Задачи с экономическим содержанием на ЕГЭ по математике

Простейшие задачи с экономическим содержанием. Прогрессии

Задачи о кредитах, вкладах, рентабельности производств и максимизации прибыли появились в вариантах ЕГЭ недавно. База для их освоения — это задачи на проценты, которые мы разбирали в самой первой главе. Кроме того, необходимо отличное знание тем «Арифметическая и геометрическая прогрессия», «Производная функции», «Наибольшее и наименьшее значение функции».

Начнем с повторения формул из темы «Проценты».

1. За 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

2. Если величину x увеличить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

3. Если величину x уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

4. Если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right).$$

5. Если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$

6. Если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2.$$

1. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

С чего начнем? Разберемся в том, что такое назначенная цена. Букинистический магазин покупает книги у населения. Пусть магазин купил книгу за 50 рублей, а продал за 80. Вот эти 80 рублей, за которые магазин продает книгу, и есть назначенная цена.

Введем переменные. Пусть x — цена, по которой магазин приобрел книгу, а y — назначенная цена, по которой магазин собирается ее продать.

Магазин продал книгу со скидкой 10%. Значит, цена, по которой в результате продана книга, составит $0{,}9y$. Прибыль, полученная в данном случае, составит $0{,}9y - x$. По условию задачи, это 8% от исходной цены, по которой магазин приобрел книгу, то есть, $0{,}9y - x = 0{,}08x$ или $0{,}9y = 1{,}08x$. Отсюда $y = 1{,}2x$.

Последнее уравнение означает, что назначенная цена y составляет 1,2 исходной цены — то есть 120% от исходной цены, по которой магазин книгу приобрел. А, значит, изначально магазин предполагал получить 20% прибыли.

Ответ: 20%.

В следующих нескольких задачах речь идет о кредитах и вкладах. Хорошо, а как вообще работает банк?

Доход банка образуется в виде разницы между процентом кредита и процентом вклада.

Например, клиент банка положил на свой сберегательный счет 100 тысяч рублей под 10% годовых. Через год он может получить в банке 110 тысяч рублей. Другому клиенту, наоборот, нужны 100 тысяч рублей. Банк выдает ему кредит под 30% годовых, и теперь этот клиент должен вернуть банку 130 тысяч рублей. Таким образом, прибыль банка составит 130 – 110 = 20 (тысяч рублей).

Пример 2

Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Пусть банк начисляет $p\%$ в год.

У клиента А после начисления процентов через год сумма вклада станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Соответственно, через два года эта сумма станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Клиент В сделал вклад позже, чем клиент А, на год. У него сумма вклада через год станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Так как клиент А получил на 847 рублей больше клиента В, то

$$7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-7700\left(1+\frac{p}{100}\right)=847.$$

Вынесем 7700 за скобки:

$$7700\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)=847.$$

Чтобы не получить квадратное уравнение с огромными коэффициентами, сократим обе части уравнения на 77.

$$100\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)=11.$$

Сделаем замену $1+\frac{p}{100}=x$, тогда

$$100\left(x^2-x\right)=11,$$

$$100x^2 - 100x = 11,$$

$$100x^2 - 100x - 11 = 0.$$

Его корни $x_1 = -0,1$ и $x_2 = 1,1$. Отрицательный корень нам не подходит, поэтому $x = 1,1$.

Сделав обратную замену, получим

$$1 + \frac{p}{100} = 1,1.$$

Отсюда $p = 10\%$.

Ответ: 10.

Мы рассмотрим два типа задач о кредитах и вкладах. Для их решения нам понадобятся знания о том, как вычислять суммы арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия **— это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:**

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

Фиксированное число d называется **разностью** арифметической прогрессии.

Например, последовательность 2, 5, 8, 11, ... является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Другой вид той же формулы:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Свойство арифметической прогрессии. Если числа *a*, *b*, *c* образуют арифметическую прогрессию, то 2*b* = *a* + *c*.

Другими словами, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия **— это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа, не равного нулю:**

$$b_{n+1} = b_n q \qquad n = 1, 2, \dots$$

Фиксированное число q называется **знаменателем** геометрической прогрессии.

Например, последовательность 2, 6, 18, 54, ... является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Свойство геометрической прогрессии. Пусть числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Тогда $b^2 = ac$.

Другими словами, квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних.

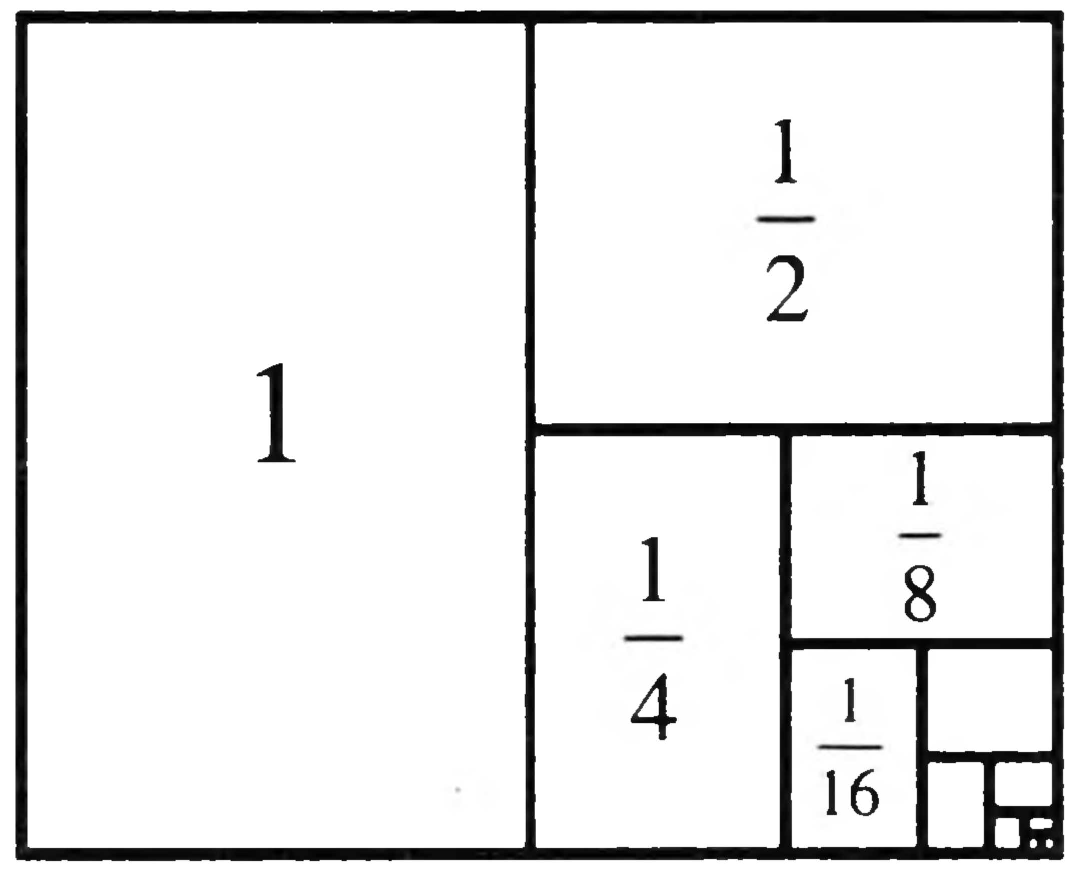
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Геометрическая прогрессия, знаменатель которой $|q| < 1$, называется убывающей. Если при этом число членов прогрессии бесконечно, такая прогрессия называется бесконечно убывающей.

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16} \dots$ — пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Чему равна сумма приведенной выше бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

Посмотрим на рисунок.



К прямоугольнику с площадью 1 добавляем участки с площадью $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$... К чему стремится площадь полученной фигуры при бесконечном увеличении n, то есть при добавлении все более мелких участков? Очевидно, к двум.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии — число, которое находится по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Две схемы задач о вкладах и погашении кредитов

3. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счет, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счете. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счет, на который ежегодно кладет по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Вспомним формулу для начисления процентов по вкладу.

Первоначальный вклад через год увеличился на 20% и стал равен:

$$1000\left(1+\frac{20}{100}\right)=1000\cdot 1,2.$$

Разберемся с первым вкладом. В 2008 году Петров зачислил на счет 1000 рублей, и теперь каждый год эта первоначальная сумма увеличивается в 1,2 раза. Через n лет эта тысяча вырастет до $1000 \cdot 1,2^n$.

Однако на второй год Петров добавляет к вкладу еще 1000 рублей, и эта тысяча рублей лежит на счете на 1 год меньше. И если бы Петров на этом остановился, через n лет его вклад стал бы равен

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1}.$$

Но Петров каждый год добавляет к вкладу 1000 рублей, поэтому через n лет общая сумма будет

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1} + 1000 \cdot 1,2^{n-2} + \ldots$$

Основные ошибки, которые допускаются в подобных задачах — путаница в порядке действий. Что было вначале, а что — потом: пополнили вклад или начислили проценты? Аналогично в задачах про кредит: что сначала — начисляются проценты или принимается очередная выплата в счет погашения кредита? Поэтому внимательно читайте условие задачи!

Здесь в условии сказано: в каком году **после очередного пополнения** суммы вкладов сравняются. Это значит, что через n лет Петров положит на вклад очередную тысячу рублей, а проценты начислить еще не успеют.

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1} + 1000 \cdot 1,2^{n-2} + \ldots + 1000.$$

Полученное выражение является геометрической прогрессией: каждый следующий член, начиная со второго, меньше предыдущего в 1,2 раза.

Мы говорили, что геометрической прогрессией называется последовательность $\{b_n\}$, каждый следующий член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, которое называется **знаменателем прогрессии**

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Сумма первых n членов прогрессии:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В нашей задаче $q = 1{,}2$ — знаменатель прогрессии, $b_1 = 1000$ — первый член. Количество слагаемых $n + 1$, так как $1000 = 1000 \cdot 1{,}2^0$. Найдет сумму S прогрессии для $n + 1$ члена.

$$S_{n+1} = 1000 \cdot \frac{1{,}2^{n+1} - 1}{1{,}2 - 1} = 5000 \cdot \left(1{,}2^{n+1} - 1\right).$$

Разберемся со вторым вкладом. Структура формулы абсолютно аналогична. Изменится лишь ежегодная сумма (2200 рублей) и начисляемый процент (сумма ежегодно будет увеличиваться на 44%, то есть в 1,44 раза).

$$2200 \cdot 1{,}44^k + 2200 \cdot 1{,}44^{k-1} + 2200 \cdot 1{,}44^{k-2} + \ldots + 2200,$$

где k — количество лет на втором вкладе, и оно на 6 лет меньше, чем на первом, поэтому $k = n - 6$.

Аналогично, сумма для $k + 1$ члена второй прогрессии

$$S_{k+1} = 2200 \cdot \frac{1{,}44^{k+1} - 1}{1{,}44 - 1} = 2200 \cdot \frac{1{,}44^{n-5} - 1}{1{,}44 - 1} = 5000 \cdot \left(1{,}44^{n-5} - 1\right).$$

Заметим, что $1{,}44 = 1{,}2^2$, поэтому

$$5000 \cdot \left(1{,}44^{n-5} - 1\right) = 5000 \cdot \left(1{,}2^{2n-10} - 1\right).$$

Так как суммы вкладов в результате сравнялись, получим:

$$5000 \cdot (1{,}2^{2n-10} - 1) = 5000 \cdot (1{,}2^{n+1} - 1),$$

$$1{,}2^{2n-10} = 1{,}2^{n+1},$$

$$2n - 10 = n + 1,$$

$$n = 11.$$

Значит, если первый вклад был сделан в 2008 году, то сравняются они в 2008 + 11 = 2019 году.

Ответ: в 2019 году.

4. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Все расчеты будем вести в тысячах рублей. Это удобнее, поскольку не придется писать большое количество нулей. Решение уравнения в таком случае тоже будет в тысячах рублей.

Пусть сумма $S = 3900$ (тысяч рублей). Так как банк начисляет по вкладу 50% годовых, значит, через год сумма увеличится в 1,5 раза — то есть в $\frac{3}{2}$ раза.

$$3900 + 3900\cdot\frac{50}{100} = 3900\cdot\frac{3}{2}.$$

Вкладчик ежегодно вносит одну и ту же фиксированную сумму X. С учетом этого сумма в конце года:

$$3900\cdot\frac{3}{2} + X.$$

Так происходит четыре раза, так как в условии сказано о первых 4 годах хранения. Значит, по окончании этих четырех лет:

$$\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X.$$

По условию задачи к концу пятого года проценты начисляются еще раз, но вкладчик сумму X больше не добавлял, поэтому

$$\left(\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}.$$

По сравнению с первоначальной величиной S размер вклада увеличился на 725%, т. е. стал равен 825% S.

Поэтому

$$\left(\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2} = 8,25\cdot 3900.$$

Поделим обе части на $\frac{3}{2}$. Получим

$$\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X=21450.$$

Раскроем последовательно скобки в левой части, начиная с внутренней.

Получили

$$3900\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot X+\left(\frac{3}{2}\right)^2X+\frac{3}{2}X+X=$$

$$=3900\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+X\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1\right).$$

Этой формулой удобнее пользоваться в общем виде, чем выводить каждый раз.

Если к сумме вклада S добавляли в течение n лет каждый год p%, а после начисления процентов добавляли еще некоторую сумму X, то в итоге сумма вклада станет равной

$$S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n+X\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+\ldots+1\right).$$

Формулу можно упростить, обозначив $1+\frac{p}{100}=t$.

Тогда через n лет сумма вклада равна

$$St^n+X\left(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+1\right).$$

Выражение в скобках — это сумма n членов геометрической прогрессии.

В нашей задаче $n=4$, $q=\frac{3}{2}$, $b_1=1$.

$$S_4=1\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4-1}{\frac{3}{2}-1}=2\cdot\left(\frac{81}{16}-1\right)=2\cdot\frac{65}{16}=\frac{65}{8}.$$

Получим

$$3900\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+X\cdot\frac{65}{8}=21450.$$

Из данного линейного уравнения выразим X и после вычислений получим $X = 210$ тыс. руб.

Ответ: 210 тыс. руб.

Заметим, что в реальности проценты ставки банков по вкладам, конечно, не равны 50% годовых. Они намного ниже, чем в условиях этих задач.

5. Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

Стандартные задачи о кредитах, подобные этой, чаще всего встречаются в сборниках для подготовки к ЕГЭ.

Чтобы выплатить кредит за наименьшее количество лет (то есть быстрее), Савелию надо выплачивать ежегодно максимальную сумму. По условию задачи она должна быть не более 330 тысяч рублей, значит, возьмем предельное значение $Y = 330$ тыс. руб.

Размер кредита 1,4 млн руб., или 1400 тыс. руб. Так как ставка по кредиту 10% годовых, то ежегодно кредит увеличивается в 1,1 раза. Как и в предыдущей задаче, получим

$$\left(\left(1400\cdot1{,}1-330\right)\cdot1{,}1-330\right)\cdot1{,}1-330\ldots$$

Данный процесс займет n лет. Конечно, можно просто посчитать «в лоб», не забывая при этом об аккуратности в расчетах, но мы воспользуемся готовой формулой, выведенной в предыдущей задаче. Через n лет сумма долга Савелия равна

$$1400\cdot1{,}1^n-330\left(1{,}1^{n-1}+1{,}1^{n-2}+\ldots1{,}1+1\right).$$

В результате всех выплат Савелий либо погасил долг полностью, обнулив кредит, либо он погасил долг и у него появились на счете кредитной карты собственные средства, которыми он может пользоваться.

Это значит:

$$1400\cdot 1{,}1^n - 330\left(1{,}1^{n-1} + 1{,}1^{n-2} + \ldots 1{,}1 + 1\right) \le 0.$$

В скобках записана знакомая нам сумма геометрической прогрессии для n членов, которую мы уже считали в предыдущих задачах

$$1400\cdot 1{,}1^n \le 330\cdot\frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1},$$

$$14\cdot 1{,}1^n \le 33\cdot 1{,}1^n - 33,$$

$$19\cdot 1{,}1^n \ge 33,$$

$$1{,}1^n \ge \frac{33}{19}.$$

$\frac{33}{19}$ — это примерно 1,73. В левой части выражения $1{,}1^n$. Найдем n подбором.

$$1{,}1^2 = 1{,}21,\ 1{,}1^3 = 1{,}331,\ \ldots,\ 1{,}1^5 = 1{,}61051,\ 1{,}1^6 = 1{,}771561.$$

Значит, $1{,}1^6 > 1{,}73$ и $n = 6$.

Расчет в столбик здесь неизбежен. Пожалуйста, на экзамене выделите на такую задачу запас времени.

Ответ: 6 лет.

6. Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей?

Пусть Y — ежегодные выплаты. При этом по условию задачи $Y \le 320\,000$ рублей.

Будем вести расчеты в тысячах рублей для простоты вычислений.

Упростим задачу. Чтобы выплатить кредит за наименьшее количество лет n (то есть быстрее), Оле надо выплачивать ежегодно максимальную сумму. По условию задачи эта сумма должна быть не более 320 тысяч рублей. Возьмем предельное значение $Y = 320$ тыс. руб.

Через год после увеличения суммы долга на 10% получается $1200 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1200 \cdot 1{,}1$.

После первой выплаты сумма долга равна $S_1 = 1200 \cdot 1{,}1 - 320$.

Дальше у нас есть два пути. Можем просто считать, каким будет долг через два года, через три, через четыре… Алгоритм простой: каждый год сумма долга увеличивается в 1,1 раза и затем уменьшается на 320.

У этого способа есть недостаток: на ЕГЭ нельзя пользоваться калькулятором, а вычисления могут получиться объемными.

Другой путь — применение формулы, которую мы уже выводили. Через два года $S_2 = (1200 \cdot 1{,}1 - 320) \cdot 1{,}1 - 320$.

Через три года $S_3 = S_2 \cdot 1{,}1 - 320$.

В общем виде для первоначальной суммы S

$$S_1 = 1{,}1S - Y;$$

$$S_2 = 1{,}1^2 S - Y(1{,}1 + 1);$$

$$S_3 = 1{,}1^3 S - Y(1{,}1^2 + 1{,}1 + 1).$$

Через n лет

$$S_n = 1{,}1^n \cdot S - Y\left(1{,}1^{n-1} + 1{,}1^{n-2} + \ldots 1{,}1 + 1\right).$$

В скобках записана сумма n членов геометрической прогрессии, для которой $b_1 = 1$, $q = 1{,}1$.

$$S_n = 1{,}1^n \cdot S - Y \cdot 1 \cdot \frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1},$$

$$S_n = 1{,}1^n \cdot S - Y \cdot 10 \cdot \left(1{,}1^n - 1\right).$$

В условии сказано, что последняя сумма выплаты может быть не равна всем предыдущим (допустим, Оле осталось выплатить в последний год 200 рублей, она их выплачивает и закрывает кредит). Значит, сумма долга через n лет не должна превышать ежегодной выплаты.

$$S_n = 1{,}1^n \cdot S - Y \cdot 10 \cdot \left(1{,}1^n - 1\right) \le Y.$$

Тогда Оля полностью выплатит кредит за $n + 1$ год.
Заменой $1{,}1^n = t$ сведем неравенство к следующему

$$1200t - 320\cdot 10\cdot (t-1) \le 320,$$

$$120t - 320\cdot (t-1) \le 32,$$

$$120t \le 32(10t-9),$$

$$\frac{120}{32} \le \frac{10t-9}{t}, t > 0;$$

$$\frac{10t-9}{t} \ge \frac{15}{4}.$$

Умножим обе части неравенства на $4t$, поскольку $t > 0$.

$$40t - 36 \ge 15t,$$

$$25t \ge 36,$$

$$t \ge \frac{36}{25},$$

$$t \ge \frac{144}{100},$$

$$t \ge 1{,}44.$$

Обратная замена: $1{,}1^n \ge 1{,}44$. Решаем подбором.
$1{,}1^2 = 1{,}21$ — не подходит,
$1{,}1^3 < 1{,}44$,
$1{,}1^4 > 1{,}44$.
Значит, $n = 4$.
Оля выплатит кредит за $n + 1$ год.
Ответ: 5 лет.

7. Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r% этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите *r*.

Эта задача отличается от уже разобранных нами задач на кредиты. Мы знаем, как действовать, если выплаты по кредиту производятся равными платежами.

А здесь мы видим новое условие: ***ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц***. Значит, платежи каждый месяц разные, однако, в них есть компонент, который каждый месяц одинаковый, — это часть суммы основного долга. Разными общие ежемесячные суммы будут за счет меняющегося выплачиваемого процента. Поэтому рассмотрим отдельно выплату основной суммы долга и выплату процентов.

Пусть N — сумма основного долга.

Каждый месяц Алексей выплачивает $\frac{1}{12}$ часть основного долга, то есть $\frac{N}{12}$.

В первый месяц Алексей выплатит $\frac{1}{12}$ часть основного долга, а также проценты, составляющие r% от основного долга: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}$.

Во второй месяц он также выплатит $\frac{1}{12}$ часть основного долга. А вот проценты теперь начисляются не на всю сумму долга N, а на $\frac{11}{12}$ этой суммы, поскольку $\frac{1}{12}N$ Алексей уже выплатил.

Значит, общая выплата во второй месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{11}{12}$.

Аналогично за третий месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{10}{12}$.

И так далее.

За последний, двенадцатый месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{1}{12}$.

Всего по условию задачи сумма, выплаченная за 12 месяцев, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая в кредит. Она равна $N\left(1+\frac{13}{100}\right)=1{,}13N$.

Общую сумму, выплаченную банку, найдем, сложив все выплаты, которые получились:

$$N+\frac{Nr}{100}\left(1+\frac{11}{12}+\frac{10}{12}+\ldots+\frac{1}{12}\right)=1{,}13N,$$

$$r\left(1+\frac{11}{12}+\frac{10}{12}+\ldots+\frac{1}{12}\right)=13.$$

В скобках записана сумма арифметической прогрессии с $n = 12$ членами, первым членом $a_1=\frac{1}{12}$ и разностью $d=\frac{1}{12}$.

Вспомним, что арифметической прогрессией называется последовательность $\{a_n\}$, каждый следующий член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, которое называется **разностью прогрессии**

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Сумма первых n членов прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_1+2d(n-1)}{2}\cdot n.$$

В нашей задаче

$$S_n=\frac{1+\frac{1}{12}}{2}\cdot 12=\frac{13}{2},$$

$$r\cdot\frac{13}{2}=13,$$

$$r=2.$$

Ответ: 2%.

8. 15 января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита производились в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Пусть сумма, взятая в кредит, равна S. В феврале после начисления процентов стало $1{,}05S$. После выплаты суммы Y_1 осталось 90% от долга, или $0{,}9S$.

$$1{,}05S - Y_1 = 0{,}9S.$$

Покажем в таблице, как сумма долга к концу каждого месяца зависит от ежемесячных выплат:

Февраль	$1{,}05S - Y_1 = 0{,}9S$
Март	$1{,}05 \cdot 0{,}9S - Y_2 = 0{,}8S$
Апрель	$1{,}05 \cdot 0{,}8S - Y_3 = 0{,}7S$
Май	$1{,}05 \cdot 0{,}7S - Y_4 = 0{,}6S$
Июнь	$1{,}05 \cdot 0{,}6S - Y_5 = 0{,}5S$
Июль	$1{,}05 \cdot 0{,}5S = Y_6$

Выплачиваемая сумма каждый месяц разная. В последний месяц оставшаяся сумма вместе с начисленными процентами была выплачена полностью.

Выразив из каждой строчки Y_1, Y_2, Y_3 ... (то есть ежемесячные выплаты), получим:

$Y_1 = 1{,}05S - 0{,}9S;$

$Y_2 = 1{,}05 \cdot 0{,}9S - 0{,}8S;$

$Y_3 = 1{,}05 \cdot 0{,}8S - 0{,}7S;$

$Y_4 = 1{,}05 \cdot 0{,}7S - 0{,}6S;$

$Y_5 = 1{,}05 \cdot 0{,}6S - 0{,}5S;$

$Y_6 = 1{,}05 \cdot 0{,}5S.$

Сложив их, получим общую сумму выплат

$$Y = 1{,}05S(1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5) - S(0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5).$$

Заметим в скобках суммы арифметических прогрессий

$$Y = S\left(1{,}05 \cdot \frac{1+0.5}{2} \cdot 6 - \frac{0{,}5+0{,}9}{2} \cdot 5\right) = 1{,}225S.$$

Общая сумма выплат Y получилась больше суммы самого кредита S на 22,5%

Ответ: 22,5%.

Мы рассмотрели две схемы погашения кредитов. В задачах 5 и 6 выплаты производятся равными платежами. В задачах 7 и 8 суммы выплат подобраны так, что сумма долга уменьшается равномерно. В вариантах ЕГЭ встречаются оба типа задач. Заметим, что для решения задач первого типа мы используем формулу суммы геометрической прогрессии, а для второго — формулу суммы арифметической прогрессии.

Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций

9. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Эта не вполне стандартная задача была на досрочном ЕГЭ в 2015 году.

Возникает вопрос: что значит «если рабочие трудятся t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара»?

Мы знаем формулу, согласно которой работа равна производительности, умноженной на время, причем производительность мы считали постоянной.

Однако фраза из условия задачи означает, что здесь производительность — не константа, а величина, зависящая от времени по определенному правилу. Другими словами, и производительность, и время работы зависят от некого параметра t. Заметим, что буквой t здесь обозначается не время, а этот параметр.Это новая для нас ситуация.

Владимир, хозяин заводов, хочет минимизировать время работы и при этом произвести 580 единиц товара. Очевидно, время работы на каждом из заводов будет различным. Пусть оно равно x^2 и y^2 соответственно. При этом количество произведенного товара на этих заводах будет $2x$ и $5y$.

Составим таблицу.

	Время	Сколько произвели товара
I завод	x^2	$2x$
II завод	y^2	$5y$

За каждый час работы Владимир выплачивает рабочим 500 рублей. Значит, надо минимизировать время работы, то есть найти минимум функции

$$Z = x^2 + y^2$$

— при условии, что $2x + 5y = 580$.

Получим систему двух уравнений.

$$\begin{cases} Z = x^2 + y^2, \\ 2x + 5y = 580. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x.

$$x = \frac{580 - 5y}{2}.$$

Подставим в первое уравнение

$$Z = \frac{(580 - 5y)^2}{4} + y^2.$$

Получим функцию

$$Z(y) = \frac{(580 - 5y)^2}{4} + y^2 = \frac{29}{4} y^2 - 1450y + 84\,100.$$

Графиком данной функции является парабола, у которой ветви направлены вверх. Поэтому наименьшее значение достигается в вершине. Найдем координату вершины параболы: $y_0 = 100$.

Тогда $Z_{min} = 11\,600$.

За каждый час Владимир выплачивает 500 рублей. Умножив Z_{min} на 500, получим минимальную еженедельную сумму оплаты труда рабочих.

Ответ: 5 800 000 руб.

10. Строительство нового завода стоит 78 млн руб. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Разберемся, о чем идет речь в задаче. На постройку завода израсходовали 78 млн рублей. Необходимо, чтобы постройка завода окупилась. А это значит, что завод должен получить прибыль не менее, чем эти 78 млн рублей. Если завод производит за год x тысяч единиц продукции, то он тратит на такое производство $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей. То есть затраты являются квадратичной функцией производительности. Соответственно, ежегодная прибыль составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$ (млн руб.).

Будем вести расчеты в млн рублей (для удобства расчетов).

Мы хотим, чтобы ежегодная прибыль была такой, чтобы строительство завода окупилось не более, чем за три года. Прибыль за три года есть $3\left(px-\left(0,5x^2+2x+6\right)\right)$. И эта прибыль должна быть больше или равна стоимости постройки завода, то есть

$$3\left(px-\left(0,5x^2+2x+6\right)\right)\ge 78$$

$$px-\left(0,5x^2+2x+6\right)\ge 26$$

Выразим отсюда p. Помним, что $x > 0$, где x — затраты на производство.

$$p \geq \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x}.$$

Мы видим, что цена, по которой продают продукцию, является функцией затрат на производство.

Наименьшее значение цены

$$p = \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x}.$$

Нам надо найти, при каком x достигается наименьшее значение функции $p(x)$, равное $p_{\min}$. Найдем производную функции $p(x)$ по формуле производной частного

$$p'(x) = \frac{(0,5 \cdot 2 \cdot x + 2)x - \left(0,5x^2 + 2x + 32\right) \cdot 1}{x^2},$$

$$p'(x) = \frac{0,5x^2 - 32}{x^2}.$$

Мы знаем, что функция может иметь экстремум (минимум или максимум) только в тех точках, в которых производная равна нулю или не существует.

$$\frac{0,5x^2 - 32}{x^2} = 0.$$

Так как знаменатель не может быть равен нулю (затраты на производство положительны), то

$$0,5x^2 - 32 = 0,$$

$$x^2 = 64,$$

$$x = \pm 8.$$

Нам подходит только положительное значение $x_0 = 8$. Убедимся, что данная точка является точкой минимума данной функции при $x > 0$. Точка является точкой минимума, если при переходе через нее производная меняет знак с минуса на плюс. Подставим в производную значения из каждого интервала.

$$p'(1) = \frac{0,5 \cdot 1^2 - 32}{1^2} = -31,5 < 0;$$

$$p'(9) = \frac{0,5 \cdot 9^2 - 32}{9^2} = \frac{17}{162} > 0.$$

Действительно, точка $x_0 = 8$ является точкой минимума, а, значит, функция будет принимать свое наименьшее значение именно в ней. Подставим $x_0 = 8$ в нашу функцию

$$p_{\min}(x) = \frac{0,5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 32}{8} = 10.$$

Ответ: $p = 10$ тыс. руб.

Для дальнейшегоо освоения темы рекомендую свой видеокурс «ЕГЭ по математике. Задачи с экономическим содержанием». Его можно найти здесь: *www.dvd.ege-study.ru*.