы в пространстве и метод координат

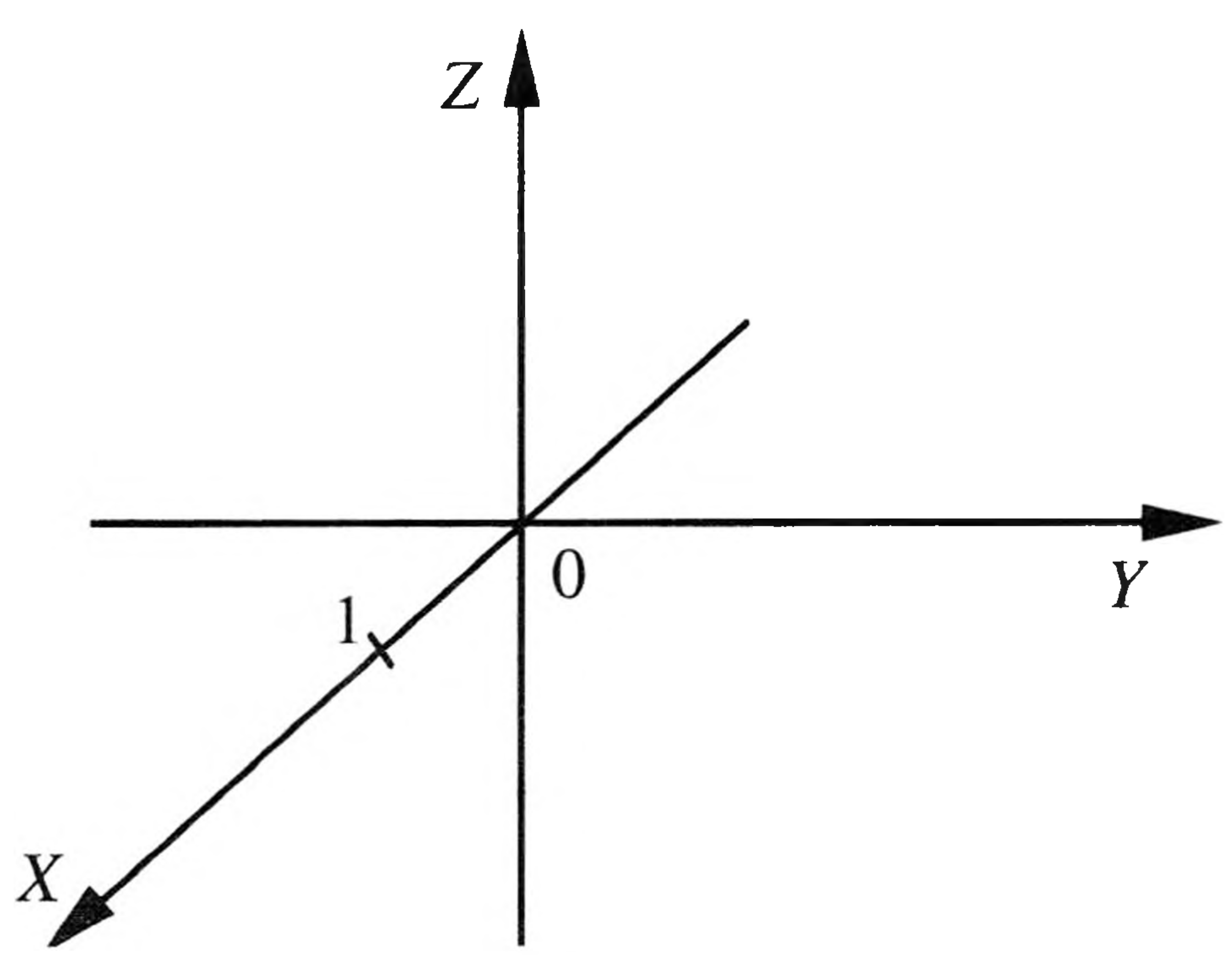
Существует два способа решения задач по стереометрии.

Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение. С этим способом мы уже знакомы.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить задачу по стереометрии очень хочется.

Система координат в пространстве

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X, Y и Z. Зададим удобный масштаб.

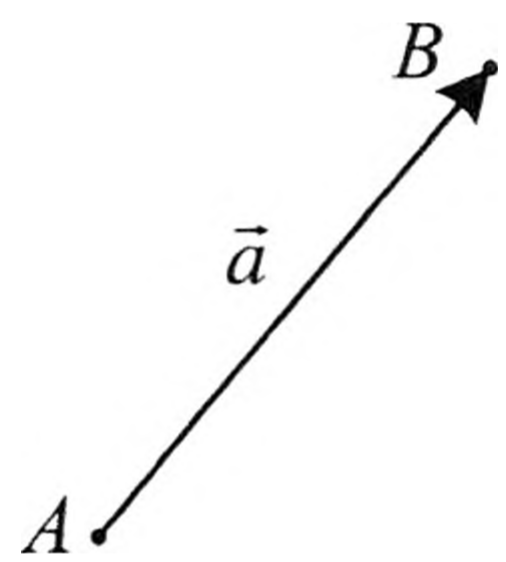


Получилась **система координат** в трехмерном пространстве. Теперь каждая его точка характеризуется тремя числами — координатами по X, Y и Z. Например, запись $M(-1; 3; 2)$ означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна -1, координата по Y (ордината) равна 3, а координата по Z (аппликата) равна 2.

Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x, y и z:

$$\vec{a}(x_0; y_0; z_0).$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

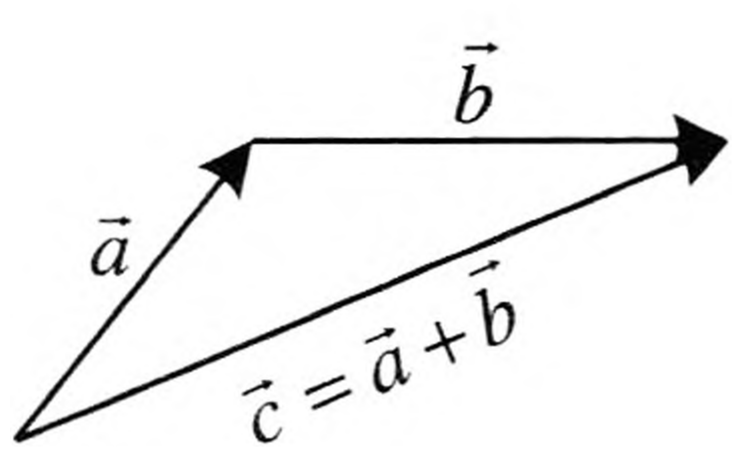
Длина вектора $\overline{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B. Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

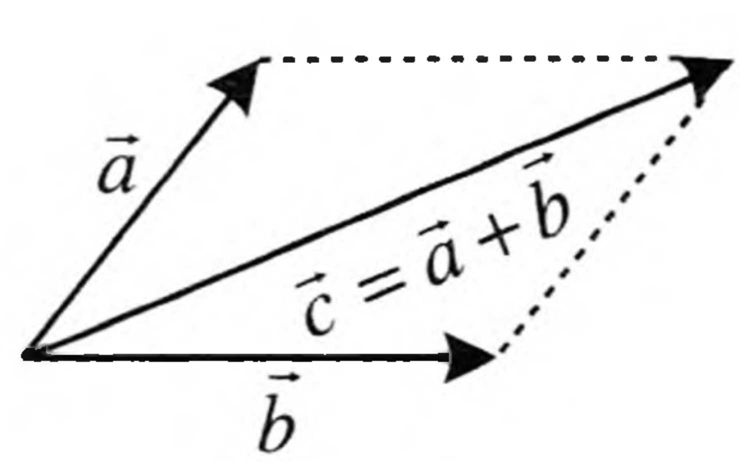
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Пусть точка M — середина отрезка AB. Ее координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ x_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ x_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Для сложения векторов применяем уже знакомые правило треугольника и правило параллелограмма.





Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три. Возьмем векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$.

Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(x_a+x_b; y_a+y_b; z_a+z_b)$.

Разность векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}(x_a-x_b; y_a-y_b; z_a-z_b)$.

Произведение вектора на число: $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{p}(\lambda\cdot x_a; \lambda\cdot y_a; \lambda\cdot z_a)$.

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве. Особенно если эти прямые — скрещиваются.

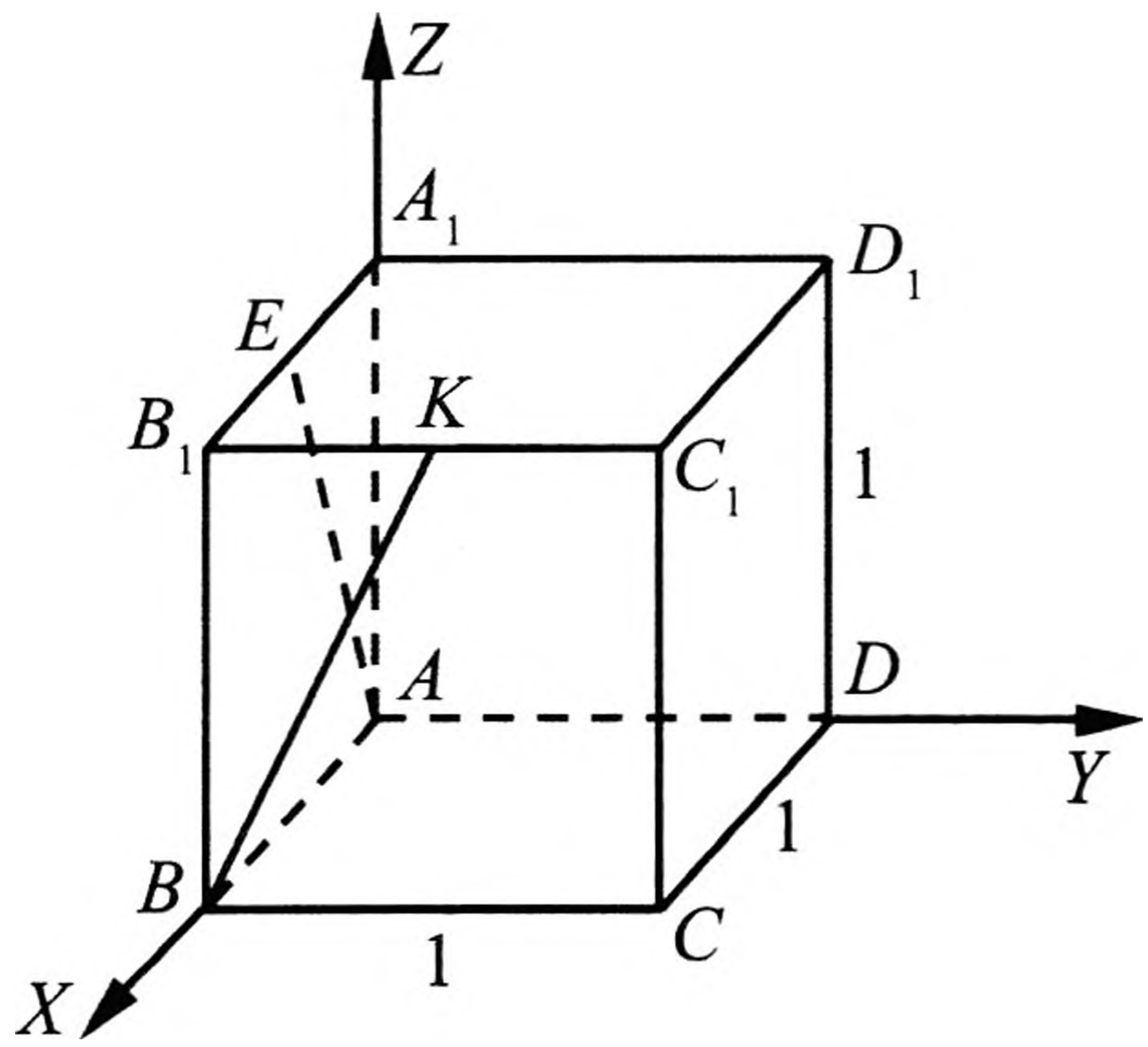
Формула для нахождения угла между прямыми:

$$\mathbf{\cos\varphi=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}.$$

Модуль в числителе стоит потому, что угол между прямыми может быть только острым или прямым, и косинус этого угла неотрицателен. Напомним, что в качестве угла между прямыми мы берем меньший из образованных ими углов.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Если в задаче в задаче по стереометрии вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж.



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$. Для этого нужны их координаты.

$$A(0;0;0);\ B(1;0;0);\ E\left(\frac{1}{2};0;0\right);\ K\left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Запишем координаты векторов:

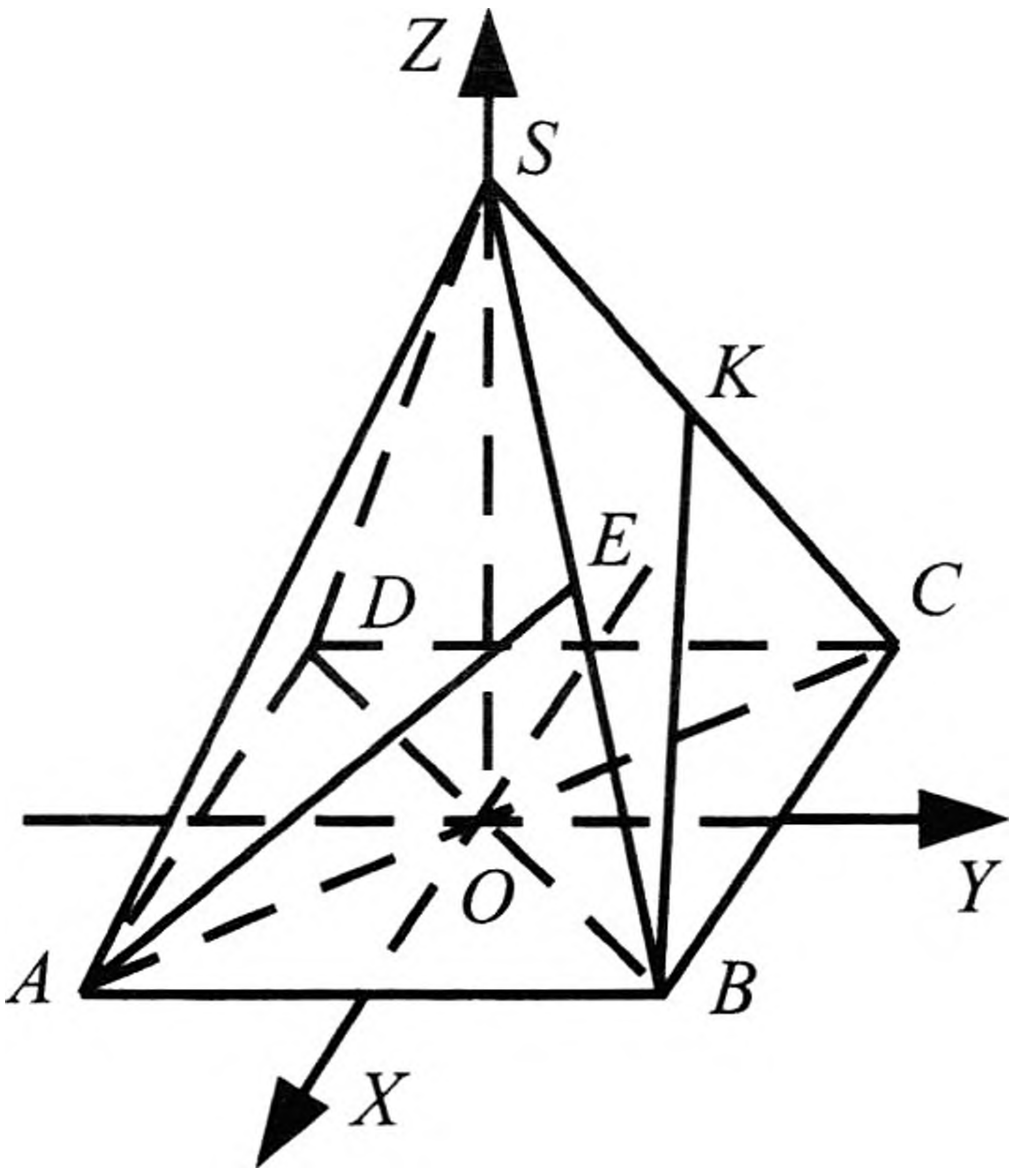
$$\overline{AE}\left(\frac{1}{2};0;1\right);\ \overline{BK}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

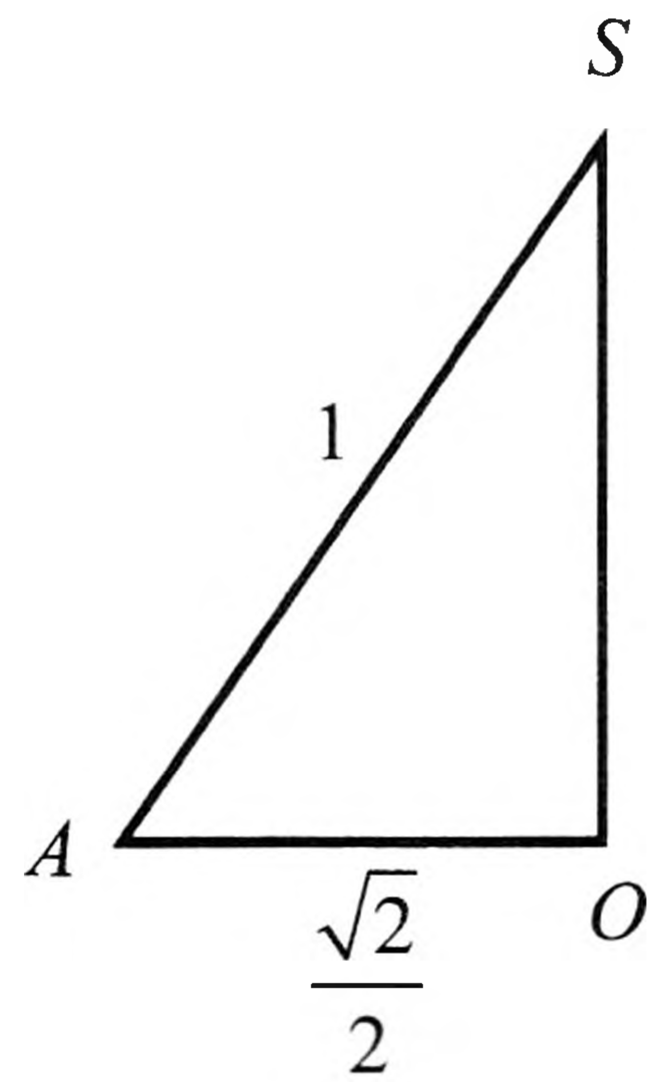
и найдем косинус угла между векторами $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{BK}}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{4}{5}.$$

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, K — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Лучше всего выбрать начало координат в центре основания пирамиды, а оси X и Y сделать параллельными сторонам основания.





Координаты точек A, B и C найти легко:

$$A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right);\ B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right);\ C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right).$$

Из прямоугольного треугольника AOS найдем $OS=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Координаты вершины пирамиды: $S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Точка E — середина SB, а K — середина SC. Воспользуемся формулой для координат середины отрезка и найдем координаты точек E и K.

$$E\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ K\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Найдем координаты векторов $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$:

$$\overline{AE}\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ \overline{BK}\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

и угол между ними:

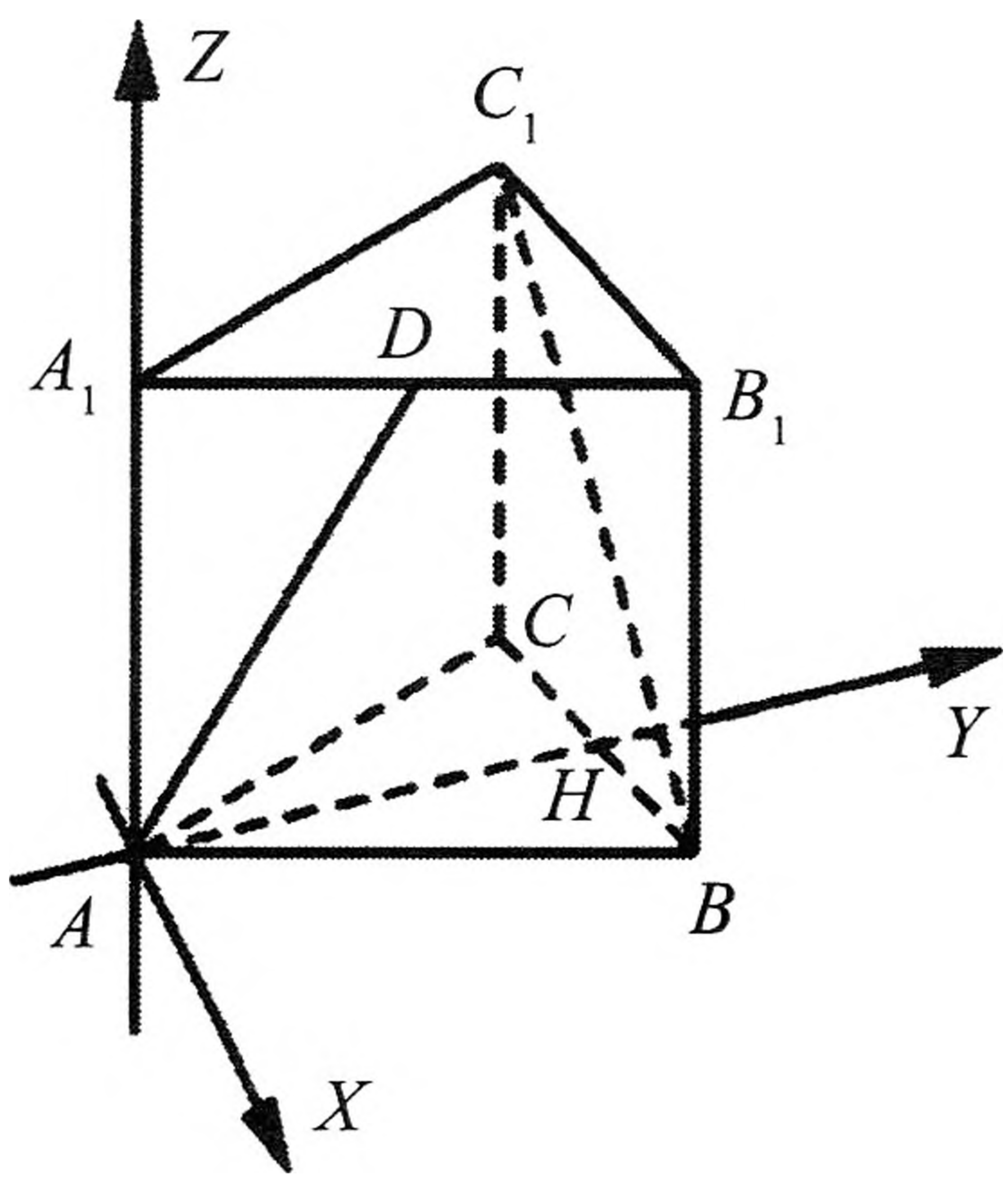
$$\cos\varphi=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{BK}}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|}=\frac{1}{6}.$$

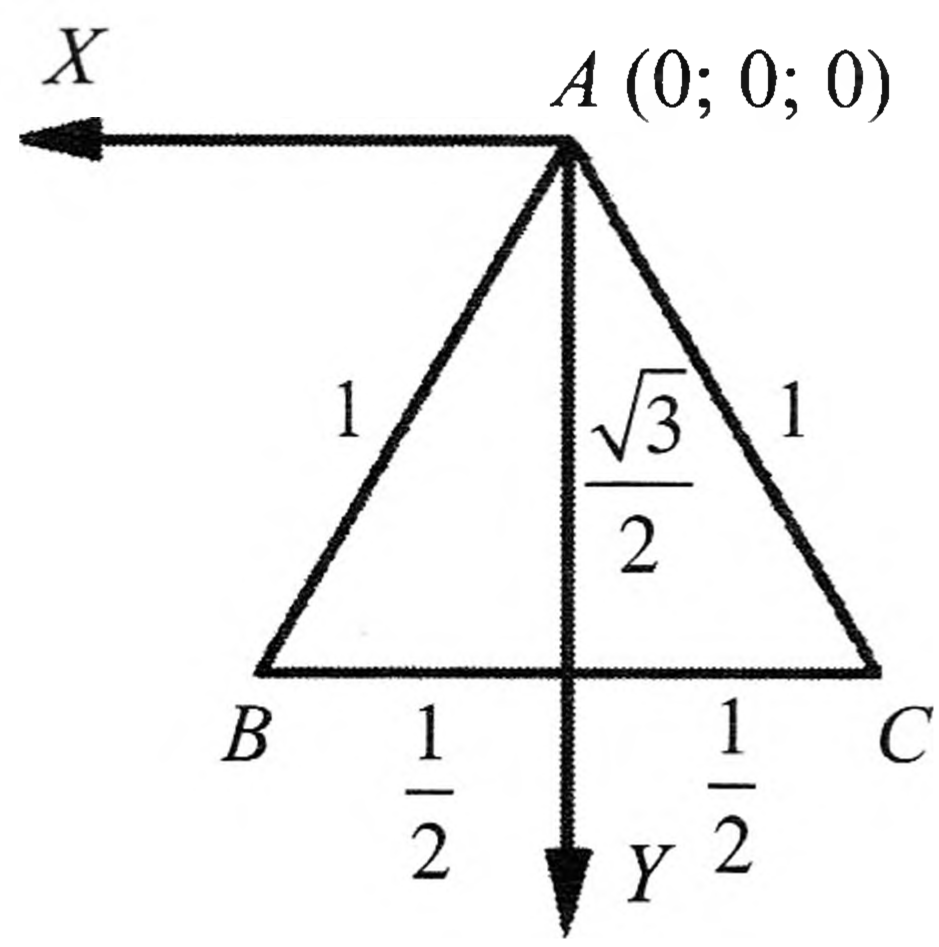
$$\varphi=\arccos\frac{1}{6}.$$

Покажем теперь, как вписать систему координат в треугольную призму.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

Пусть точка A — начало координат. Возьмем ось X параллельно стороне BC, а ось Y перпендикулярно ей. Другими словами, на оси Y будет лежать отрезок AH, являющийся высотой треугольника ABC. Нарисуем отдельно нижнее основание призмы.





Запишем координаты точек:

$$A(0;0;0);\ A_1(0;0;1);\ B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right);\ B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right);\ C_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right).$$

Точка D — середина A_1B_1. Значит, пользуемся формулами для координат середины отрезка.

$$D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right).$$

Найдем координаты векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC_1}$, а затем угол между ними:

$$\overline{AD}\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right);\ \overline{BC_1}\,(-1;0;1).$$

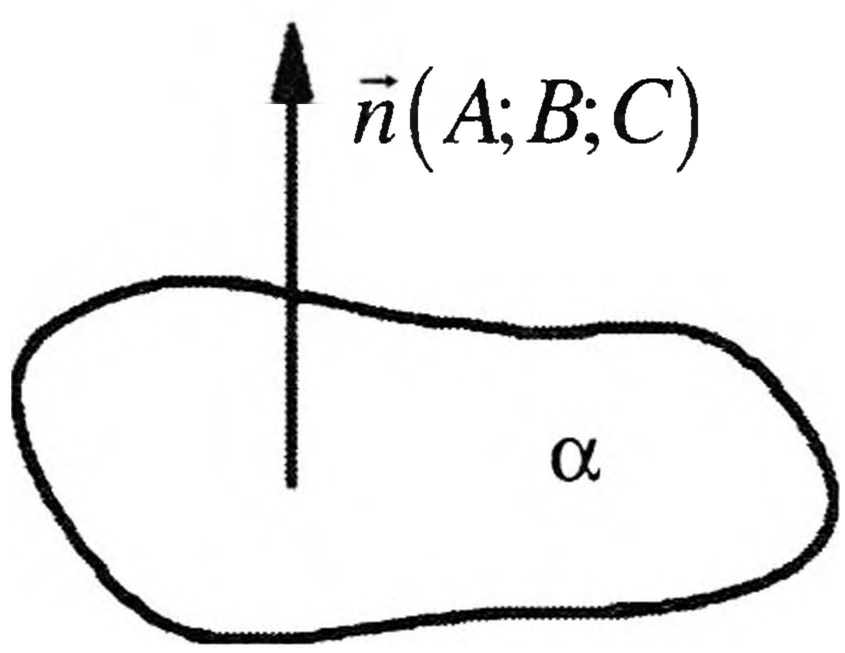
$$\cos\varphi=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC_1}}{\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{BC_1}\right|}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Смотрите, как легко с помощью векторов и координат найти угол между прямыми. А если требуется найти угол между плоскостями или между прямой и плоскостью? Для решения подобных задач нам понадобится уравнение плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве задается уравнением:

$$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0.}$$

Здесь числа A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости.



Его называют нормалью к плоскости.

Вместо x, y и z можно подставить в уравнение координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости. Получится верное равенство.

Плоскость в пространстве можно провести через любые три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для того, чтобы написать уравнение плоскости, берем координаты трех принадлежащих ей точек. Подставляем их по очереди в уравнение плоскости. Решаем полученную систему.

Покажем, как это делается.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;0;1)$, $N(2;-2;0)$ и $K(4;1;2)$.

Уравнение плоскости выглядит так:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставим в него по очереди координаты точек M, N и K.
Для точки M:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0.$$

То есть

$$A + C + D = 0.$$

Для точки N:

$$A \cdot 2 + B \cdot (-2) + C \cdot 0 + D = 0;$$
$$2A - 2B + D = 0.$$

Аналогично для точки K:

$$4A + B + 2C + D = 0.$$

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ 2A - 2B + D = 0, \\ 4A + B + 2C + D = 0. \end{cases}$$

В ней четыре неизвестных: A, B, C и D. Поэтому одну из них мы выберем сами, а другие выразим через нее. Правило простое — вместо одной из переменных можно взять любое число, не равное нулю.

Пусть, например, $D = -2$. Тогда:

$$\begin{cases} A + C - 2 = 0, \\ 2A - 2B - 2 = 0, \\ 4A + B + 2C - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A - B = 1, \\ 4A + B + 2C = 2. \end{cases}$$

Выразим C и B через A и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} C = 2 - A, \\ B = A - 1, \\ 4A + A - 1 + 4 - 2A = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$A = -\frac{1}{3};\ B = -\frac{4}{3};\ C = \frac{7}{3}.$$

Уравнение плоскости MNK имеет вид:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{7}{3}z - 2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на –3. Тогда коэффициенты станут целыми:

$$x + 4y - 7z + 6 = 0.$$

Вектор $\vec{n}(1;4;-7)$ — это нормаль к плоскости MNK.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

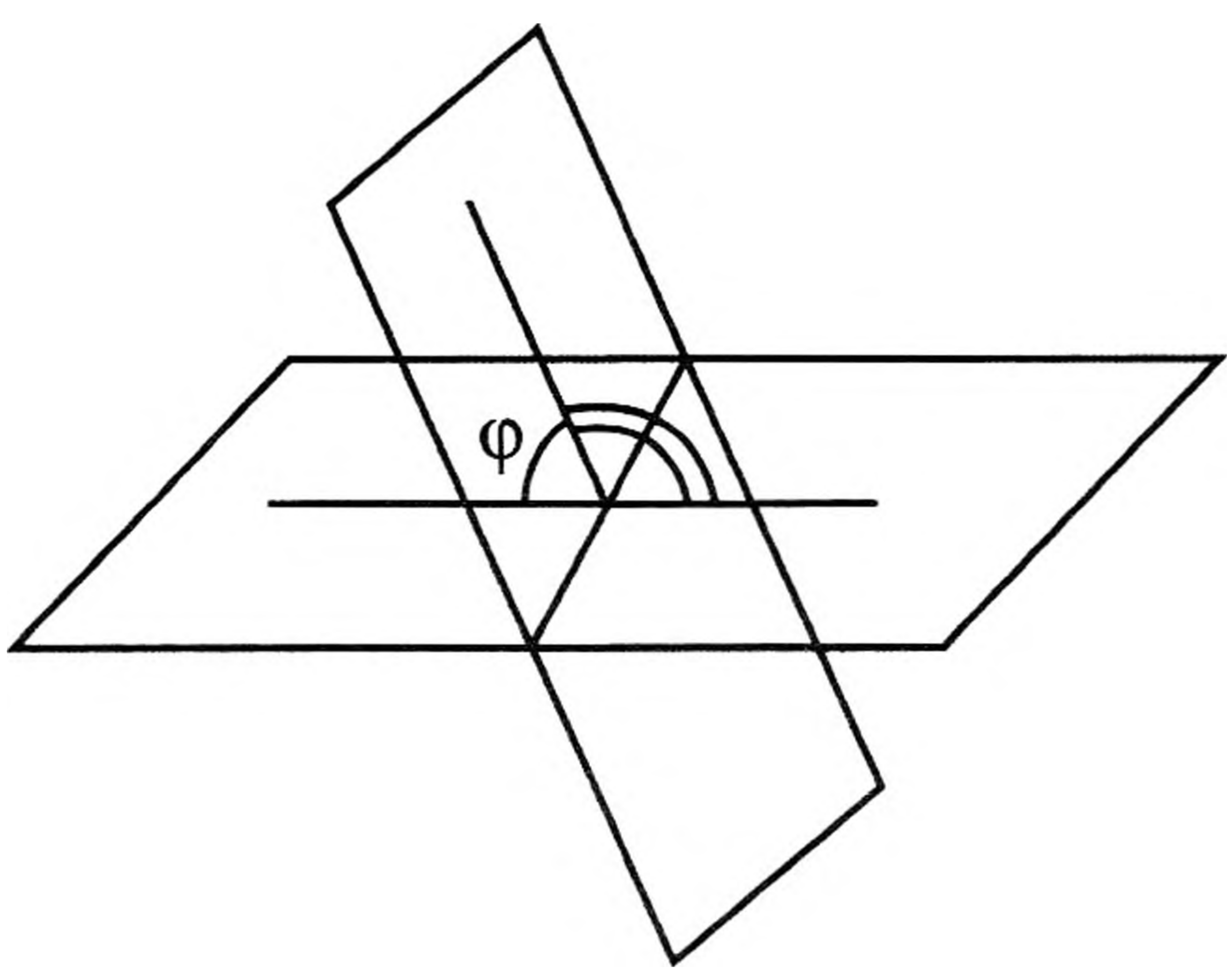
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Не правда ли, знакомая формула? Скалярное произведение нормалей поделили на произведение их длин.

Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла.

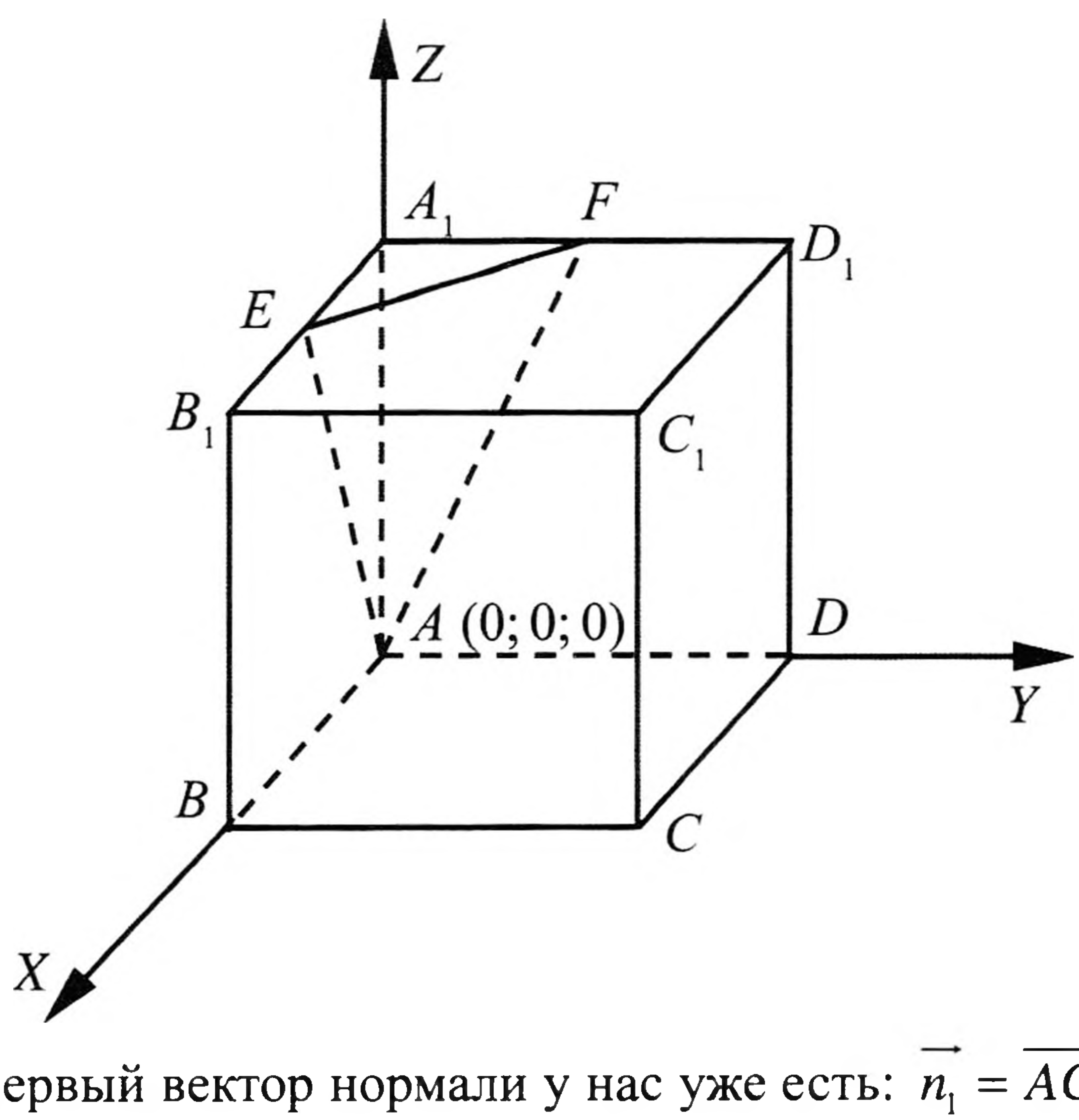


Мы берем меньший из них. Поэтому в формуле стоит модуль скалярного произведения — чтобы косинус угла был неотрицателен.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите угол между плоскостями AEF и BDD_1.

Строим чертеж. Видно, что плоскости AEF и BDD_1 пересекаются где-то вне куба. В классическом решении пришлось бы строить линию их пересечения. Но векторно-координатный метод значительно все упрощает. Не будем ломать голову над тем, по какой прямой пересекаются плоскости. Просто отметим координаты нужных нам точек и найдем угол между нормалями к плоскостям AEF и BDD_1.

Сначала — нормаль к плоскости BDD_1. Конечно, мы можем подставить координаты точек B, D и D_1 в уравнение плоскости и найти коэффициенты, которые и будут координатами вектора нормали. А можем сделать хитрее — увидеть нужную нормаль прямо на чертеже. Ведь плоскость BDD_1 — это диагональное сечение куба. Вектор $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярен этой плоскости.



Итак, первый вектор нормали у нас уже есть: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AC}(1;1;0)$.
Напишем уравнение плоскости AEF.

$$A(0;0;0);\ E\left(\frac{1}{2};0;1\right);\ F\left(0;\frac{1}{2};1\right).$$

Берем уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и по очереди подставляем в него, вместо x, y и z, соответствующие координаты точек A, E и F.

$$\begin{array}{c|l} A & 0\cdot A+0\cdot B+0\cdot C+D=0, \\ E & \frac{1}{2}\cdot A+0\cdot B+1\cdot C+D=0, \\ F & 0\cdot A+\frac{1}{2}\cdot B+1\cdot C+D=0. \end{array}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} D=0, \\ \frac{1}{2}A+C=0, \\ \frac{1}{2}B+C=0. \end{cases}$$

Пусть $C = -1$. Тогда $A = B = 2$.

Уравнение плоскости AEF:

$$2x + 2y - z = 0.$$

Нормаль к плоскости AEF: $\vec{n}(2;2;-1)$.

Найдем угол между плоскостями:

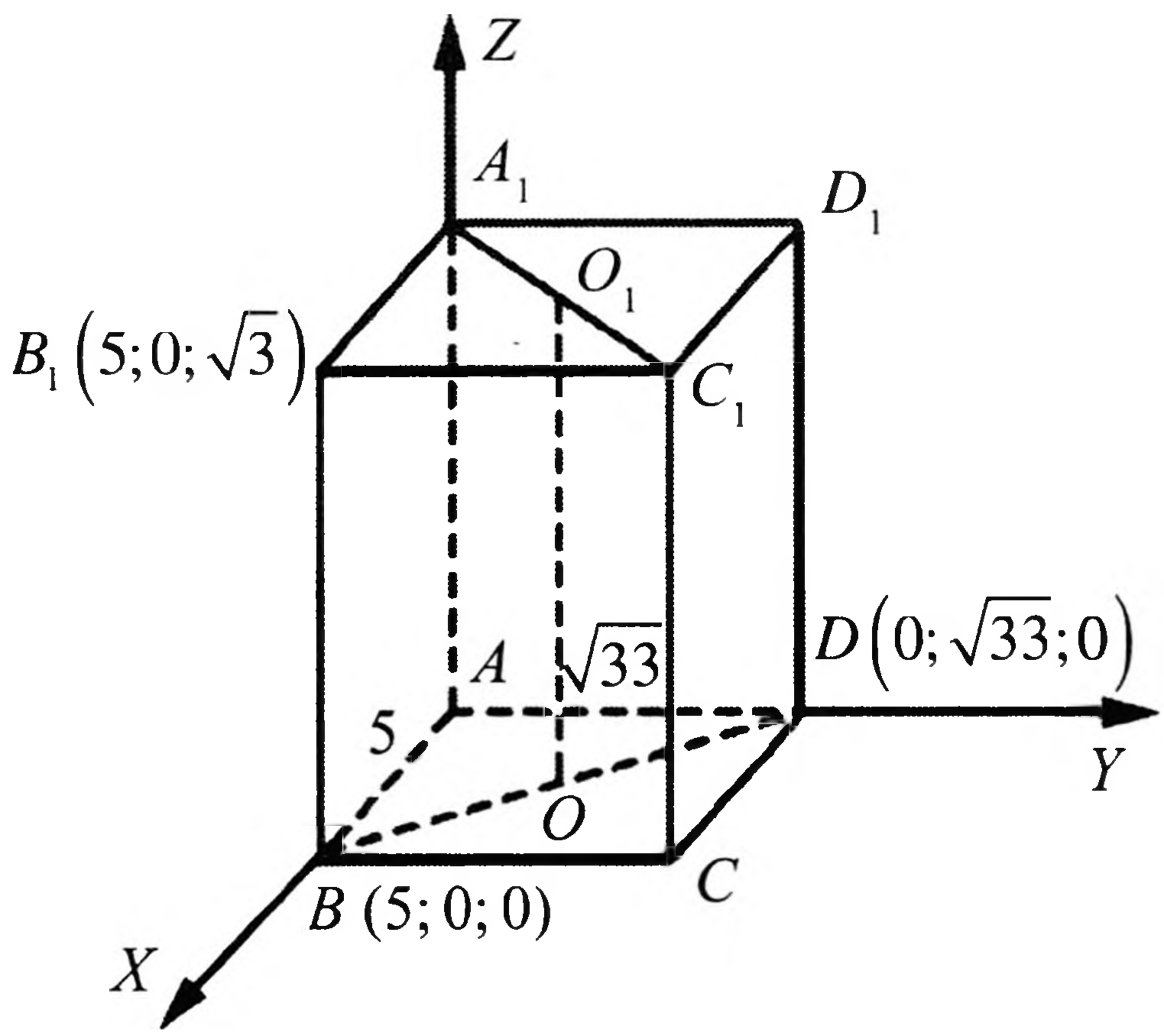
$$\cos\varphi = \frac{|2+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Эта задача наглядно показывает, насколько векторный метод проще классического. Попробуйте, для разнообразия, построить необходимые сечения и провести все доказательства — как это делается в «классике».

Строим чертеж. Прямую четырехугольную призму можно по-другому назвать «параллелепипед».



Замечаем, что длина и ширина параллелепипеда у нас есть, а высота — не дана. Как же ее найти?

«Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$». Прямые A_1C_1 и BD скрещиваются. Одна из них — диагональ верхнего основания, другая — диагональ нижнего. Вспомним, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Общий перпендикуляр к A_1C_1 и BD — это, очевидно, OO_1, где O — точка пересечения диагоналей нижнего основания, O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего. А отрезок OO_1 и равен высоте параллелепипеда.

Итак, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Плоскость AA_1D_1D — это задняя грань призмы на нашем чертеже. Нормаль к ней — это любой вектор, перпендикулярный задней грани, например, вектор $\overline{AB}(5;0;0)$ или, еще проще, вектор $\vec{n}(1;0;0)$.

Осталась еще «плоскость, проходящая через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D». Но позвольте, если плоскость перпендикулярна прямой B_1D — значит, B_1D и есть нормаль к этой плоскости! Координаты точек B_1 и D известны:

$$B_1\left(1;0;\sqrt{3}\right);\ D\left(0;\sqrt{33};0\right).$$

Координаты вектора $\overline{B_1D}$ — тоже:

$$\overline{B_1D}\left(-5;\sqrt{33};-\sqrt{3}\right)=\vec{n}_2.$$

Находим угол между плоскостями, равный углу между нормалями к ним:

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{25+33+3}}=\frac{5}{\sqrt{61}}.$$

Зная косинус угла, находим его тангенс по формуле

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

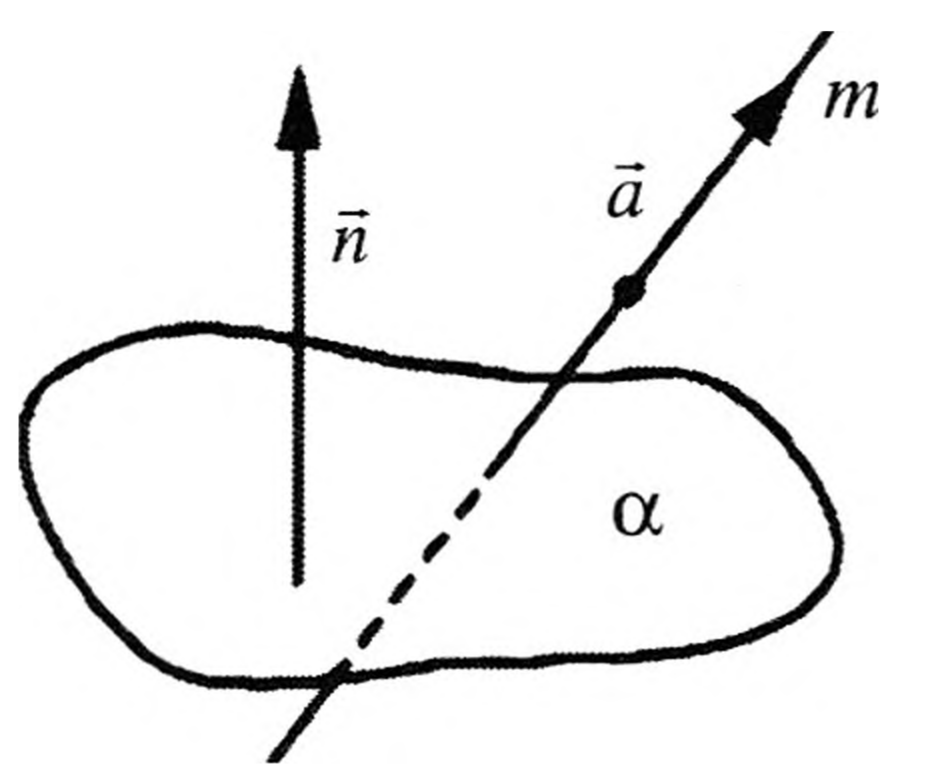
Получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Угол между прямой m и плоскостью α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов.

Пусть $\vec{a}$ — вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$ — нормаль к плоскости α. Вектор $\vec{a}$ еще называют направляющим вектором прямой m, а его координаты — направляющими коэффициентами.

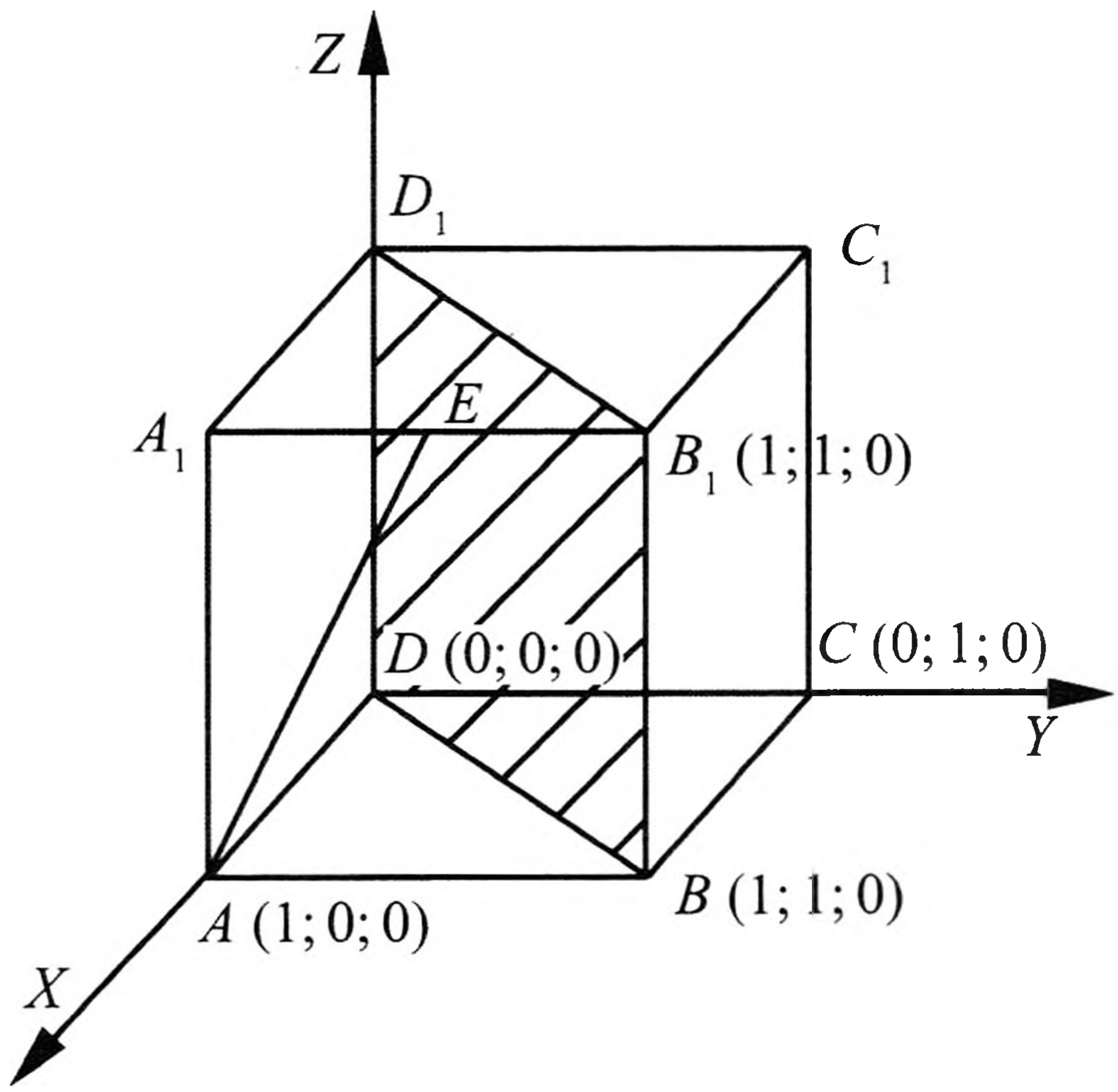


Синус угла между прямой m и плоскостью α можно найти по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}.$$

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Как всегда, рисуем чертеж и выбираем систему координат.



$$A(1;0;0);E\left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Находим координаты вектора $\overline{AE}\left(0;\frac{1}{2};1\right).$

Нужно ли нам уравнение плоскости BDD_1? В общем-то, без него можно обойтись. Ведь эта плоскость является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например, вектор $\overline{AC}$ (1; –1; 0).

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{AC}\cdot\overline{AE}\right|}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{AE}\right|}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

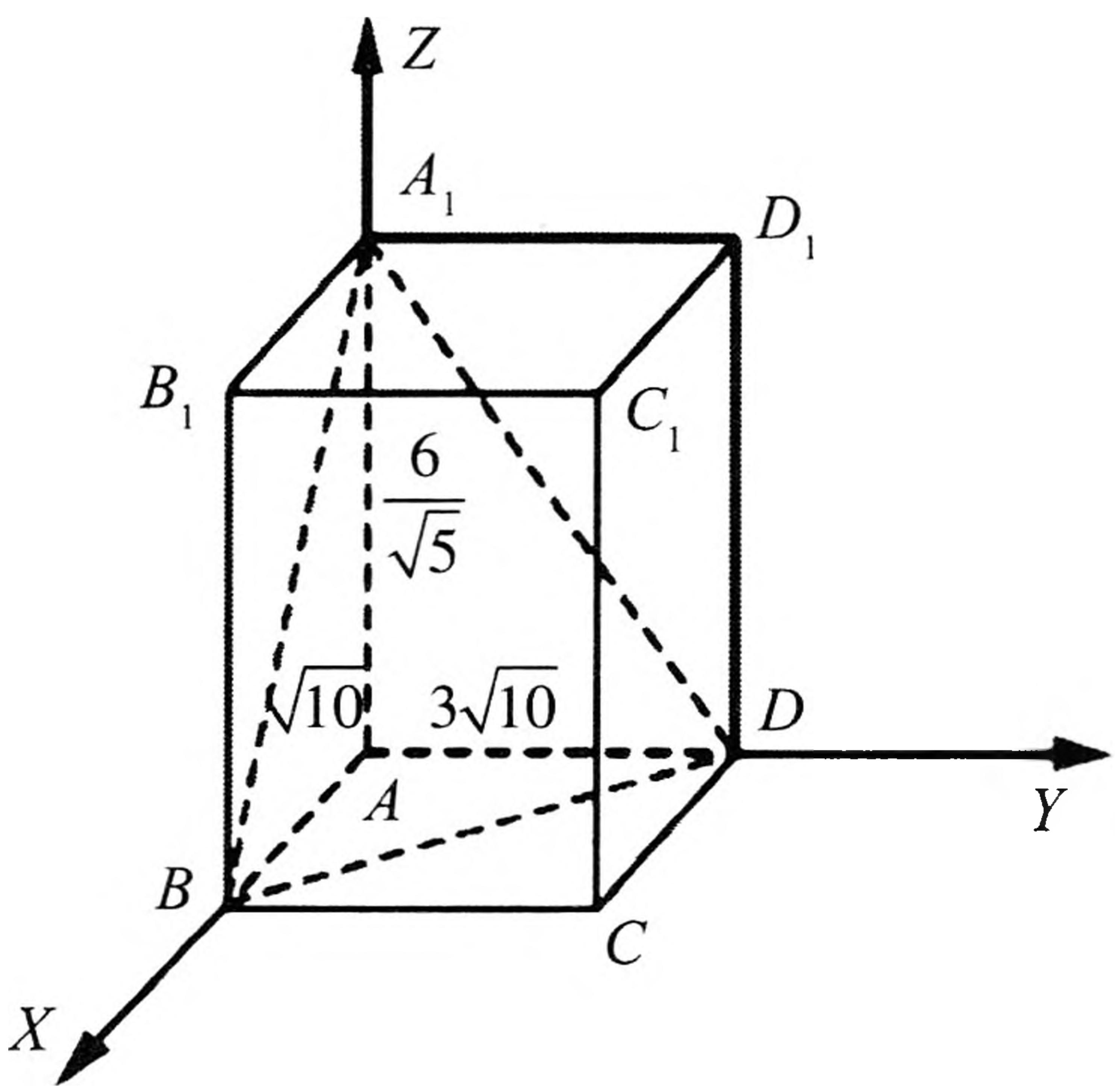
Расстояние от точки M с координатами x_0, y_0 и z_0 до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{10}, AD = 3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1DB.

Построим чертеж и выпишем координаты точек.



$$A(0;0;0);\ A_1\left(0;0;\frac{6}{\sqrt{5}}\right);\ B\left(\sqrt{10};0;0\right);\ D\left(0;3\sqrt{10};0\right).$$

Запишем уравнение плоскости A_1DB. Вы помните, как это делается, — по очереди подставляем координаты точек A_1, D и B в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{array}{l|l} A_1 & \dfrac{6}{\sqrt{5}}C + D = 0, \\ B & \sqrt{10}A + D = 0, \\ D & 3\sqrt{10}B + D = 0. \end{array}$$

Решим эту систему. Выберем

$$D = -6\sqrt{10}.$$

Тогда

$$C = 5\sqrt{2},\ A = 6,\ B = 2.$$

Уравнение плоскости A_1DB имеет вид:

$$6x + 2y + 5\sqrt{2}z - 6\sqrt{10} = 0.$$

Дальше все просто. Находим расстояние от точки A до плоскости A_1DB:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{50+36+4}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = 2.$$

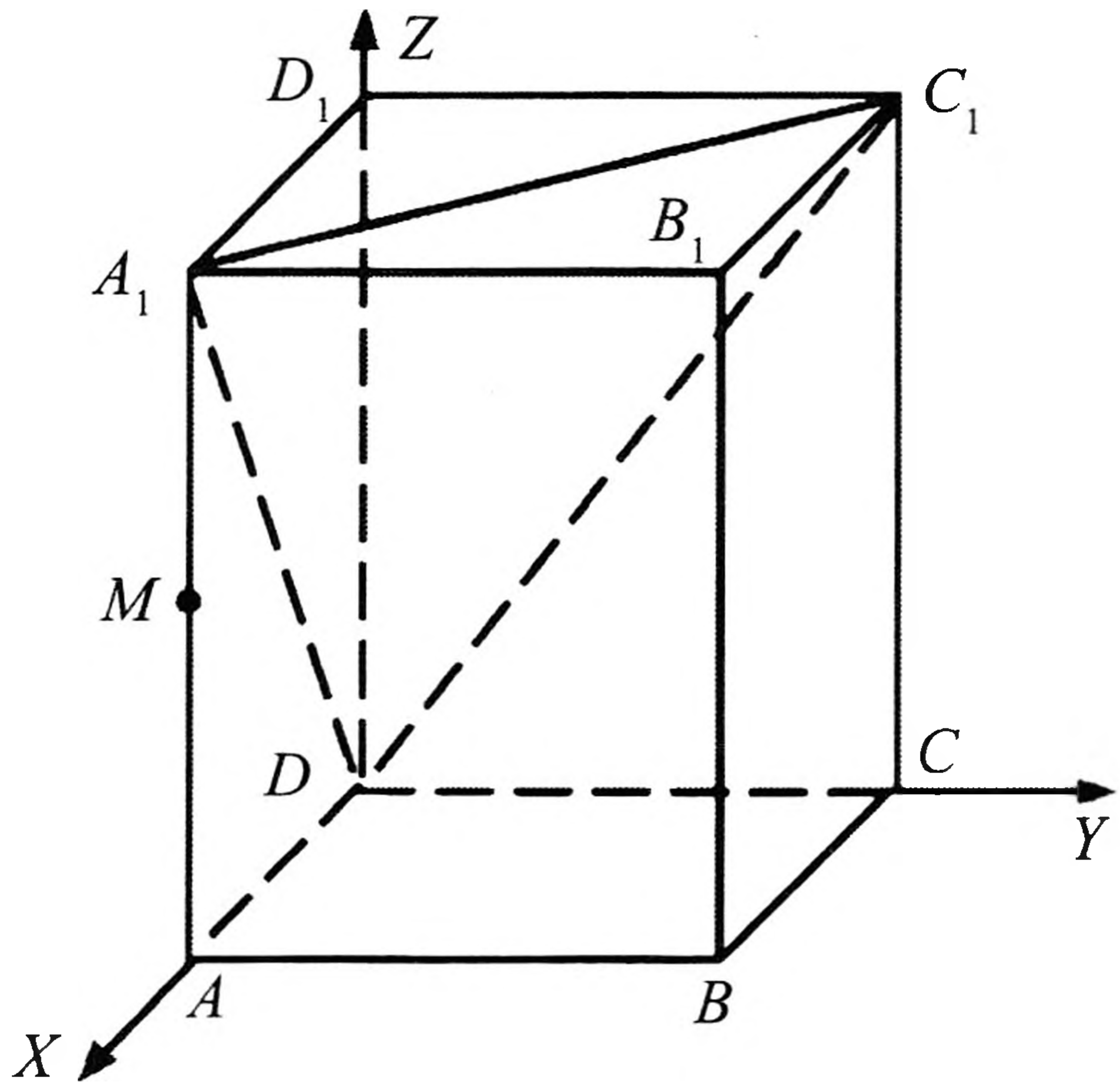
Ответ: 2.

В некоторых задачах требуется найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. В этом случае можно выбрать любую точку, принадлежащую данной прямой.

8. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота равна 1, а стороны основания равны $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

Введем систему координат с началом в точке D. Запишем координаты точек в этой системе координат.

$$D(0;0;0);\ A_1(\sqrt{2};0;1);\ C_1\left(0;\sqrt{2};1\right);\ M\left(\sqrt{2};0;\frac{1}{2}\right).$$



Составим уравнение плоскости A_1C_1D, зная общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставив в него координаты точки D, получим: $D = 0$

Подставив в него координаты точки A_1, получим: $A\sqrt{2} + C = 0.$

Подставив в него координаты точки C_1, получим: $B\sqrt{2} + C = 0.$

Подберем значения A, B и C. Можно заметить, что при $C = -\sqrt{2}$ $A = 1$ и $B = 1$.

Нормаль к плоскости будет иметь вид $\vec{n}\left(1;\ 1;\ -\sqrt{2}\right)$.

Подставим все данные в формулу для расстояния от точки до плоскости

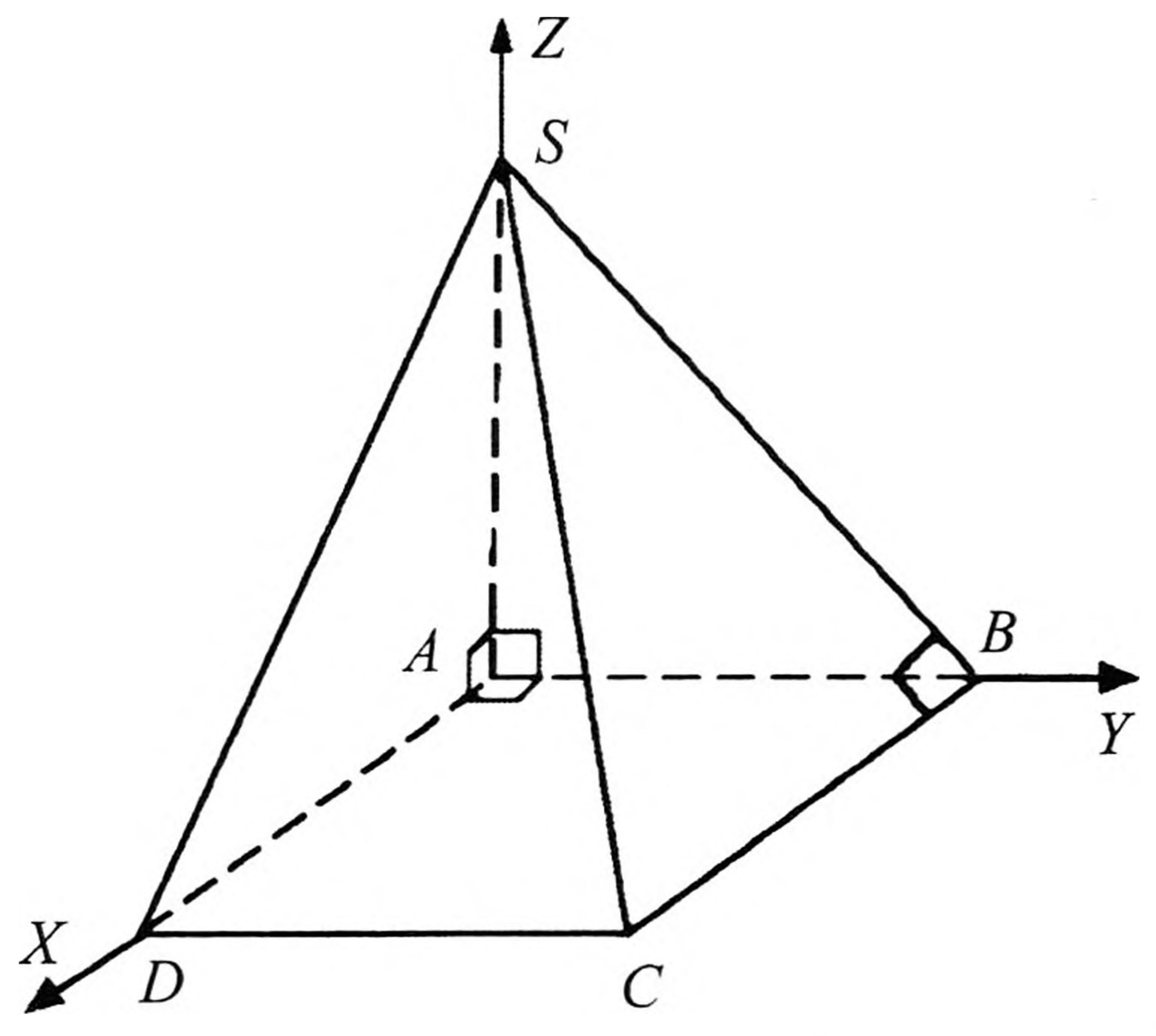
$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d = \frac{1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot 0 - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Сейчас задача по стереометрии в вариантах ЕГЭ состоит из двух пунктов, причем первый из них – на доказательство.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых ребер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SA=2\sqrt{3}$, $SA=\sqrt{11}$.
а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.



а) Заметим, что $SA^2+AB^2=SB^2$, так как $\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$.
Значит, по теореме Пифагора, угол SAB — прямой и $SA\perp AB$.

Аналогично, $SA^2+AD^2=SD^2$, так как $\left(\sqrt{7}\right)^2+2^2=\left(\sqrt{11}\right)^2$.

Значит, по теореме Пифагора, угол SAD — прямой и $SA\perp AD$.
Но $AD\in(ABC), AB\in(ABC), AD\cap AB=A$.
Значит, $SA\perp(ABC)$, SA — высота пирамиды $SABCD$.
б) Угол между прямой SC и плоскостью ASB легко найти как классическим, так и координатным методом.

Первый способ (классический)

$AB\perp BC$ (так как $ABCD$ — прямоугольник), $SA\perp AB$ (по доказанному), значит, по теореме о трех перпендикулярах $CB\perp SB$.

При этом $SB \in (SBC)$, $AB \in (SBC)$, $AB \cap SB = B$. Значит, $SB \perp (SAB)$, SB — проекция SC на плоскость. Угол CSB — искомый угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Из прямоугольного треугольника SCB (угол B — прямой):

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{BC}{SB},$$

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{2}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\angle CSB = 30°.$$

Второй способ (координатный)

Введем систему координат с началом в точке A. Запишем координаты точек в этой системе координат.

$$S\left(0,0,\sqrt{7}\right); C\left(2,\sqrt{5},0\right).$$

Плоскость SAB является координатной плоскостью YZ, поэтому коэффициенты $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, и нормаль к плоскости имеет вид $\vec{n}(1,0,0)$.

Координаты вектора $\overline{SC}\left(2,\sqrt{5},-\sqrt{7}\right)$, направляющие коэффициенты $m = 2$, $n = \sqrt{5}$, $p = -\sqrt{7}$.

Угол между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin\angle SCB = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\sin\angle SCB = \frac{\left|1\cdot 2 + 0\cdot\sqrt{5} + 0\cdot\left(-\sqrt{7}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}\cdot\sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 30°.