Неравенства на ЕГЭ по математике. Часть 2

Иррациональные неравенства

Продолжаем тему решения неравенств. Мы уже знаем, как решать квадратичные и дробно-рациональные неравенства. Умеем применять метод интервалов. Недавно познакомились с методами решения задач с модулем. Какие же еще темы традиционно вызывают сложности у школьников? — Конечно, это иррациональные неравенства!

В задачах ЕГЭ вы вряд ли увидите их в чистом виде. Скорее всего, они окажутся ключевым элементом более сложной задачи.

1. $\sqrt{x-1} < 3 - x.$

Вспомним определение и свойства арифметического квадратного корня, о которых много раз говорили в этой книге.

Арифметический квадратный корень из числа *a* — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$

$$\sqrt{a} \ge 0,\ a \ge 0.$$

Это означает, что выражение под корнем должно быть неотрицательно. Сам корень — тоже величина неотрицательная. Получается, что правая часть данного неравенства больше, чем неотрицательное выражение, и потому она положительна. Эти два условия задают область допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 3-x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 1, \\ x < 3. \end{cases}$

Хорошо, вернемся к самому неравенству. Когда-то мы уже говорили, что выражение «избавиться от корня» некорректно. Более правильно сказать — «возведем в квадрат обе части неравенства». Конечно, мы делаем это с учетом ОДЗ.

Обратите внимание на важное правило.

Возводить обе части неравенства в квадрат можно только в случае, если они неотрицательны.

У нас это правило выполняется. Возведем в квадрат обе части:

$$x-1<9-6x+x^2$$
$$x^2-7x+10>0$$

Вы уже знаете, как решать квадратное неравенство. Находим нули квадратичной функции, рисуем параболу, отмечаем промежутки, на которых данная квадратичная функция положительная.

$$\left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>5. \end{array}\right.$$

И с учетом ОДЗ получаем ответ: [1; 2).

2. $\sqrt{7+x}\ge 7-2x$.

Как вам кажется — похожа ли эта задача на предыдущую? Надо написать ОДЗ, возвести в квадрат обе части... Но подождите, мы только что сказали, что возводить в квадрат обе части неравенства можно только в случае, если они неотрицательны. А здесь выражение $7-2x$ может быть любым — ведь, в отличие от предыдущей задачи, никаких ограничений для него нет.

Получается, в этой задаче надо рассмотреть два случая.

Первый случай. Если выражение $7-2x$ неотрицательно, значит, обе части неравенства возводим в квадрат. Учитываем при этом, что выражение под корнем $7+x$ неотрицательно.

Получаем систему условий:

$$\begin{cases} 7+x\ge 0, \\ 7-2x\ge 0, \\ 7+x\ge 49-28x+4x^2. \end{cases}$$

Заметим, что первое неравенство в этой системе автоматически следует из третьего. В самом деле, $7+x$ не меньше, чем $(7-2x)^2$, и значит, оно точно неотрицательно.

Второй случай. Правая часть отрицательна, то есть $7 - 2x < 0$. Конечно же, в квадрат возводить нельзя. Но это и не нужно! В левой части неравенства — корень квадратный, величина неотрицательная. В правой — выражение $7 - 2x$, которое меньше нуля. Неравенство выполняется! В этом случае мы получаем:

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases}$$

Итак, исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 7 + x \geq 49 - 28x + 4x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем отдельно.

1-я система

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 7 + x \geq 49 - 28x + 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x \leq 3,5, \\ 4x^2 - 29x + 42 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x \leq 3,5, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq 5,25. \end{array}\right. \end{cases}$$

$x \in [2; 3,5]$

или

2-я система

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x > 3,5. \end{cases}$$

$x \in (3,5; +\infty)$

Объединим решения.

Ответ: [2; ∞).

3. Следующее неравенство. Задачи такого типа дают на первом, самом легком, пробном ЕГЭ, который официально проводят в сентябре.

$$\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0.$$

Внимательно смотрим на это неравенство. Выражение под корнем должно быть неотрицательно. Более того — оно должно быть положительно, поскольку, если оно равно нулю, мы получим ложное неравенство $0>0$.

В левой части неравенства — дробь, в правой ноль. Дробь положительна тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Числитель положителен — как квадратный корень из положительного числа. Тогда и знаменатель должен быть положителен! Получим:

$$\begin{cases}3+2x>0,\\ 2x^2-x-1>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>-1,5;\\ \left[\begin{array}{l}x<-0,5,\\ x>1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: $(-1,5:-0,5)\cup(1:+\infty)$.

Хотите еще иррациональных неравенств? Пожалуйста!

4. Решите неравенство $\dfrac{1}{6x^2-5x}\geq\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Сделаем замену переменной.

Пусть $t=\sqrt{6x^2-5x+1}$. Конечно же, $t\geq 0$.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{t^2-1}\geq\dfrac{1}{t-1},\\ t\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t}{t^2-1}\geq 0,\\ t\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq t<1.$$

Вернемся к переменной x и получим ответ.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{1};\dfrac{5}{6}\right)$.

Вот еще прекрасная задача.

5. Решите неравенство $\sqrt{5-x} < \dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Первым делом, конечно, хорошо бы записать ОДЗ. Все подкоренные выражения должны быть неотрицательны, а $x-1$ к тому же и не равно нулю.

$$5-x \geq 0,$$
$$x-1 > 0,$$
$$x^3-7x^2+14x-5 \geq 0.$$

Поскольку и левая и правая часть неотрицательны, возведем неравенство в квадрат и решим. Но что делать с неравенством $x^3-7x^2+14x-5 \geq 0$? Как разложить это выражение на множители? Ведь оно третьей степени. Даже если вы учитесь в матшколе и знакомы со схемой Горнера — попробуйте подобрать корни! Через полчаса или час вы поймете, что корни уравнения $x^3-7x^2+14x-5=0$ подобрать не удастся.

Так что же делать?

Давайте запишем первые шаги решения как цепочку равносильных преобразований:

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geq 0, \\ 5-x < \dfrac{x^3-7x^2+14x-5}{x-1}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geq 0, \\ (5-x)(x-1) < (x^3-7x^2+14x-5). \end{cases}$$

В последнем неравенстве мы домножили обе части на $x-1$, поскольку это выражение положительно.

Сейчас мы расскажем вам еще об одном полезном методе. Это метод пристального взгляда. Если ничего не помогает, а задачу решить надо, смотрим на нее, анализируем, что мы видим, и перебираем всевозможные «отмычки». Или изобретаем новую.

Рассмотрим последнее неравенство системы. Из условий $5 - x \geq 0$ и $x - 1 > 0$ следует, что их произведение неотрицательно. Тогда выражение $x^3 - 7x^2 + 14x - 5$ оказывается больше, чем неотрицательное число, а это значит, что

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 5 > 0.$$

Отлично! Мы обошли самое сложное неравенство системы, доказав, что при выполнении остальных условий оно автоматически окажется верным.

Итак,

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)\cdot(x-4) > 0, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ 4 < x \leq 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (4; 5]$.

Показательные и логарифмические неравенства

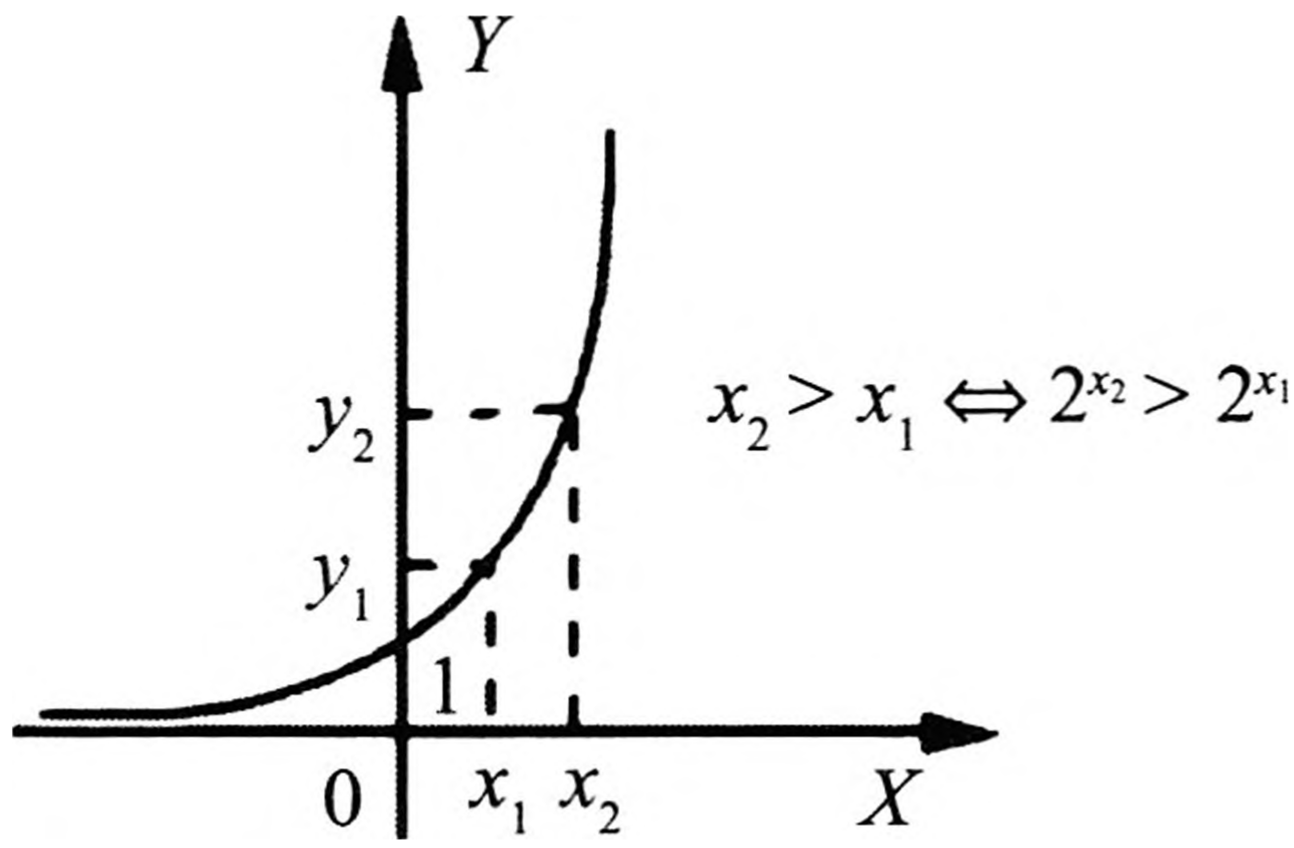
Знакомство с этой темой мы начнем с самых простых неравенств. Расскажем, что на самом деле стоит за выражением «отбросим логарифмы» и зачем нужна область допустимых значений.

1. $2^x > 8$.

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, представим правую часть в виде степени числа 2:

$$2^x > 2^3.$$

Когда мы спрашиваем школьников, что делать дальше, они обычно отвечают: «отбросим основания!» Мы не против такой формулировки, просто надо четко представлять себе, почему мы так делаем. А для этого — вспомним, как выглядит график показательной функции $y = 2^x$.



Видим, что эта функция монотонно возрастает, то есть большему значению x отвечает большее значение y. И наоборот, если $2^{x_2} > 2^{x_1}$, то $x_2 > x_1$.

Итак, от неравенства $2^x > 2^3$ можно перейти к алгебраическому неравенству $x > 3$.

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

2. Следующее неравенство: $2^x > 7$.

Так же, как и в предыдущем примере, представим правую часть в виде значения показательной функции. Как это сделать? С помощью логарифма, конечно:

$$7 = 2^{\log_2 7}.$$

Получаем:

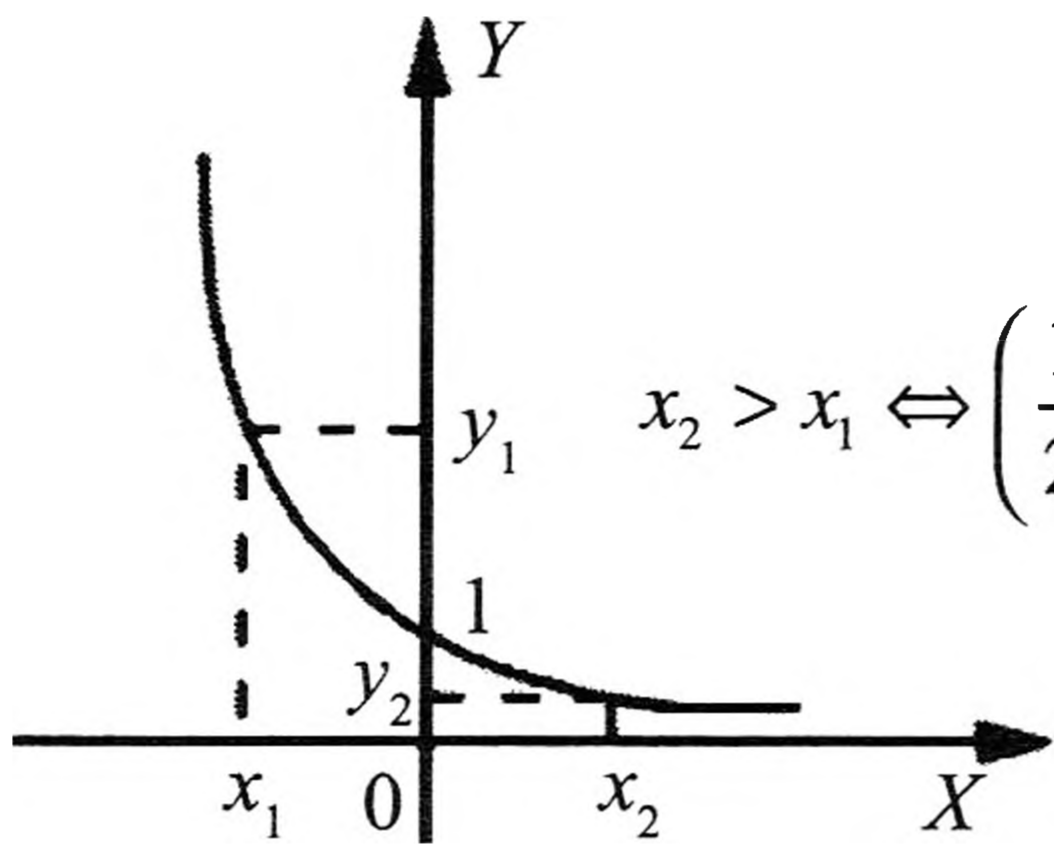
$$2^x > 2^{\log_2 7};$$
$$x > \log_2 7.$$

3. Еще одно неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$.

Здесь правую часть удобно представить как $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Вспомним, как выглядит график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$$

Эта функция монотонно убывает (так как основание степени меньше единицы), поэтому большее значение функции соответствует меньшему значению аргумента. То есть из неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$ следует, что $x < 4$. Знак неравенства меняется!

Похожая ситуация возникает и при решении логарифмических неравенств.

4. Рассмотрим неравенство $\log_3 x > \log_3 5$.

Поскольку логарифмы определены только для положительных чисел, необходимо, чтобы x был положительным. Условие $x > 0$ называется областью допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства. Только при таких x неравенство имеет смысл.

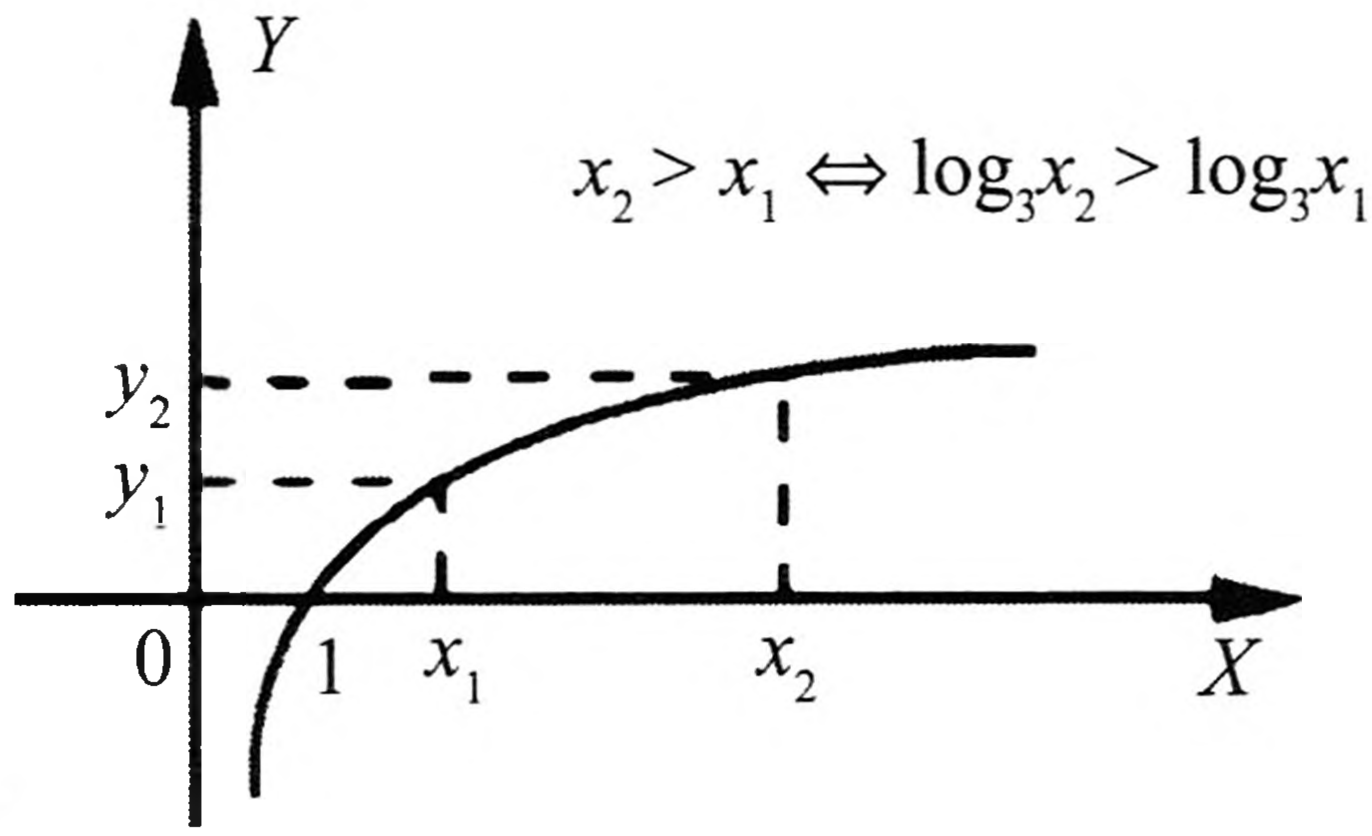
Что делать дальше? Стандартный ответ, который дают школьники, — «Отбросить логарифмы!»

Что ж, эта формулировка лихо звучит и легко запоминается. Но почему мы все-таки можем это сделать?

Мы люди, мы обладаем интеллектом. Наш разум устроен так, что все логичное, понятное, имеющее внутреннюю структуру запоминается и применяется намного лучше, чем случайные и не связанные между собой факты. Вот почему важно не механически вызубрить правила, как дрессированная собака-математик, а действовать осознанно.

Так почему же мы все-таки «отбрасываем логарифмы»?

Ответ простой: если основание больше единицы (как в нашем случае), логарифмическая функция монотонно возрастает, значит, большему значению x соответствует большее значение y и из неравенства $\log_3 x_2 > \log_3 x_1$ следует, что $x_2 > x_1$.



Обратите внимание, мы перешли к алгебраическому неравенству, и знак неравенства при этом — сохраняется.

Ответ: $x > 5$.

Следующее логарифмическое неравенство тоже простое.

5. $\log_5 (15 + 3x) > \log_5 2x$.

Начнем с области допустимых значений. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому

$$\begin{cases} 15+3x>0; \\ 2x>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 0$.

Теперь от логарифмического неравенства перейдем к алгебраическому — «отбросим» логарифмы. Поскольку основание логарифма больше единицы, знак неравенства при этом сохраняется.

$$15 + 3x > 2x.$$

Получаем: $x > -15$.

Итак,

$$\begin{cases} x>0; \\ x>-15. \end{cases}$$

Ответ: $x > 0$.

А что же будет, если основание логарифма меньше единицы? Легко догадаться, что в этом случае при переходе к алгебраическому неравенству знак неравенства будет меняться.

Приведем пример.

6. $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$.

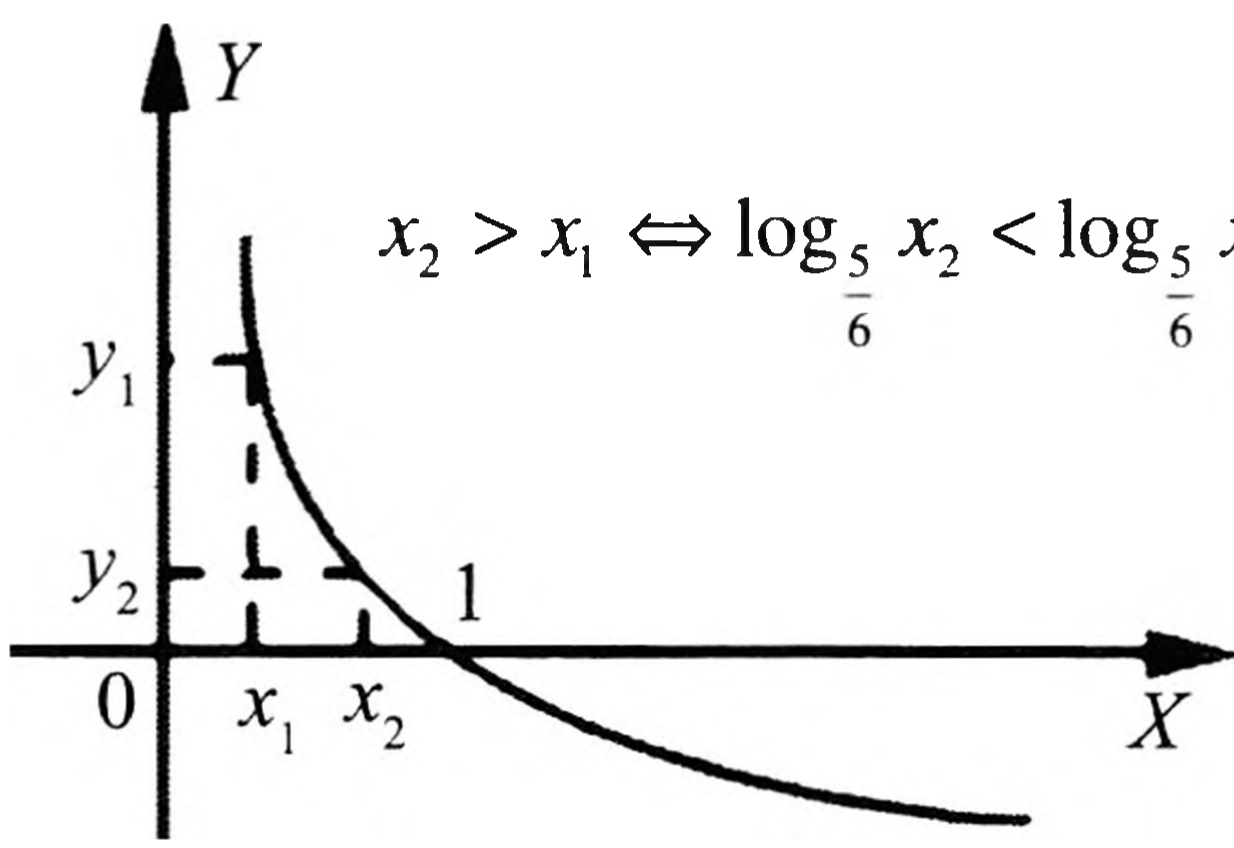
Запишем ОДЗ. Выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны, то есть

$$\begin{cases} 2x-9>0; \\ x>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 4{,}5$.

Поскольку $\frac{5}{6}<1$, логарифмическая функция с основанием $\frac{5}{6}$ монотонно убывает.

А это значит, что большему значению функции отвечает меньшее значение аргумента.



И если $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$, то

$$2x-9 \leq x.$$

Получим, что $x \leq 9$.

Учитывая, что $x > 4{,}5$, запишем ответ: $x \in (4{,}5;\, 9]$.

В следующей задаче показательное неравенство сводится к квадратному. Так что тему «Квадратные неравенства» рекомендуем повторить.

7. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Заметим, что $4^x = 2^{2x}$, $10^x = 5^x \cdot 2^x$, и запишем неравенство в виде:

$$2^{2x} - 5^x \cdot 2^x - 2 \cdot 5^{2x} > 0.$$

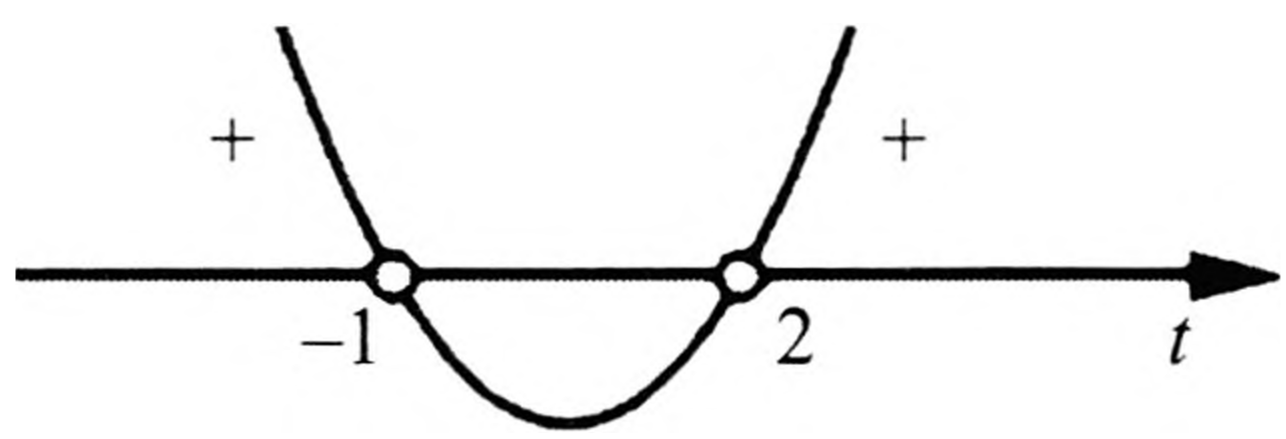
Разделим обе части на положительную величину 5^{2x} и обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$.

Получим квадратное неравенство:

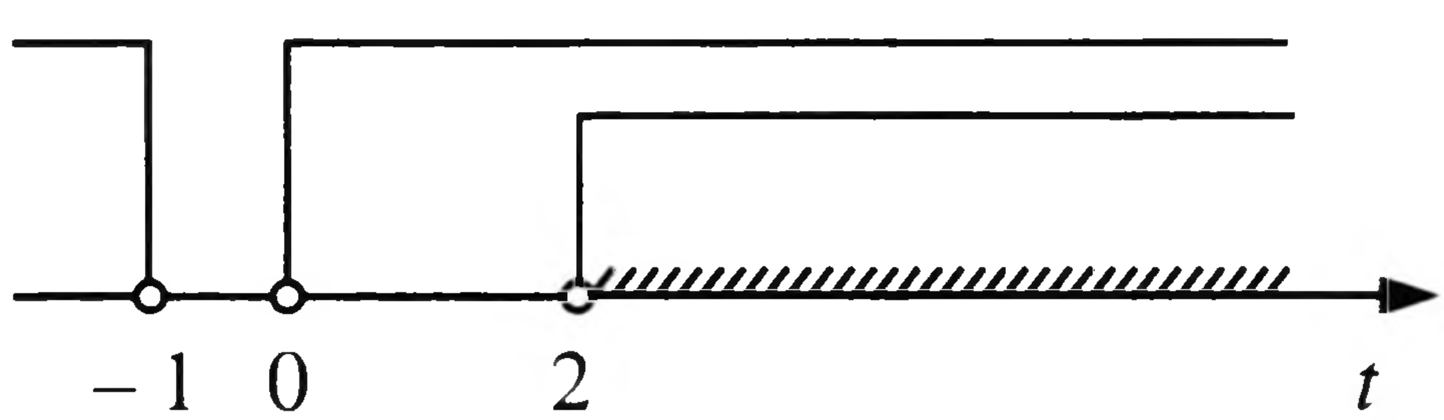
$$t^2 - t - 2 > 0.$$

Кроме того, $t > 0$.

Графиком функции $y = t^2 - t - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, получим $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. В этих точках наша парабола пересекает ось t.



Отметим на числовой прямой промежутки, являющиеся решениями неравенств $t^2 - t - 2 > 0$ и $t > 0$.



Видим, что обоим неравенствам удовлетворяют значения $t > 2$.

Но решение еще не закончено! Нам нужно вернуться к переменной x. Вспомним, что

$$t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

и получим: $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$.

Представим 2 в виде степени с основанием $\frac{2}{5}$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}.$$

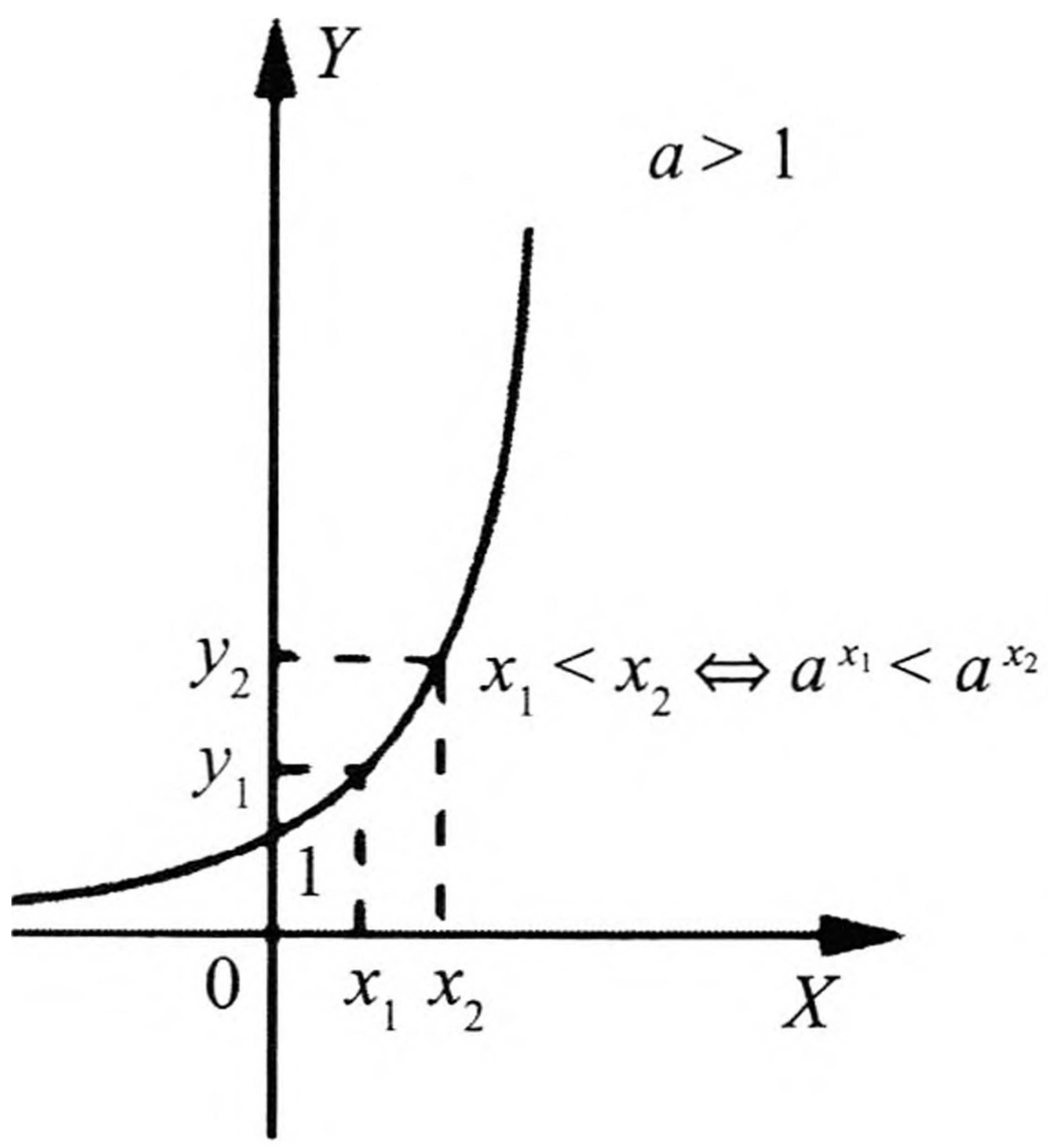
Получим:

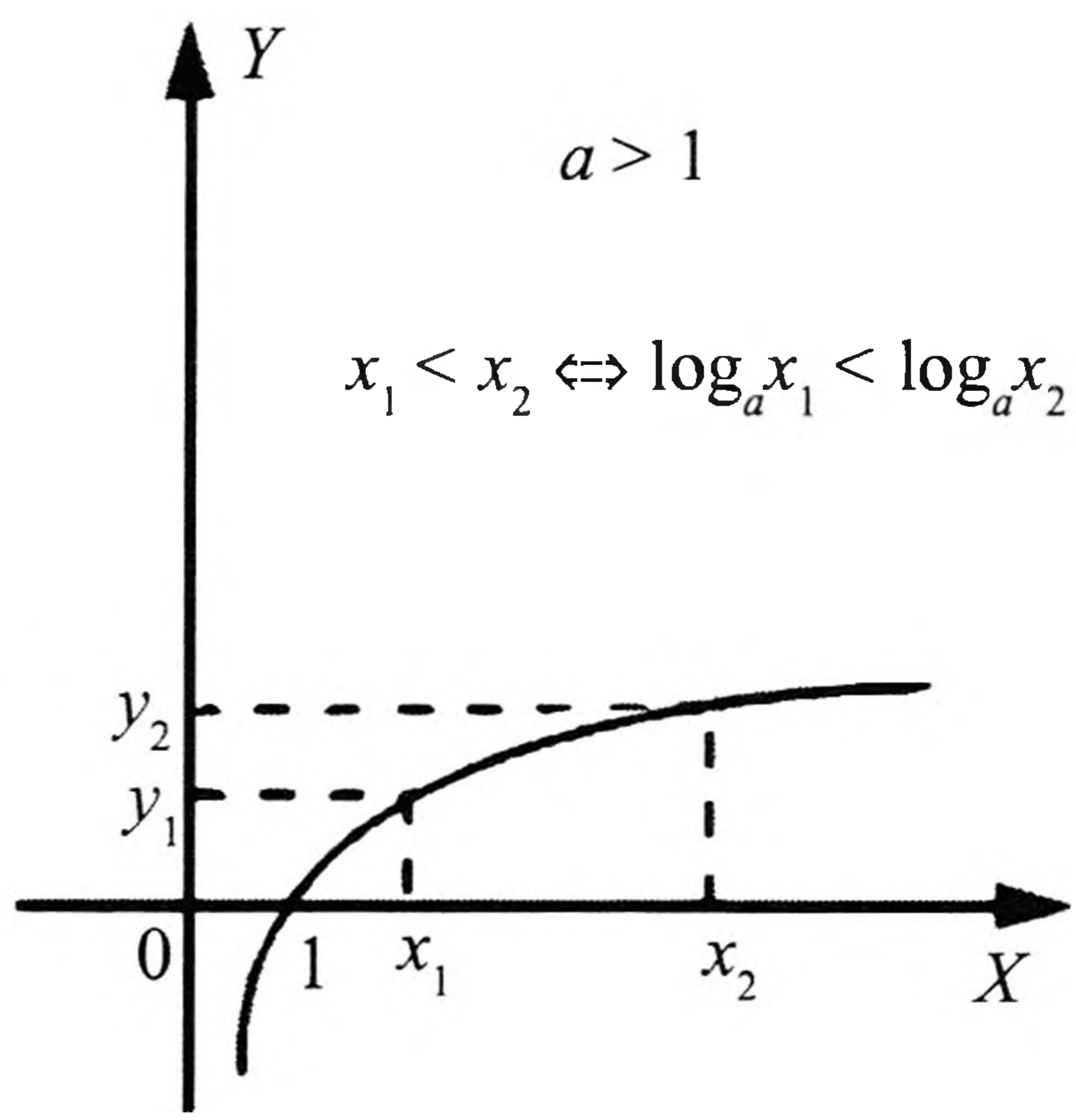
$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

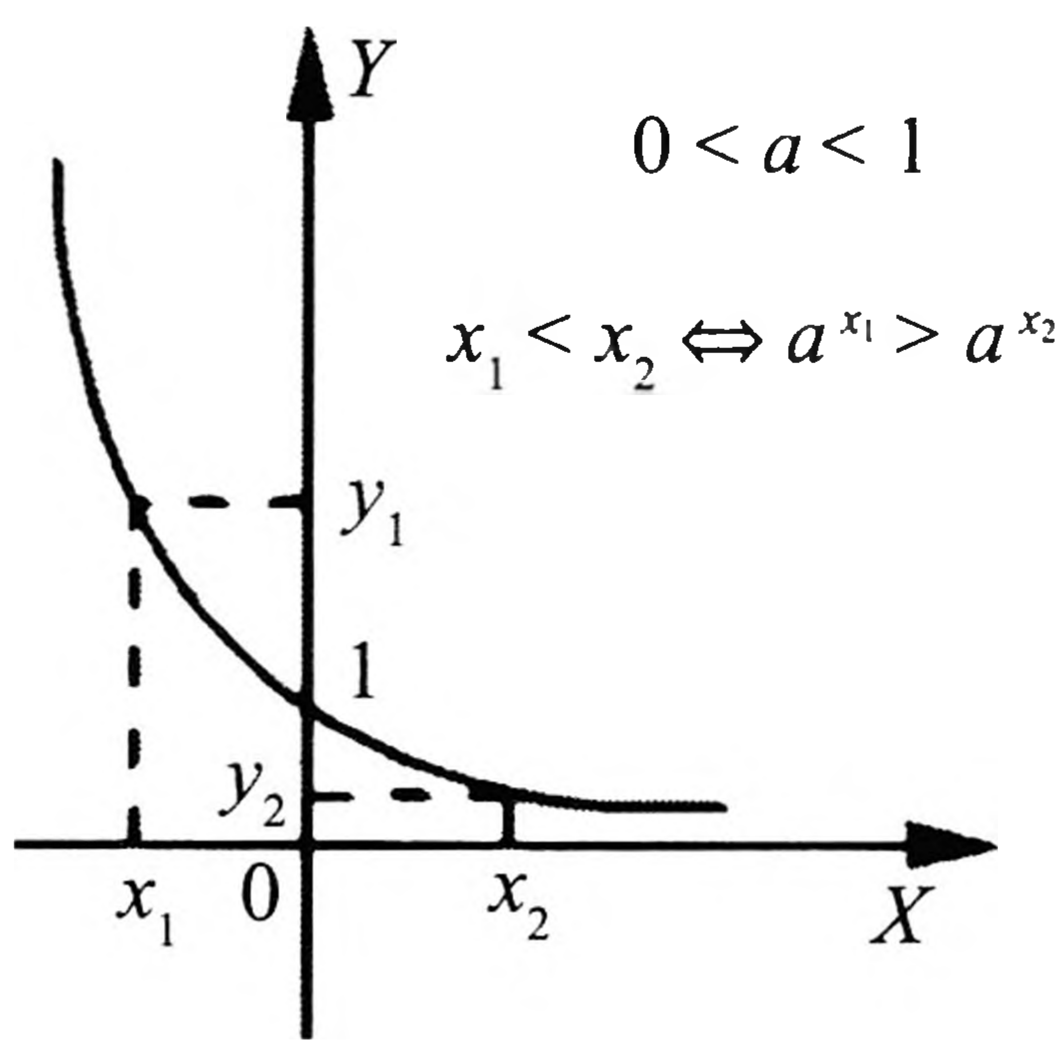
Ответ: $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

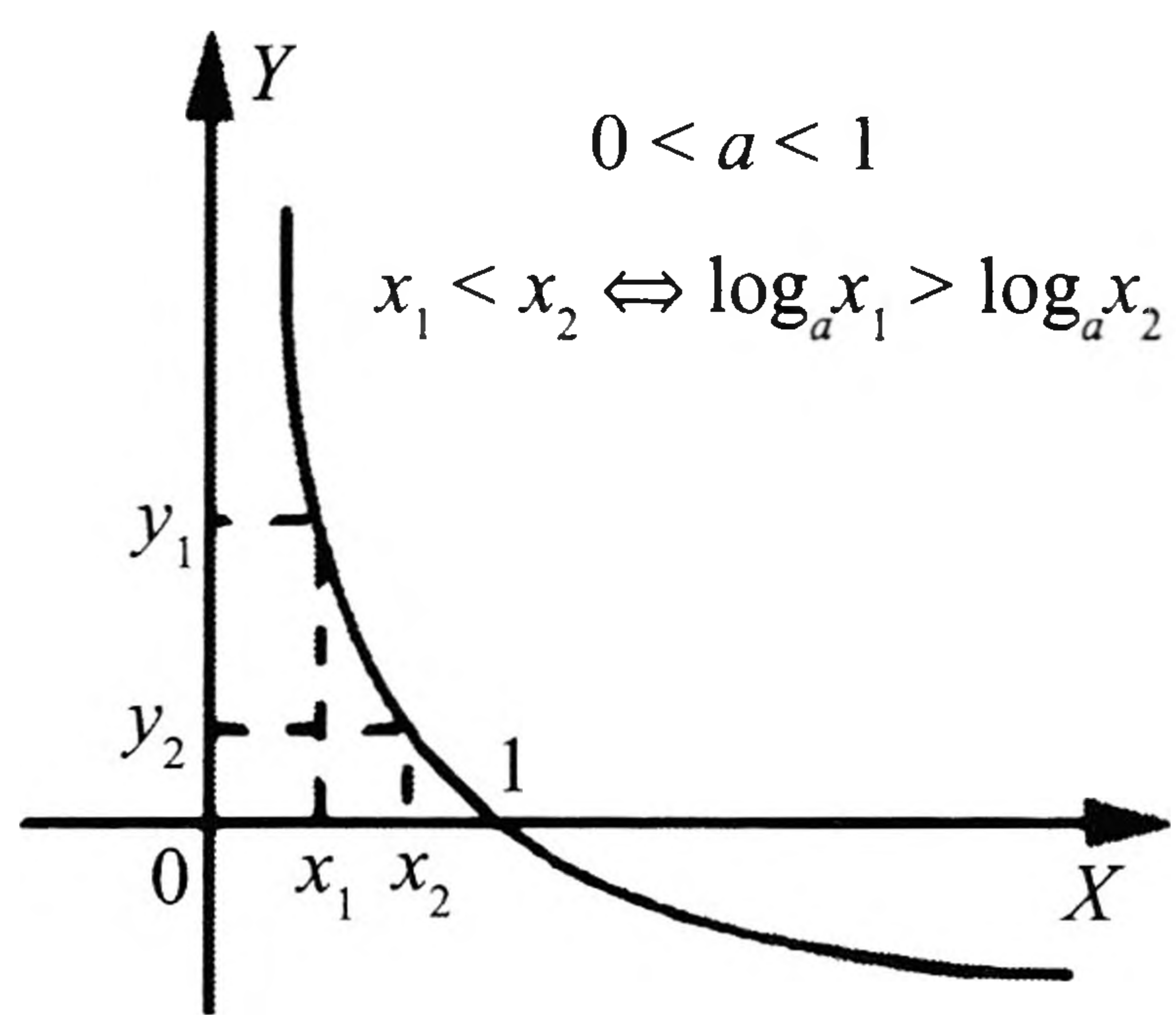
Подведем итоги. И показательные, и логарифмические неравенства решаются практически одинаково. В первом случае — «отбрасываем основания». Во втором — «отбрасываем логарифмы». При этом, если основание больше единицы, знак неравенства сохраняется. Если основание меньше единицы — знак неравенства меняется на противоположный.

Показательные неравенства **Логарифмические неравенства**









Метод рационализации

Продолжим рассказ о решении показательных и логарифмических неравенств. Разберем сложные задачи второй части ЕГЭ и расскажем о специальных приемах, упрощающих решение. Например, во многих задачах не обойтись без **метода замены множителя**. По-другому его называют **метод рационализации неравенства.**

Начнем с задач, где нет никаких хитростей. Достаточно помнить свойства логарифмов, не забывать об ОДЗ и знать универсальные приемы — такие, как замена переменной и метод интервалов.

1. $4\log_x 4+3\log_{\frac{4}{x}} 4+4\log_{16x} 4\le 0.$

Запомним правило: **если в уравнении или неравенстве присутствуют корни, дроби или логарифмы — решение надо начинать с области допустимых значений.**

Поскольку основание логарифма должно быть положительно и не равно единице, получим систему условий:

$$\begin{cases} x>0; \\ \dfrac{4}{x}\ne 1; \\ x\ne 1; \\ 16x\ne 1. \end{cases}$$

Упростим эту систему:

$$\begin{cases} x>0; \\ x\ne 4; \\ x\ne 1; \\ x\ne \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Это область допустимых значений неравенства.

Мы видим, что переменная содержится в основании логарифма. Перейдем к постоянному основанию. Напомним, что

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}.$$

В данном случае удобно перейти к основанию 4.

$$\frac{4}{\log_4 x}+\frac{3}{\log_4 \frac{4}{x}}+\frac{4}{\log_4 16x}\le 0;$$

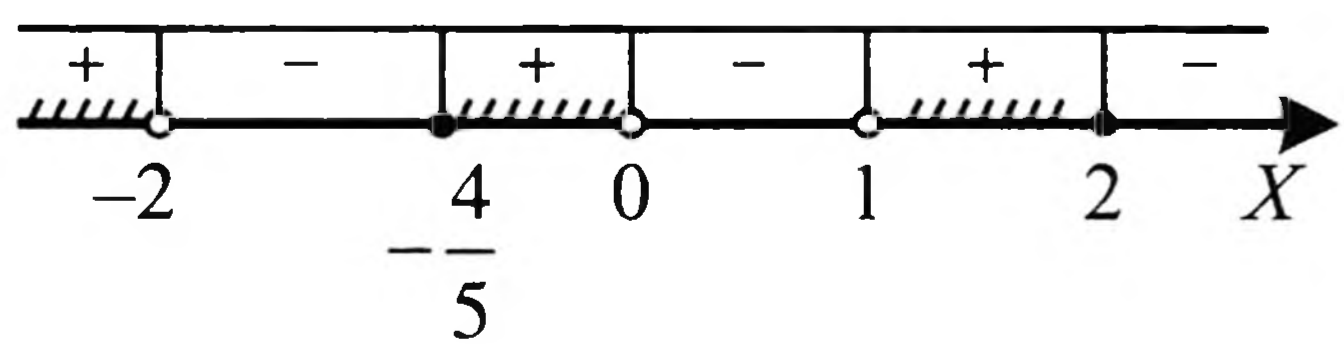
$$\frac{4}{\log_4 x}+\frac{3}{1-\log_4 x}+\frac{4}{2+\log_4 x}\le 0.$$

Сделаем замену $\log_4 x = t$:

$$\frac{4}{t}+\frac{3}{1-t}+\frac{4}{2+t}\le 0.$$

Упростим неравенство и решим его методом интервалов:

$$\frac{(t-2)\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t(1-t)(2+t)}\ge 0.$$



Итак,

$$t\in(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{4}{5};0\right)\cup(1;2].$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x<-2,\\ -\frac{4}{5}\le\log_4 x<0,\\ 1\le\log_4 x<2.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le\frac{1}{16},\\ 4^{-\frac{4}{5}}\le x<1,\\ 4<x\le 16.\end{array}\right.$$

Мы добавили условие $x > 0$ (из ОДЗ).

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup\left[4^{-\frac{4}{5}};1\right)\cup(4;16].$

2. Следующая задача тоже решается с помощью метода интервалов.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\ge -1.$$

Как всегда, решение логарифмического неравенства начинаем с области допустимых значений. В данном случае

$$\frac{2-3x}{x}>0.$$

Это условие обязательно должно выполняться, и к нему мы вернемся. Рассмотрим пока само неравенство. Запишем левую часть как логарифм по основанию 3:

$$\log_3\frac{x}{2-3x}\geq -1.$$

Правую часть тоже можно записать как логарифм по основанию 3, а затем перейти к алгебраическому неравенству:

$$\log_3\frac{x}{2-3x}\geq \log_3\frac{1}{3};$$

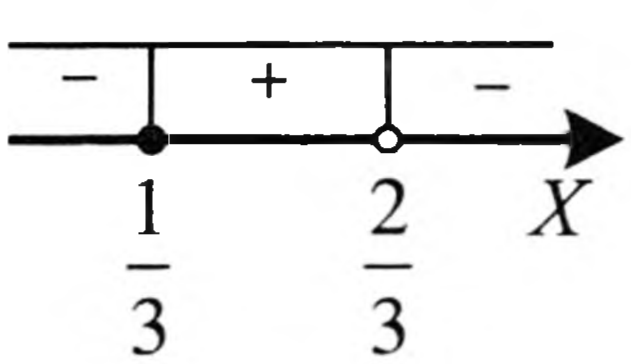
$$\frac{x}{2-3x}\geq\frac{1}{3}.$$

Видим, что условие $\frac{2-3x}{x}>0$ (то есть ОДЗ) теперь выполняется автоматически. Что ж, это упрощает решение неравенства.

$$\frac{x}{2-3x}-\frac{1}{3}\geq 0;$$

$$\frac{3x-1}{2-3x}\geq 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

3. Следующая задача была предложена на ЕГЭ несколько лет назад. Вид у нее устрашающий, однако решается она довольно быстро.

$$\log_2\left(\left(5^{-x^2}-3\right)\left(5^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log\frac{5^{-x^2}-3}{5^{-x^2+9}-1}>\log_2\left(5^{4-x^2}-2\right)^2.$$

Выражение 5^{-x^2} навязчиво повторяется в условии задачи. А это значит, что можно сделать замену:

$$5^{-x^2}=t.$$

Поскольку показательная функция принимает только положительные значения, $t>0$. Тогда

$$5^{-x^2+9}=5^9\cdot t;$$

$$5^{4-x^2}=5^4\cdot t=625t.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2\left((t-3)\left(5^9\cdot t-1\right)\right)+\log\frac{t-3}{5^9\cdot t-1}>\log_2\left(625t-2\right)^2.$$

Уже лучше. Найдем область допустимых значений неравенства. Мы уже сказали, что $t>0$. Кроме того, $(t-3)\,(5^9\cdot t-1)>0$.

Если это условие выполнено, то и частное $\dfrac{t-3}{5^9\cdot t-1}$ будет положительным.

А еще выражение под логарифмом в правой части неравенства должно быть положительно, то есть $(625t-2)^2>0$.

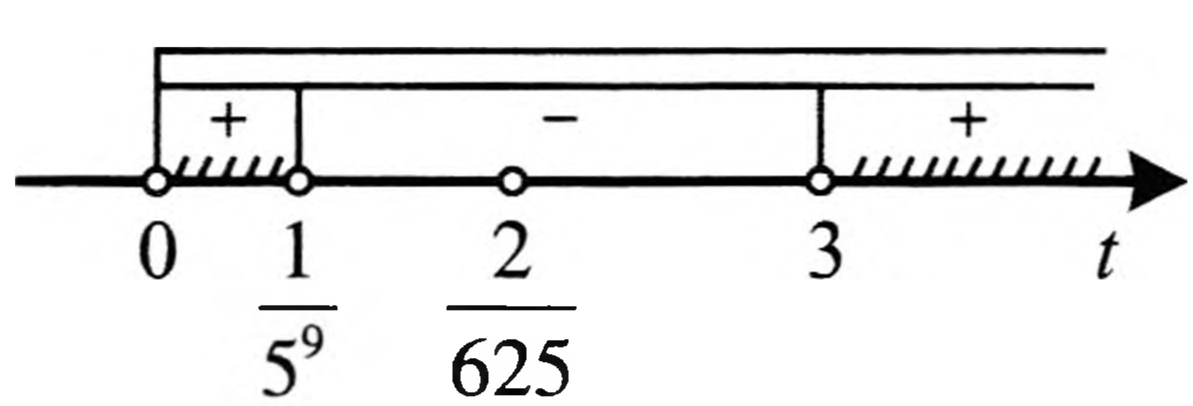
Это означает, что

$$625t-2\neq 0,\ \text{то есть } t\neq\frac{2}{625}.$$

Аккуратно запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} t>0; \\ \dfrac{t-3}{5^9\cdot t-1}>0; \\ 625t-2\neq 0. \end{cases}$$

и решим получившуюся систему, применяя метод интервалов.



Итак, $t\in\left(0;\dfrac{1}{5^9}\right)\cup(3;+\infty)$.

Ну что ж, полдела сделано — разобрались с ОДЗ. Решаем само неравенство.

Сумму логарифмов в левой части представим как логарифм произведения:

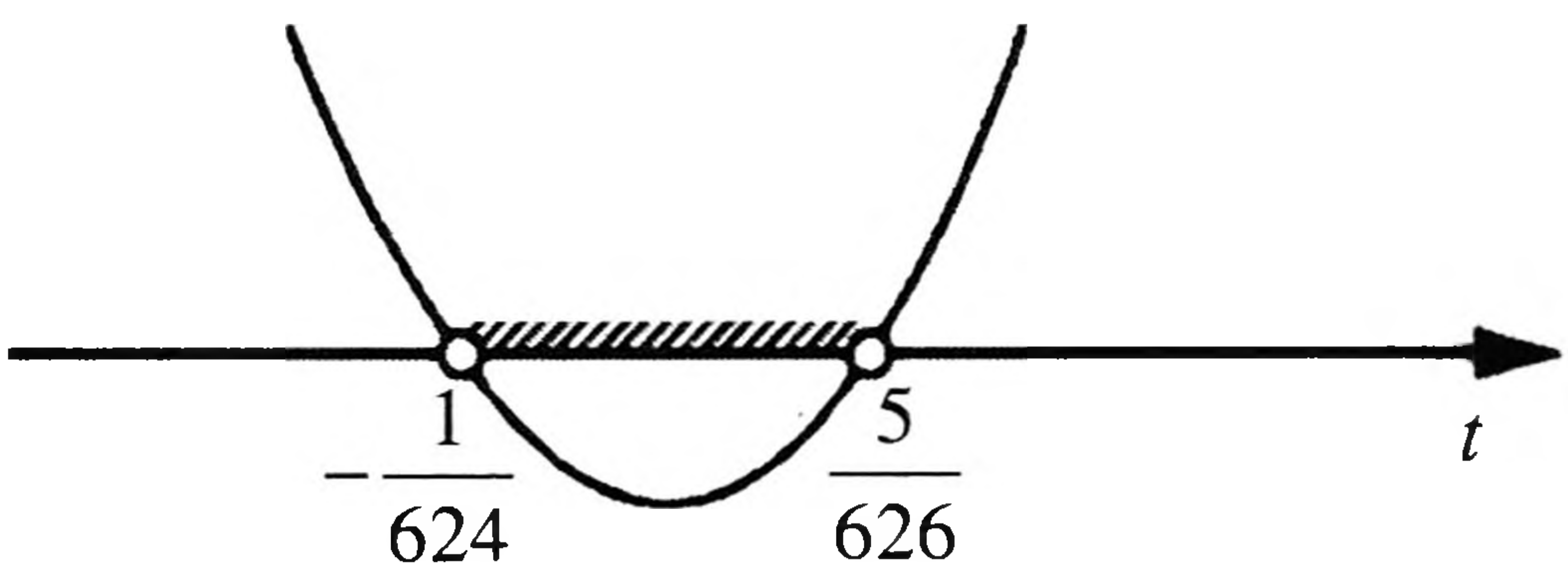
$$\log_2 \frac{(t-3)\cancel{(5^9 \cdot t-1)}(t-3)}{\cancel{(5^9 \cdot t-1)}} > \log_2 (625t-2)^2.$$

«Отбросим» логарифмы. Знак неравенства сохраняется, поскольку основание логарифмов больше единицы.

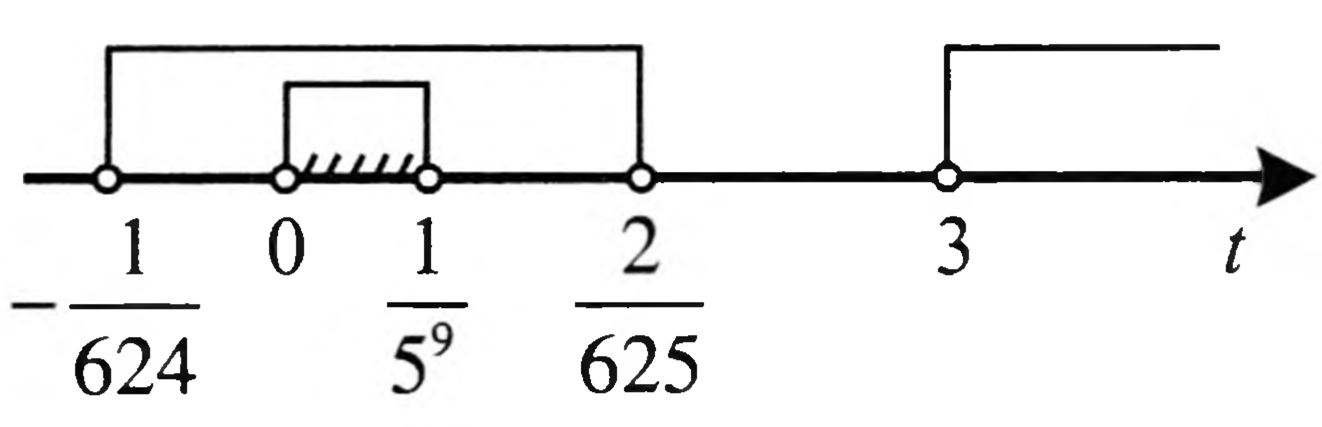
$$(t-3)^2 > (625t-2)^2.$$

Перенесем все в левую часть и разложим по известной формуле разности квадратов:

$$(t-3)^2 - (625t-2)^2 > 0;$$
$$(t-3-625t+2)(t-3+625t-2) > 0;$$
$$(-1-624t)(-5+626t) > 0;$$



Вспомним, что $t \in \left(0; \frac{1}{5^9}\right) \cup (3; +\infty)$ (это ОДЗ неравенства) и найдем пересечение полученных промежутков.



Получим, что $t < \frac{1}{5^9}$.

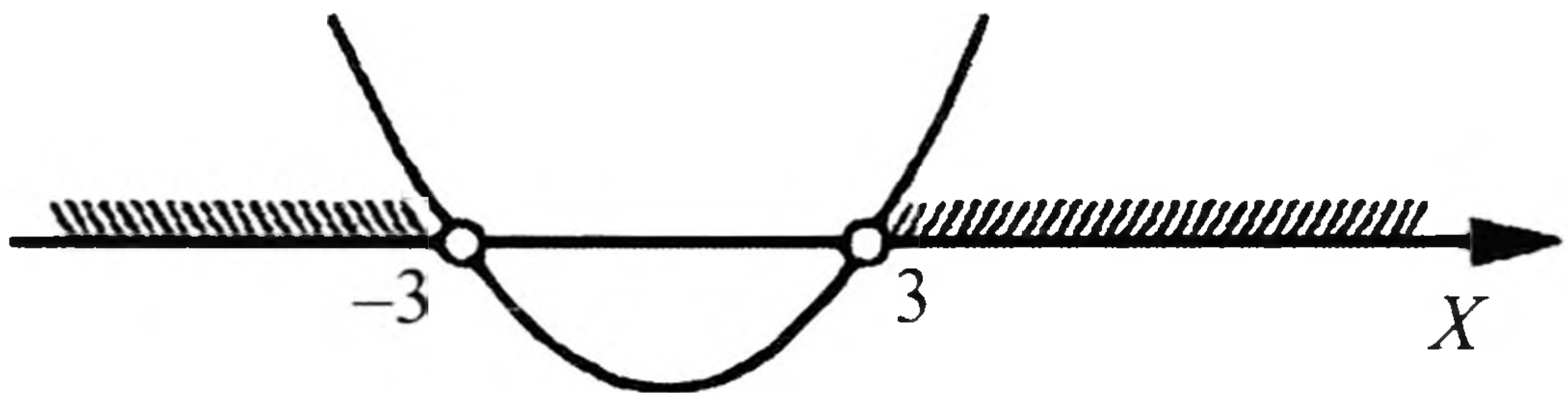
Вернемся к переменной x.

Поскольку $t = 5^{-x^2}$,

$$5^{-x^2} < 5^{-9};$$
$$-x^2 < -9;$$

$$x^2 > 9;$$

$$(x-3)(x+3) > 0.$$



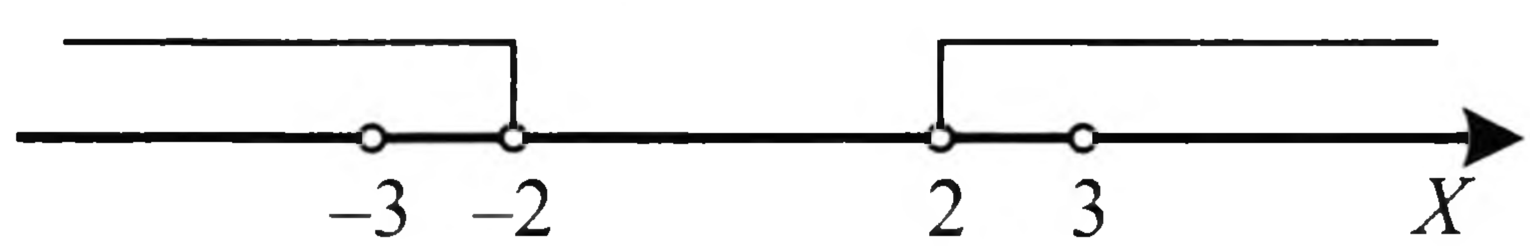
Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

4. Еще один прием, упрощающий решение логарифмических неравенств, — переход к постоянному основанию. Покажем, как использовать переход к другому основанию и обобщенный метод интервалов.

$$\log_{|x|-2}|x-3| \le 0.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} |x|-2>0; \\ |x|-2 \ne 1; \\ |x-3| \ne 0. \end{cases}$$



Воспользуемся формулой $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и перейдем к основанию 10:

$$\frac{\lg|x-3|}{\lg(|x|-2)} \le 0.$$

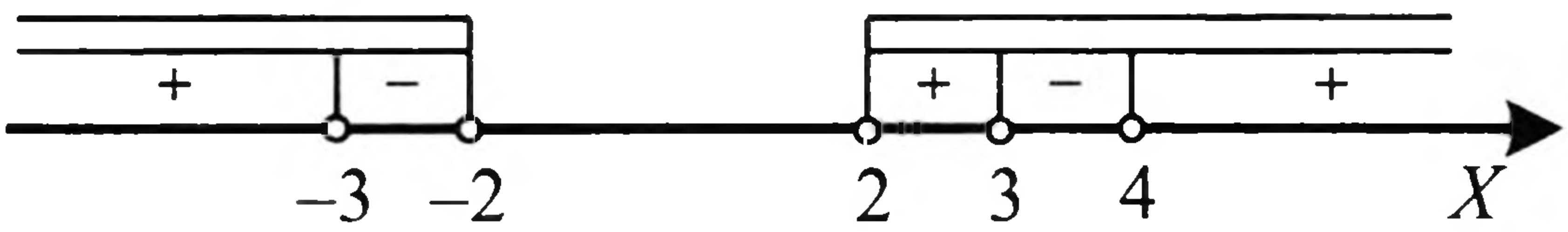
Применим обобщенный метод интервалов. Выражение в левой части неравенства можно записать как функцию

$$g(x) = \frac{\lg|x-3|}{\lg(|x|-2)}.$$

Эта функция может менять знак в точках, где она равна нулю или не существует.

Выражение $\lg|x-3|$ равно нулю, если $|x-3|=1$, то есть $x=4$ или $x=2$. Выражение $\lg(|x|-2)$ равно нулю, если $|x|=3$, т. е. в точках 3 и -3.

Отметим эти точки на числовой прямой, с учетом ОДЗ неравенства.



Найдем знак функции $g(x)$ на каждом из промежутков, на которые эти точки разбивают область допустимых значений. Точно так же мы решали методом интервалов обычные рациональные неравенства.

Ответ: $x\in(-3;-2)\cup(3;4]$.

Полезный прием для решения сложных задач — **метод рационализации неравенства.** Другое название — **метод замены множителя**. Это как раз из тех секретов, о которых ученику рассказывает репетитор.

Суть метода в том, чтобы от неравенства, содержащего в качестве множителей сложные показательные или логарифмические выражения, перейти к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

Давайте для начала вспомним, что такое равносильные уравнения (или неравенства) В школьной программе этот важный вопрос почти не обсуждается. Поэтому еще раз запишем определение.

Равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают.

Заметим, что внешне уравнения могут быть и не похожи друг на друга.

Например, уравнения $(x-3)^2=0$ и $x-3=0$ равносильны. Число 3 является единственным решением и того, и другого.

Уравнения $x^2=-1$ и $\sqrt{x}=-2$ также равносильны. Оба они не имеют решений.

Другими словами, множество решений каждого из них — пусто.

Уравнения $\sqrt{2x-1} = x-2$ и $2x-1=(x-2)^2$ не являются равносильными.

Решением первого уравнения является только $x = 5$. Решения второго — два числа: $x = 5$ и $x = 1$. Получается, что возведение обеих частей уравнения в квадрат в общем случае приводит к уравнению, неравносильному исходному.

Аналогичное определение для неравенств.

Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадают.

Например, неравенства $(x-1)(x-3) > 0$ и $\frac{x-1}{x-3} > 0$ равносильны — ведь множества их решений совпадают. В этом легко убедиться с помощью метода интервалов.

Неравенства $\log_2 x > \log_2 5$ и $x > 5$ также равносильны при $x > 0$. Заметим, что внешне эти неравенства не похожи — одно из них логарифмическое, другое алгебраическое.

Другими словами, при $x > 0$ неравенства $\log_2 x - \log_2 5 > 0$ и $x - 5 > 0$ имеют одинаковые решения. Если какое-либо число $x > 0$ является решением одного из них, то оно будет и решением второго.

А это значит, что при любом $x > 0$ выражение $\log_2 x - \log_2 5$ будет иметь такой же знак, как и выражение $x - 5$. Следовательно, если в какое-либо сложное неравенство входит в качестве множителя выражение $\log_2 x - \log_2 5$, то при выполнении условия $x > 0$ его можно заменить на более простое $x - 5$ и получить неравенство, равносильное исходному.

Вот ключевой момент. На этом и основан метод рационализации — замены множителей, содержащих сложные логарифмические или показательные выражения, на более простые алгебраические множители.

Например, множитель вида $\log_a f - \log_a g$, где f и g — функции от x, a — число, можно заменить на более простой $(f-g)(a-1)$ — конечно, при условии, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Доказательство легко провести самостоятельно.

А сейчас главное: волшебная таблица, позволяющая заменять сложные логарифмические (или показательные) множители в неравенствах на более простые. Эта таблица является ключом ко многим задачам ЕГЭ.

Сложный множитель	На что заменить
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1)\cdot f$
$f^h - g^h$	$(f-g)\cdot h$
$\|f\| - \|g\|$	$f^2 - g^2$
f, g — функции от x. h — функция или число.	

Конечно же, все выражения, которые содержат логарифмы, существуют при $f, g, h > 0$ и $h \neq 1$.

Обратите внимание, что мы говорим о замене множителя в неравенствах вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$. Вместо знака $\vee$ в неравенстве может быть знак $<$, $>$, $\leq$ или $\geq$.

Правая часть обязательно должна быть равна нулю. Иначе ничего не получится.

Покажем, как применяется этот метод.

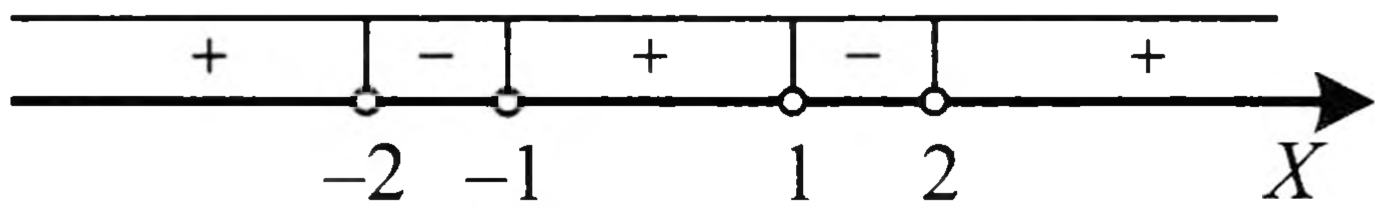
5. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leq 0.$

ОДЗ неравенства: $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Применим метод рационализации. В соответствии с нашей таблицей, множитель $\log_{2-x}(x+2)$ заменим на $(2-x-1)(x+2-1)$. Множитель $\log_{x+3}(3-x)$ заменим на $(x+3-1)(3-x-1)$. Таким образом, от логарифмического неравенства мы перешли к рациональному:

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \leq 0.$$

Решим его методом интервалов:



Ответ: $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$.

6. $\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\le 0.$

ОДЗ неравенства $4^{x^2+2x+2}>3$.

Заметим, что $4^{x^2+2x+2}=4^{\left(x^2+2x+1\right)+1}=4^{(x+1)^2+1}=4\cdot 4^{(x+1)^2}\ge 4$.

Значит, ОДЗ — все действительные числа.

Применим метод замены множителя. При этом единицу в первой скобке представим как 4^0.

$$(4-1)(x^2-x-6)\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(4^{x^2+2x+2}-4\right)\le 0.$$

Еще раз применим метод замены множителя.

4^{x^2+2x+2} заменим на $(4-1)(x^2+2x+2-1)$.

Получим: $(x^2-x-6)(x^2+2x+1)\ge 0$.

$(x-3)(x+2)(x+1)^2\ge 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Разберем еще одну задачу, в которой спрятаны целых две ловушки для невнимательных абитуриентов.

7. $\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\ge 2.$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ 36+16x-x^2>0, \\ x\ne 18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x\ne -1, \\ x\in(-2;18). \end{cases}$$

Итак, $x\in(-2;-1)\cup(1;18)$. Это ОДЗ.

Обратите внимание, что $36+16x-x^2=-(x+2)(x-18)$. Это пригодится вам при решении неравенства.

Упростим исходное неравенство:

$$\log_{x+2}\left((18-x)(x+2)\right)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^{2}(x-18)^{2}\geq 2;$$

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^{2}(x-18)^{2}\geq 2.$$

Теперь главное — не спешить. Мы уже говорили, что задача непростая — в ней расставлены ловушки. В первую вы попадете, если напишете, что $\log_{x+2}(x-18)^2=2\log_{x+2}(x-18)$. Ведь выражение $\log_{x+2}(x-18)$ в данном случае не имеет смысла, поскольку $x<18$.

Как же быть? Вспомним, что $(x-18)^2=(18-x)^2$.

Тогда:

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^{2}(18-x)^{2}\geq 2.$$

Вторая ловушка попроще. Запись означает, что сначала надо вычислить логарифм, а потом возвести полученное выражение в квадрат. Поэтому:

$$\log_{x+2}^{2}(18-x)^{2}=\left(\log_{x+2}(18-x)^{2}\right)^{2}=$$

$$=\left(2\log_{x+2}(18-x)\right)^{2}=4\log_{x+2}^{2}(18-x).$$

Дальше — все просто. Сделаем замену $\log_{x+2}(18-x)=t$.

$$t-\frac{1}{4}t^{2}\geq 1;$$

$$t^{2}-4t+4\leq 0;$$

$$(t-2)^{2}\leq 0.$$

Выражение в левой части этого неравенства не может быть отрицательным, поэтому $t=2$. Тогда:

$$\log_{x+2}(18-x)=2;$$

$$\log_{x+2}(18-x)=\log_{x+2}(x+2)^{2};$$

$$18-x=x^{2}+4x+4;$$

$$x^{2}+5x-14=0;$$

$x_1=7$ — не удовлетворяет ОДЗ;

$x_2=2$.

Ответ: 2.