Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике

Элементарные функции и их графики

В этой главе мы соберем воедино знания об элементарных функциях и их графиках. Они необходимы даже для решения уравнений и неравенств первой части ЕГЭ. И конечно, в задачах части 2, особенно в задачах с параметрами, без них не обойтись. А если вы выбрали технический или экономический вуз — первая же лекция по матанализу будет посвящена именно элементарным функциями и их графикам.

Но это не все. Математические функции, изучением которых мы занимаемся, — это не что-то такое выдуманное или существующее только в замкнутом пространстве учебника. Они отражают реальные взаимосвязи и процессы, происходящие в природе и обществе.

Существует всего пять типов элементарных функций:

1. **Степенные**.

Это функции вида $y = x^n$. К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$. С ними вы хорошо знакомы.

2. **Показательные**.

Это функции вида $y = a^x$.

3. **Логарифмические** $y = \log_a x$.

4. **Тригонометрические.**

В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

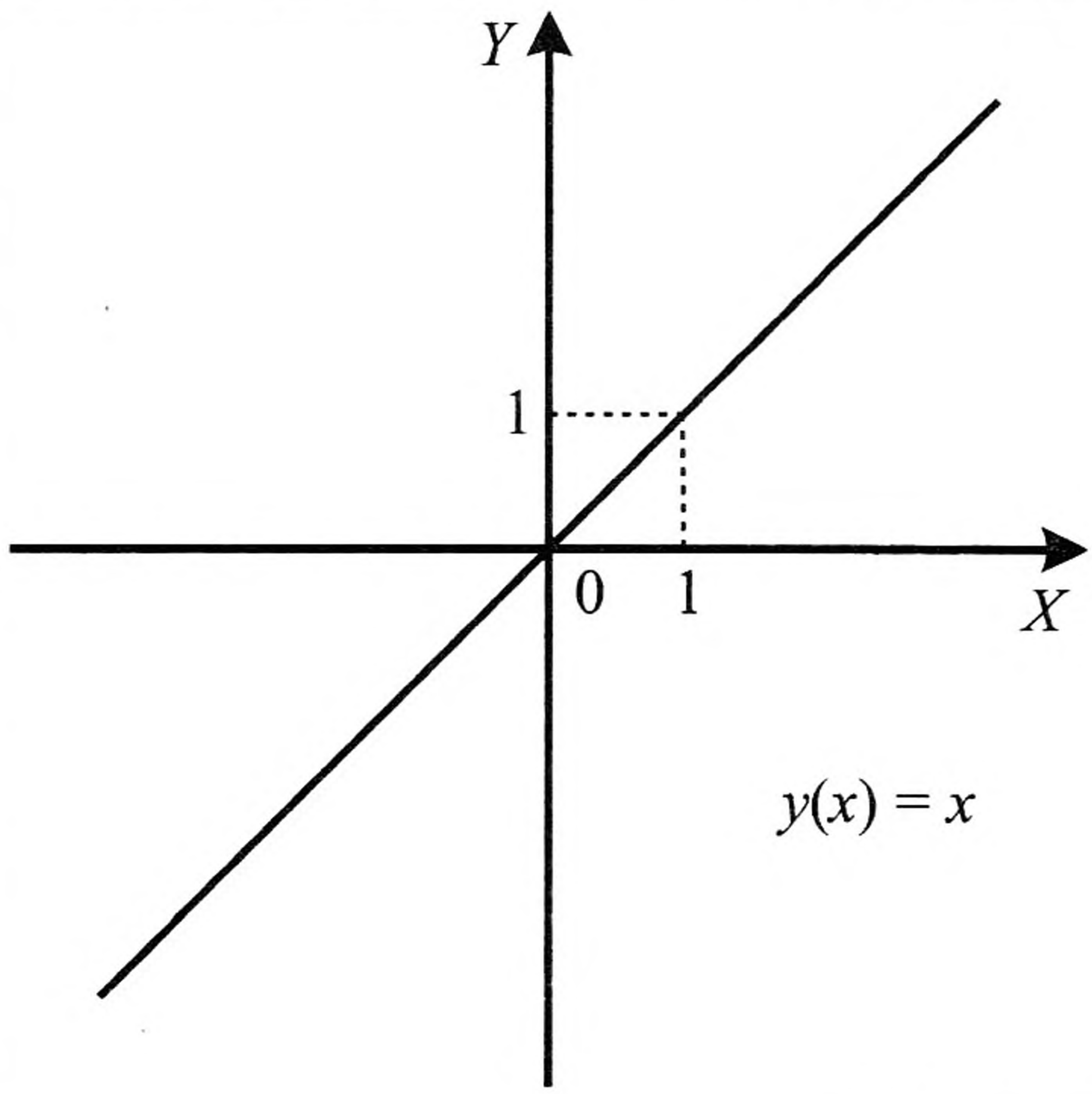
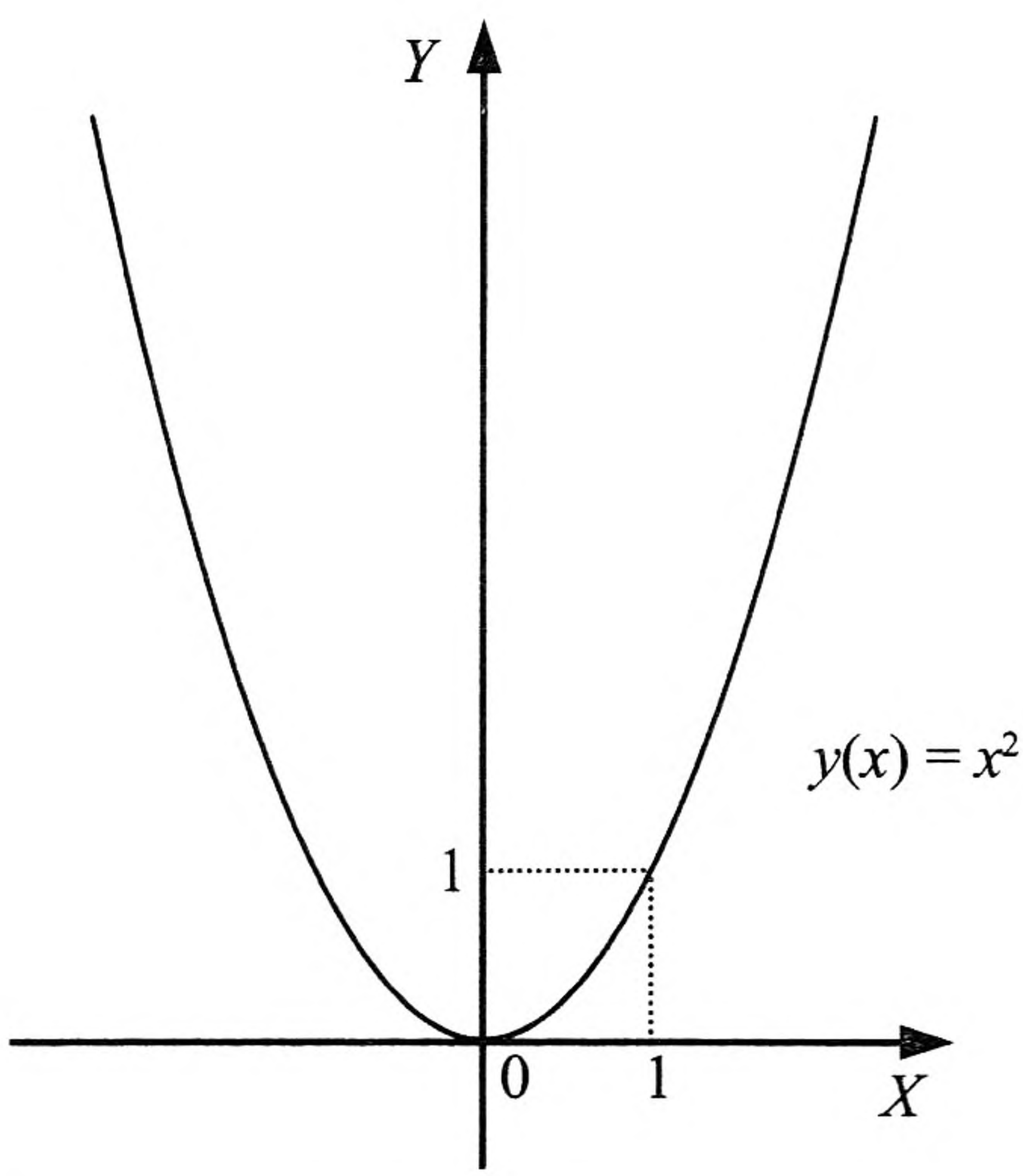
5. **Обратные тригонометрические**. Содержат $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

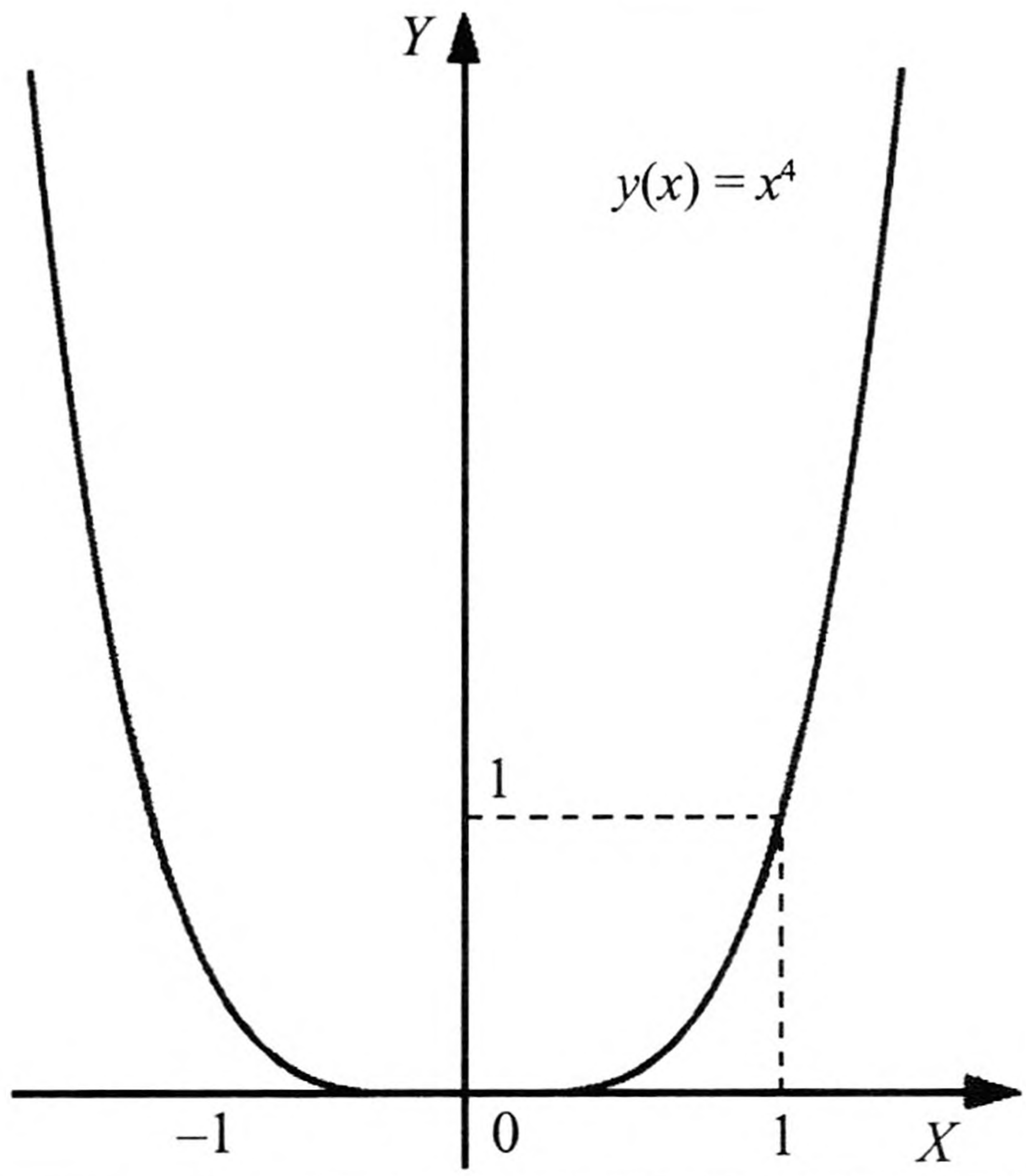
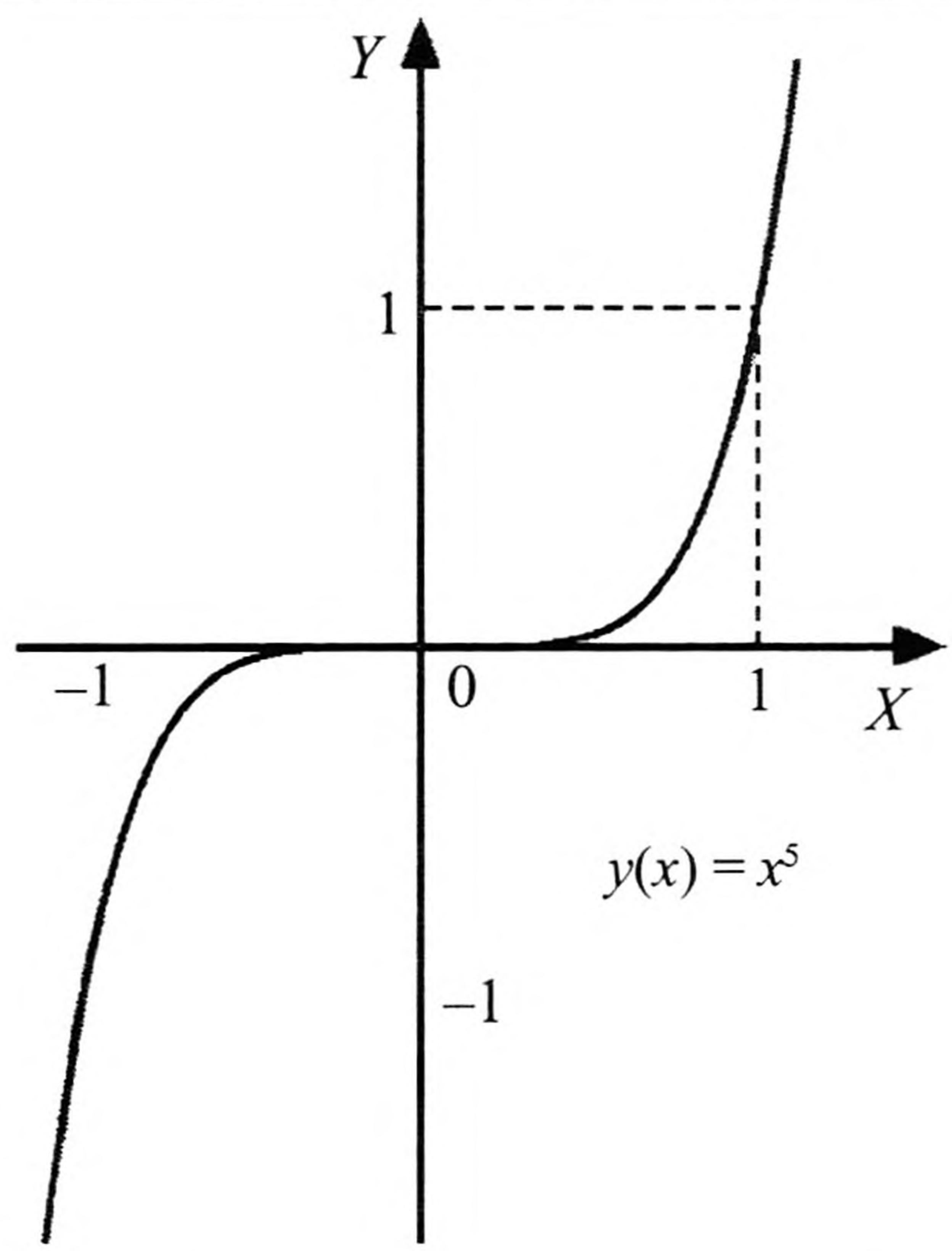
Элементарными все они называются потому, что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2 e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin(a^x)$ — сложная функция, то есть комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

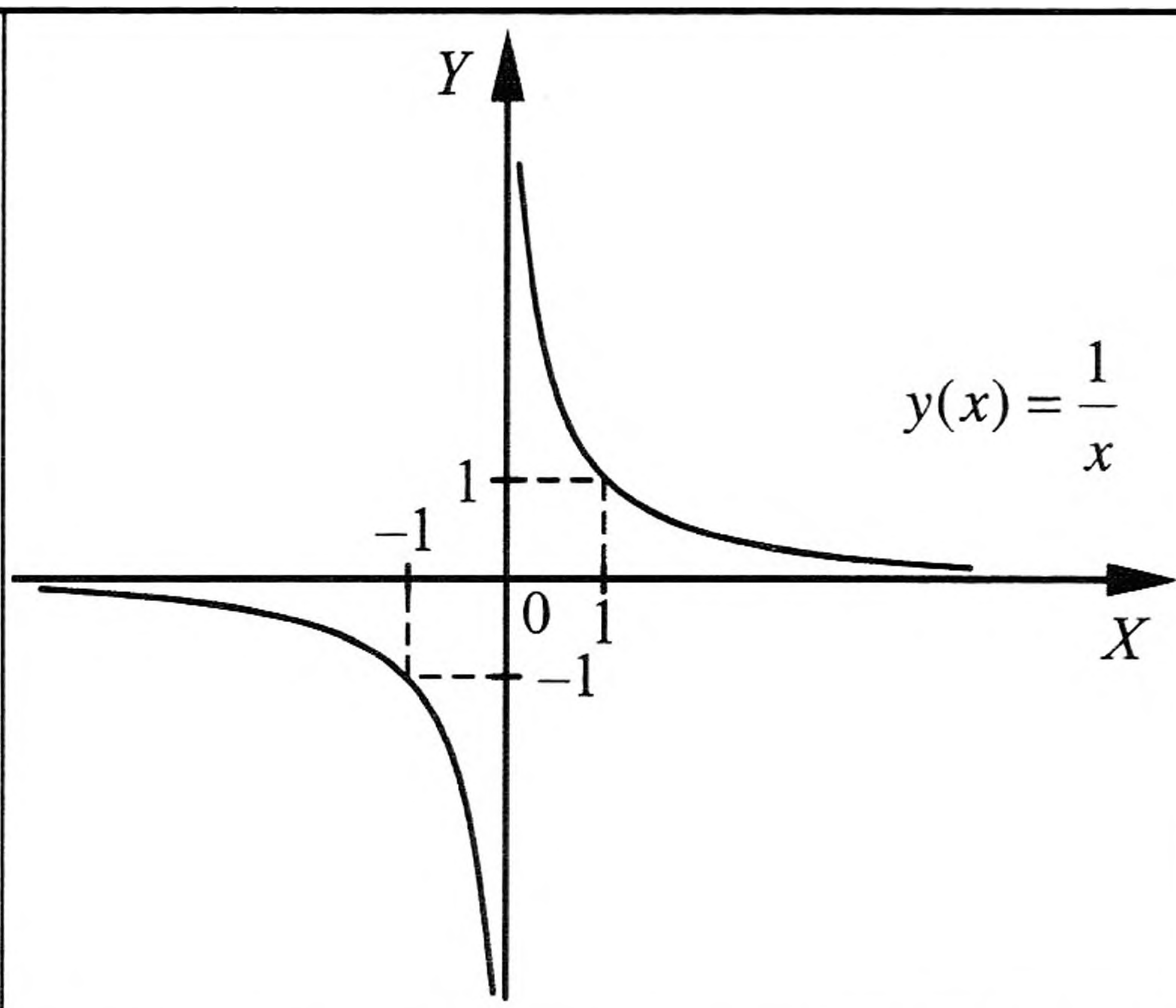
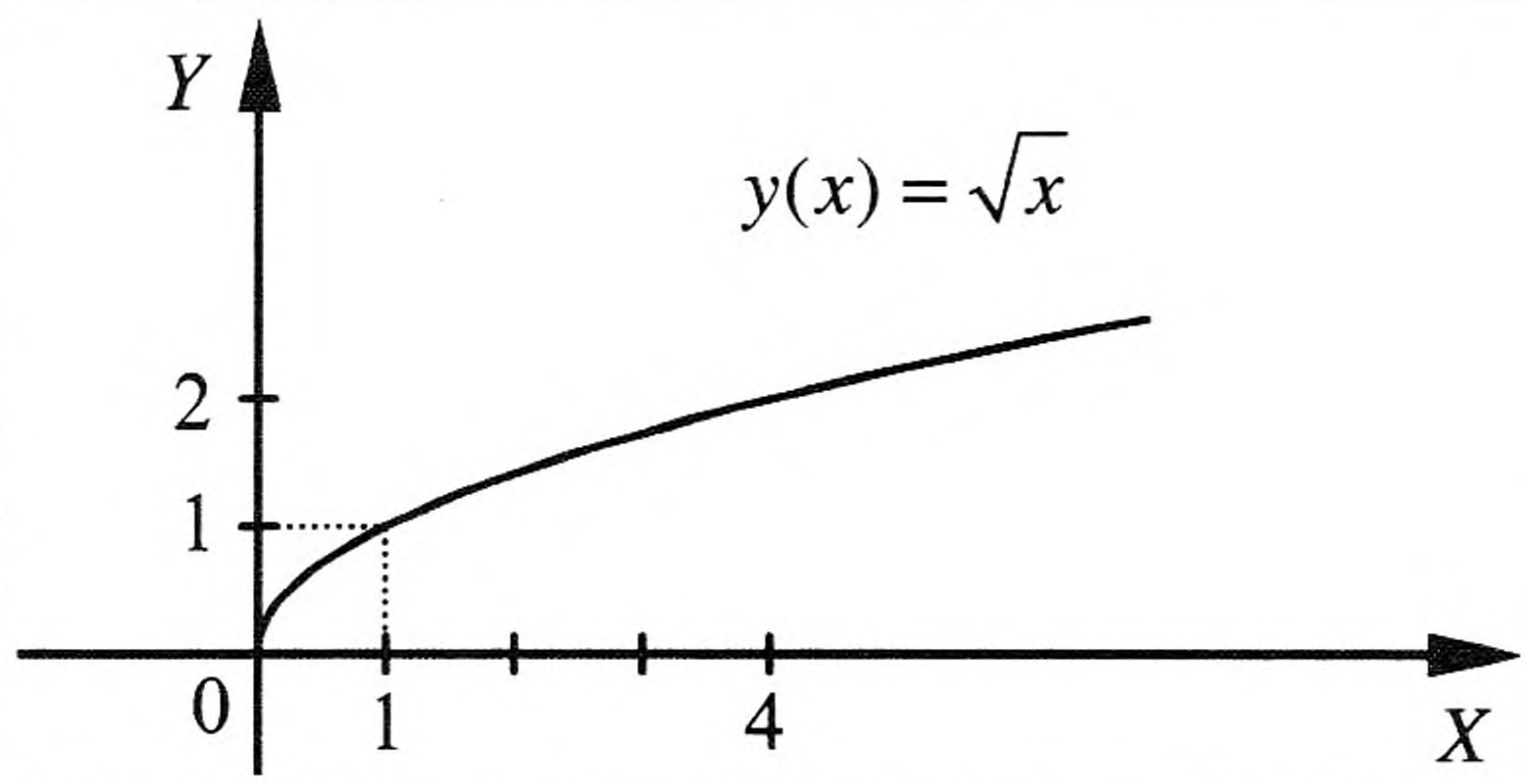
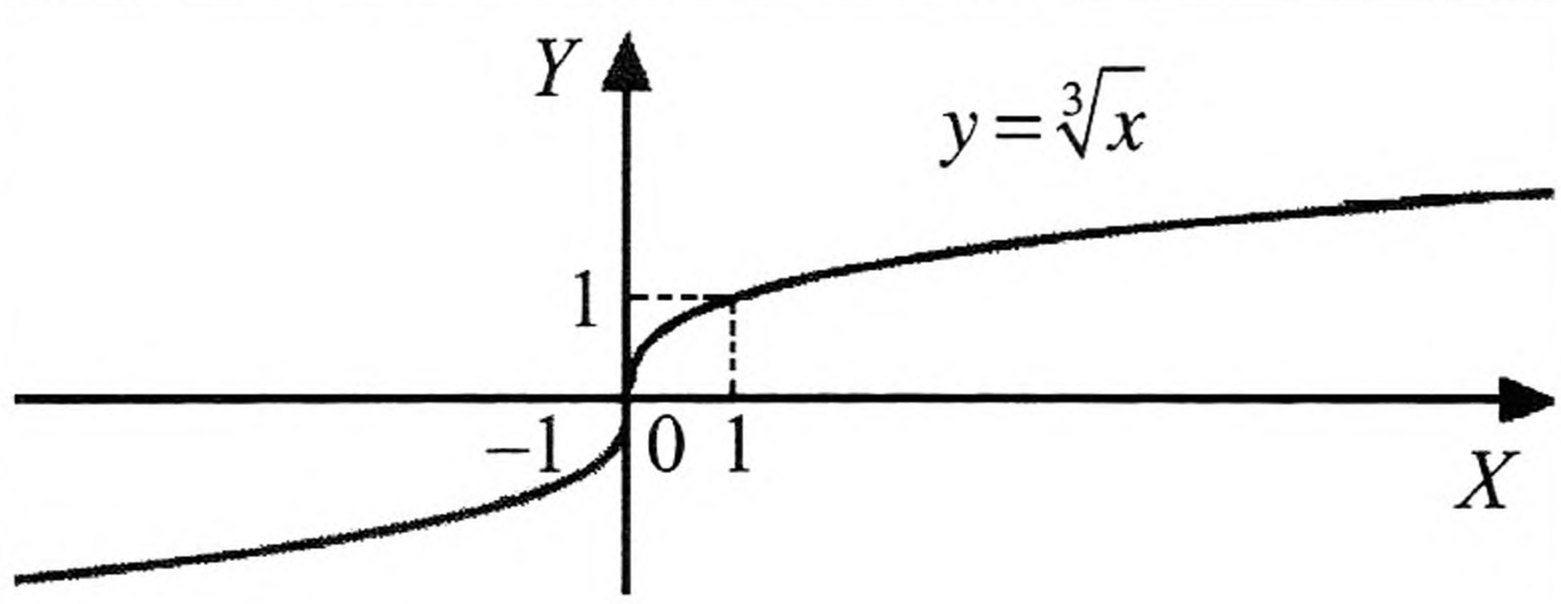
Соберем в одной таблице графики и свойства основных элементарных функций.

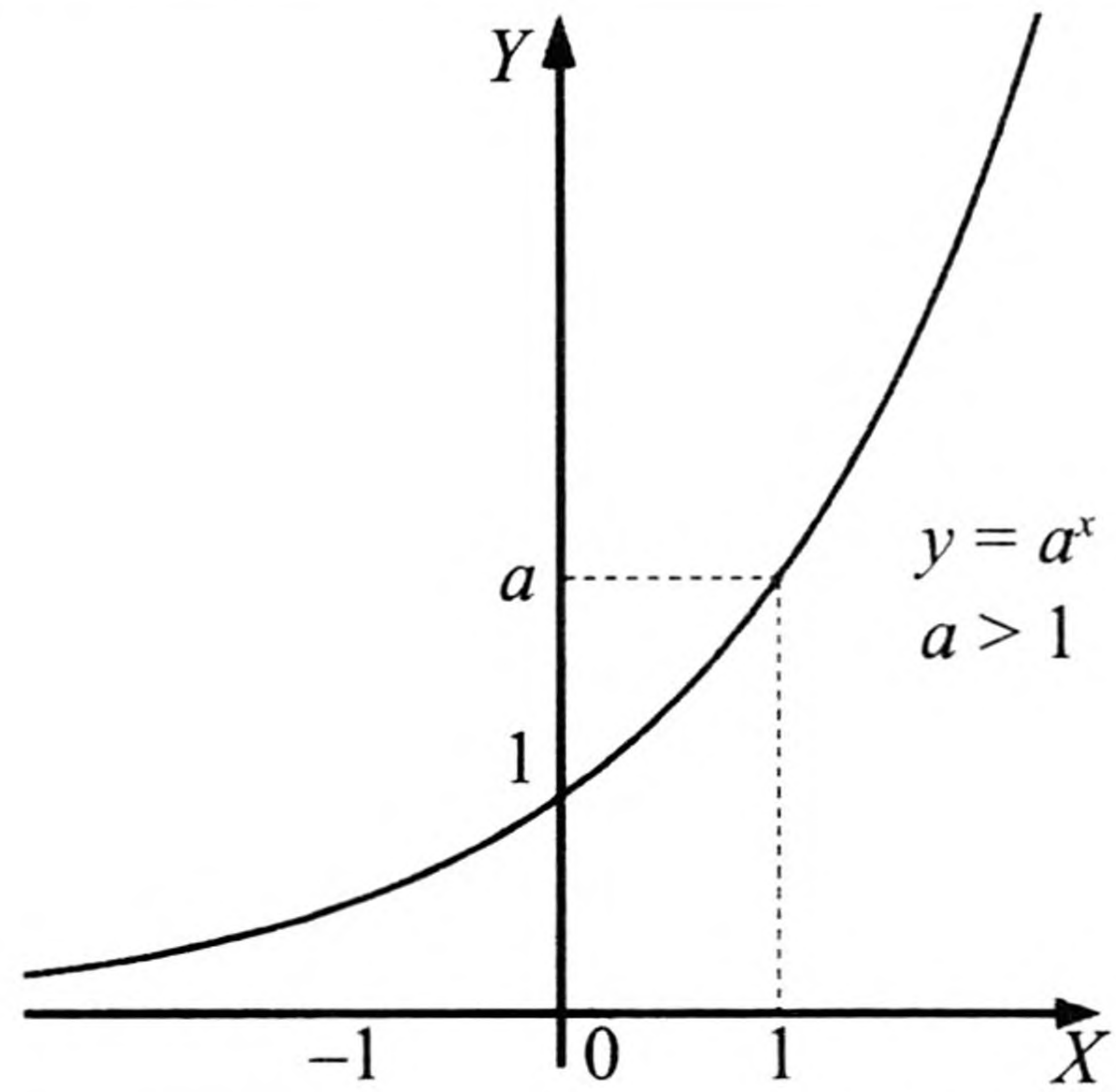
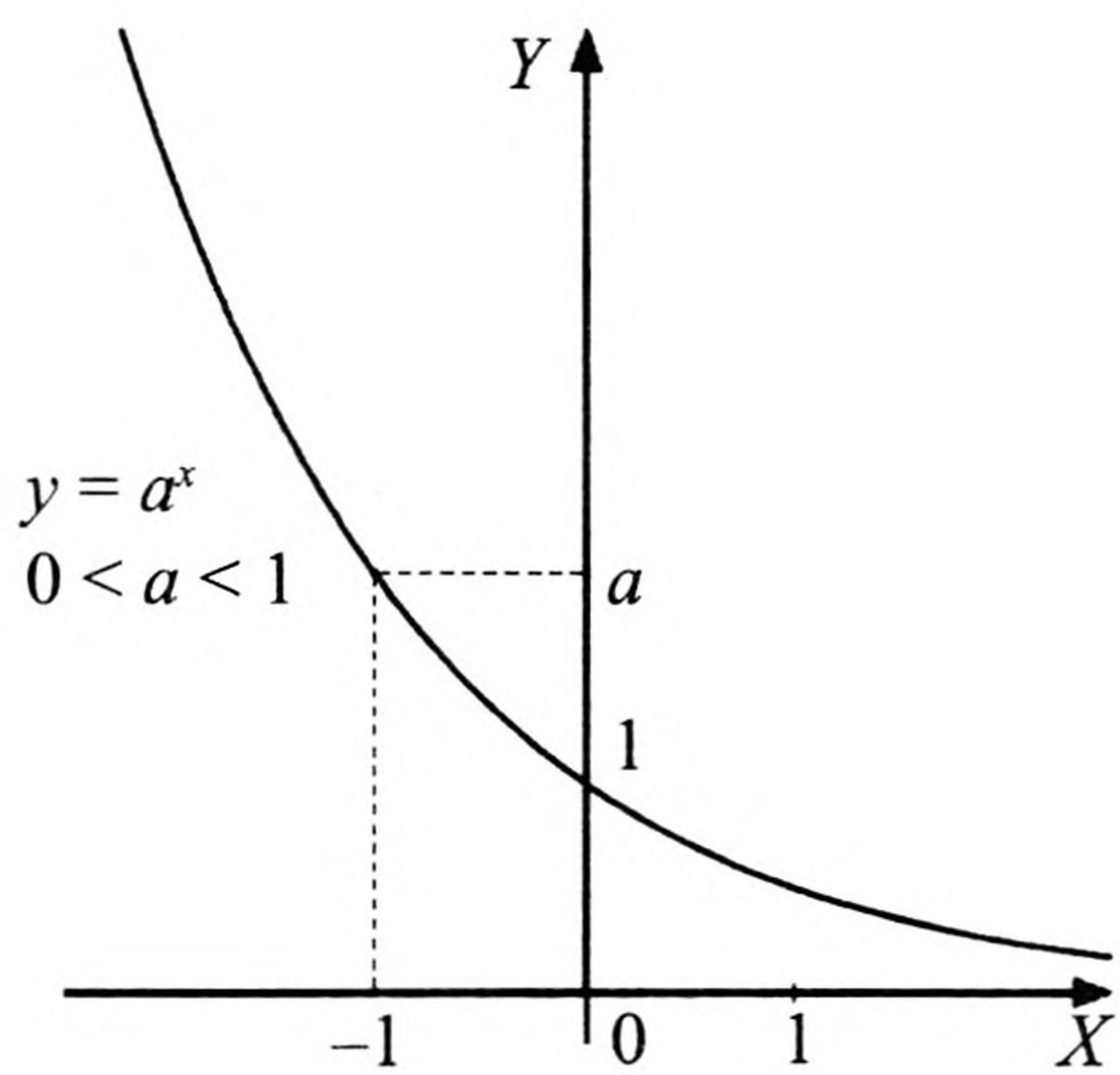
Обратите внимание, что мы приводим самые простые примеры функций каждого типа.

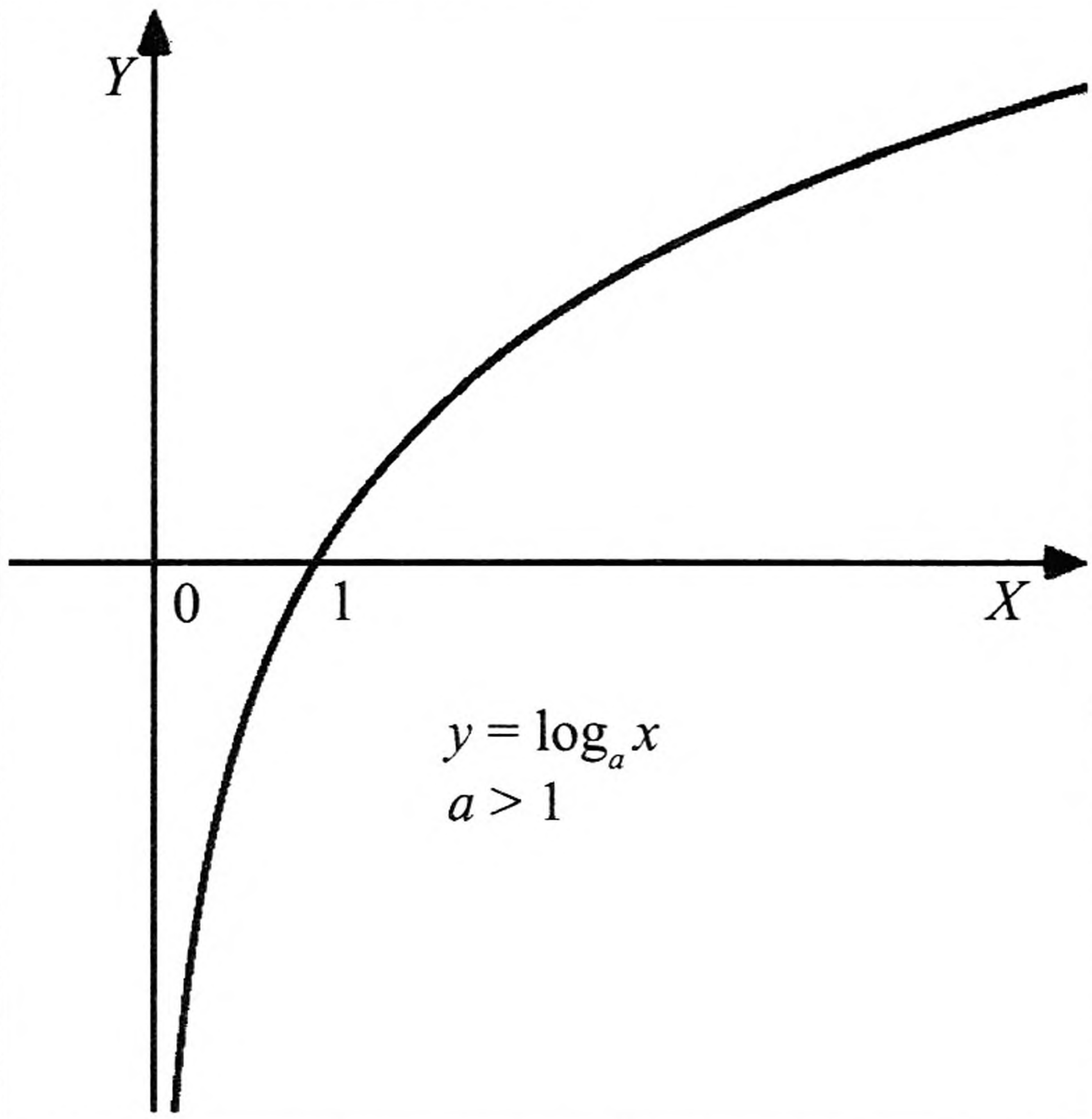
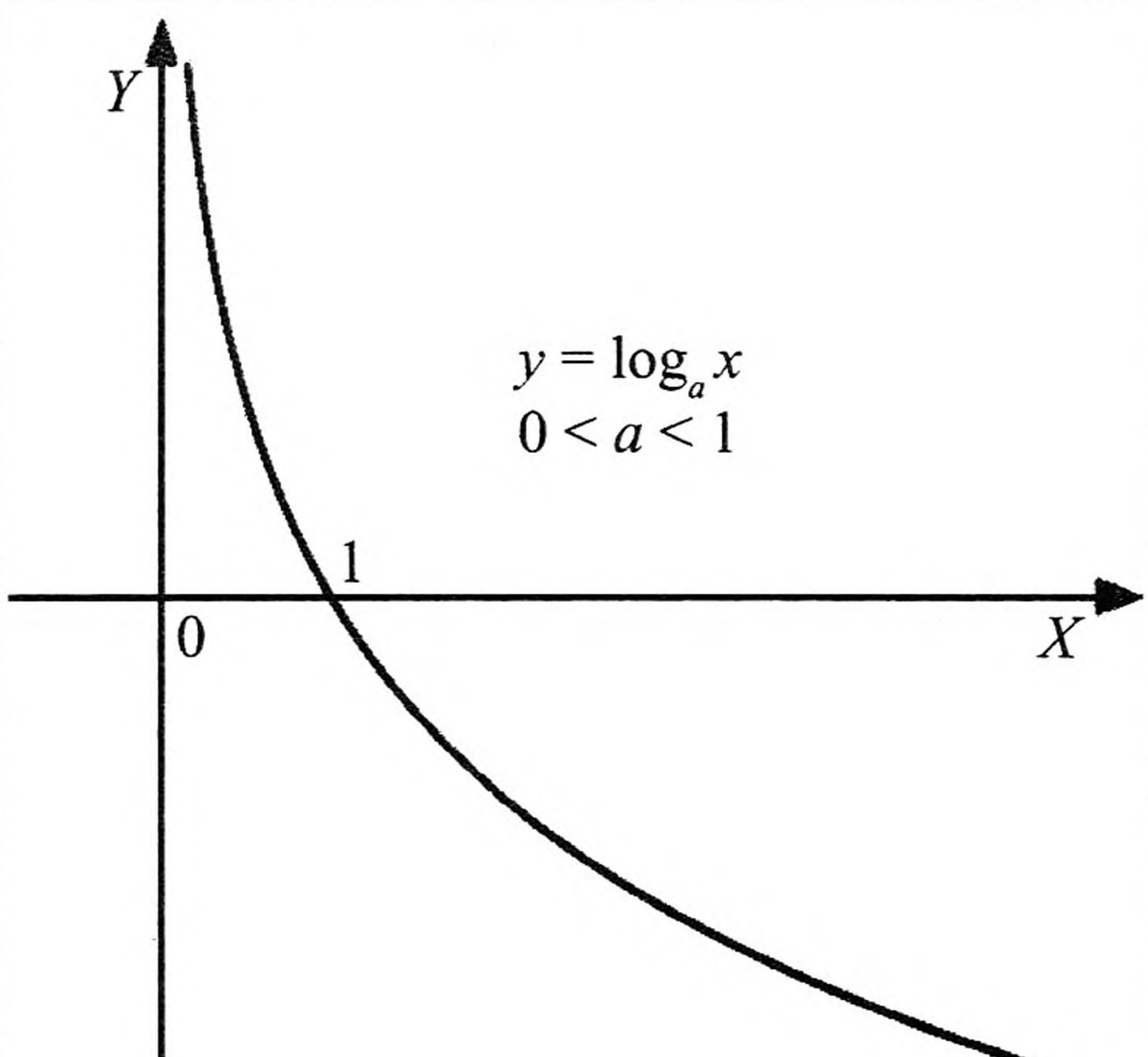
Еще раз проверьте себя. Все ли графики вы помните наизусть и можете нарисовать, не глядя в нашу таблицу?

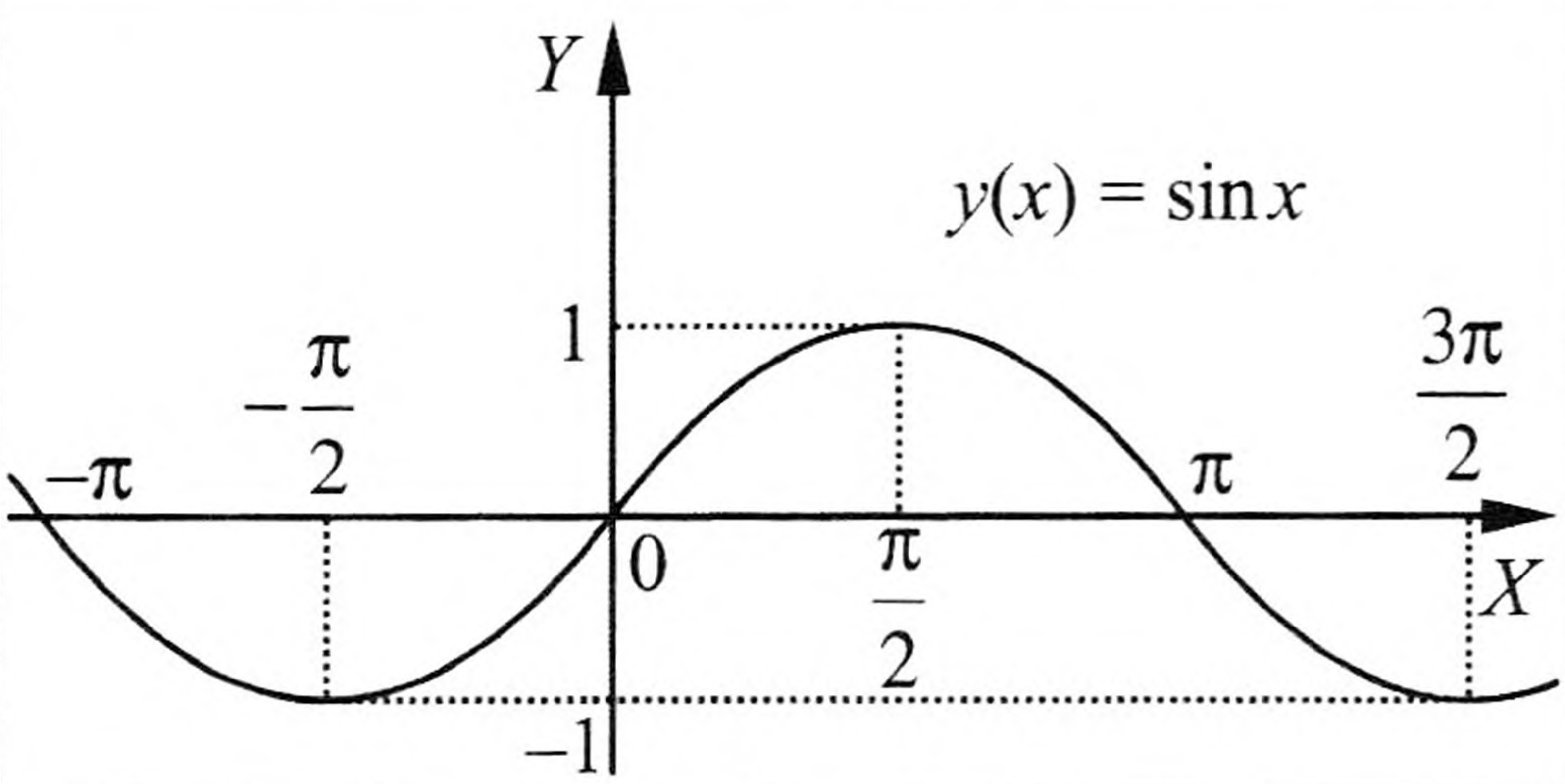
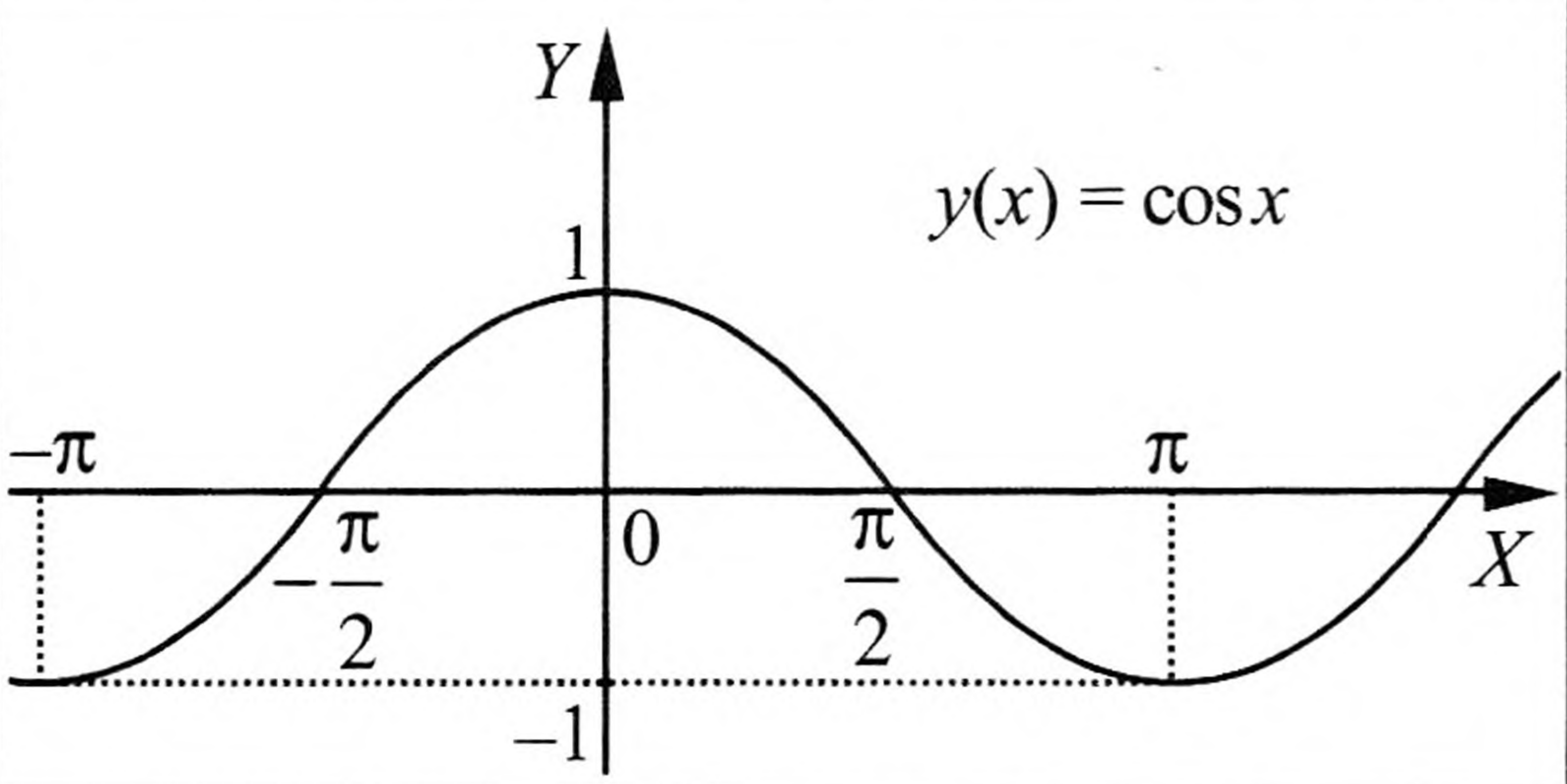
<table>
<tr><th colspan="2">Степенные функции</th></tr>
<tr><td>1. Линейная функция
$y = kx + b$.
Пример: $y = x$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Квадратичная парабола
$y = ax^2 + bx + c$.
Пример: $y = x^2$</td><td></td></tr>
</table>

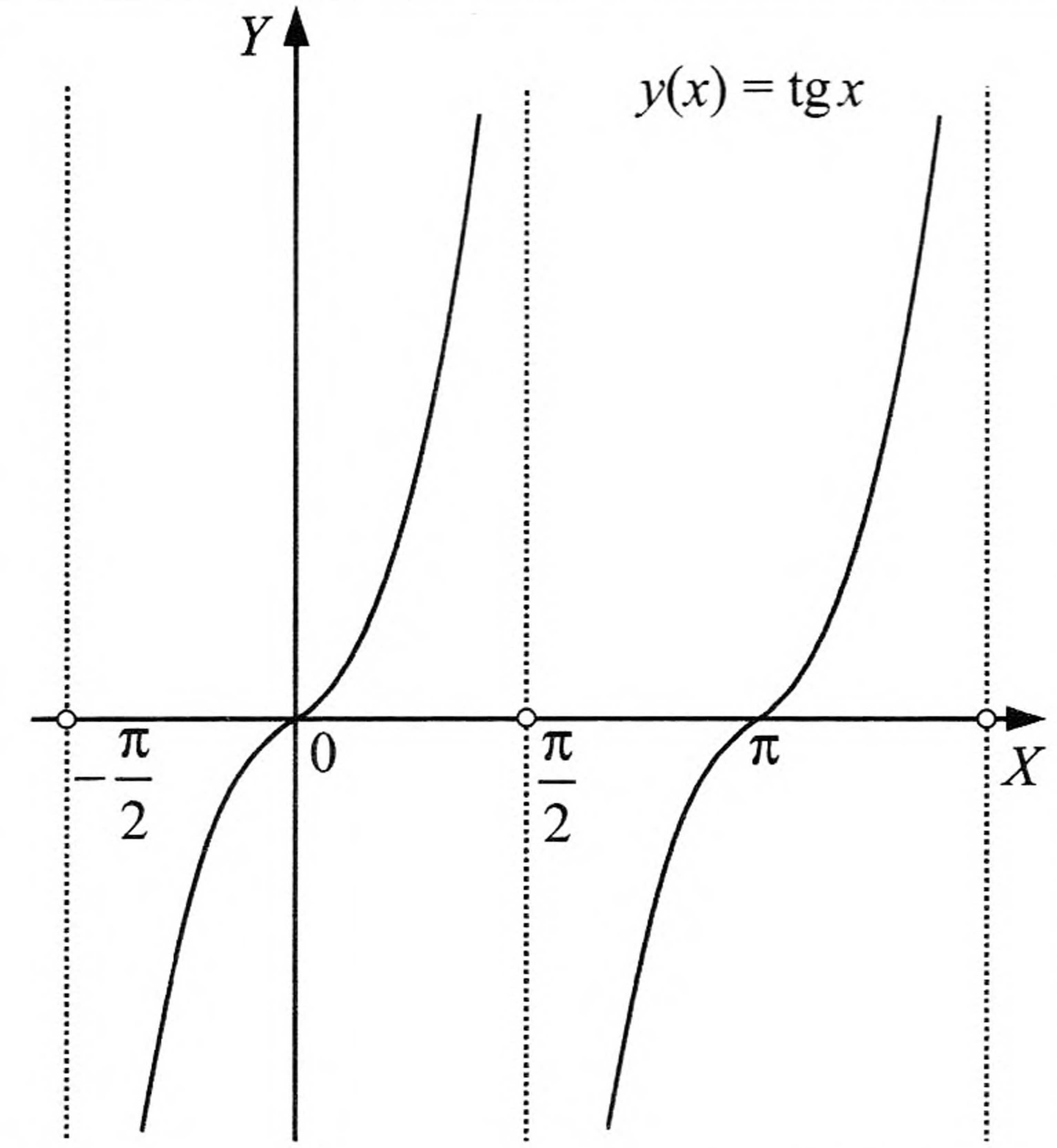
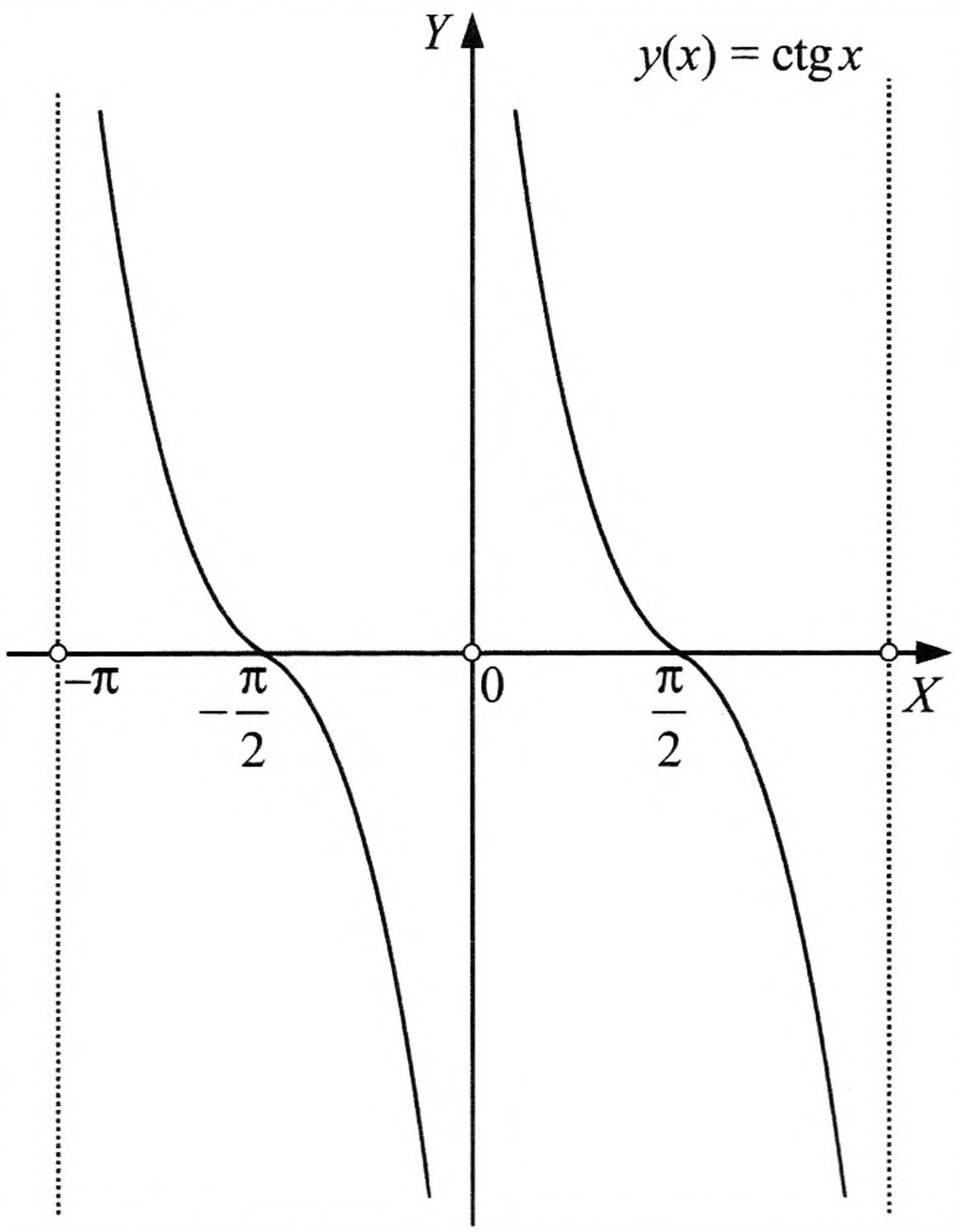
3. Функция $y = x^n$, n — натуральное, $n > 1$ n — четное $n = 2, 4, 6, ...$	
n — нечетное $n = 3, 5, 7, ...$	

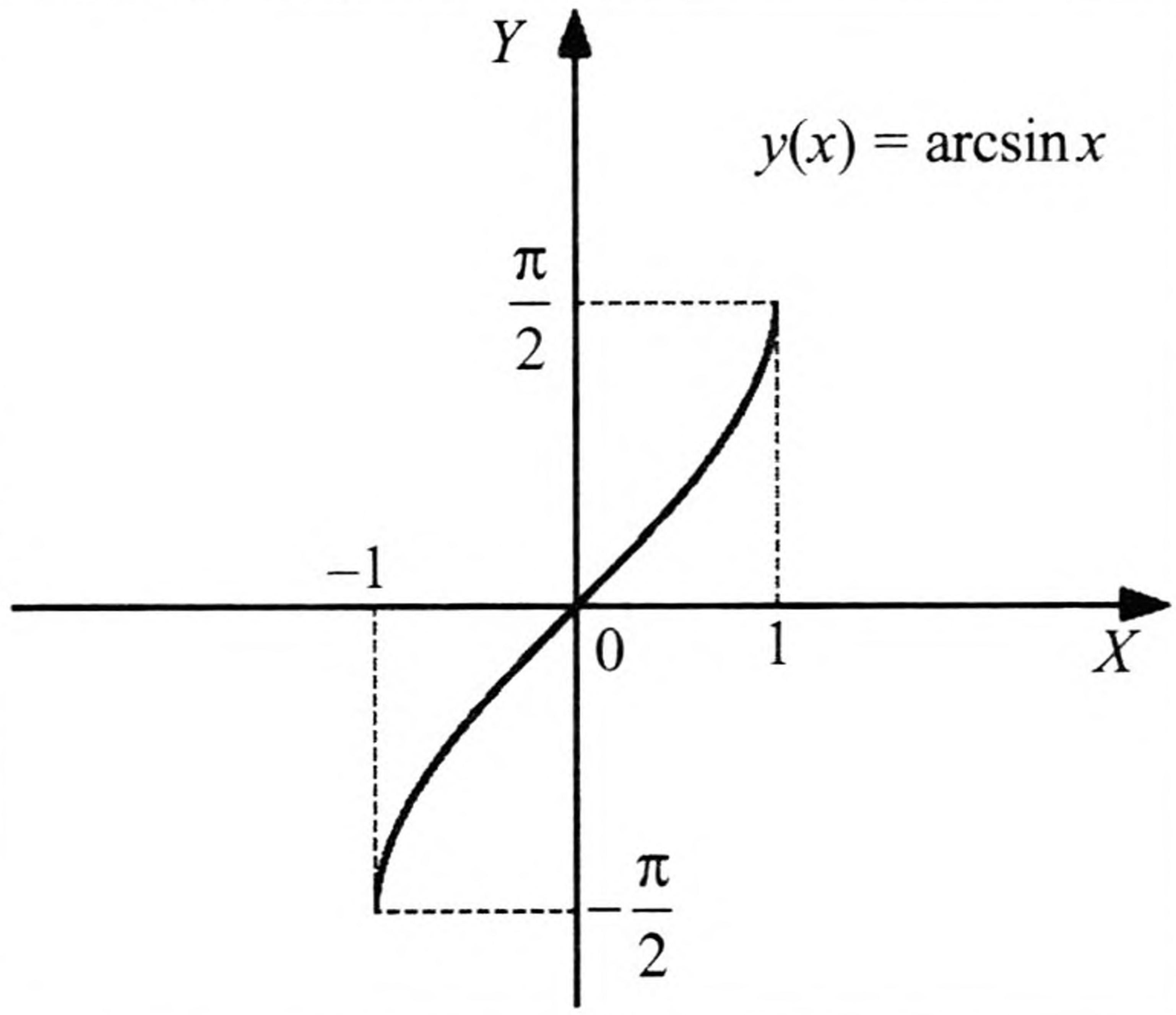
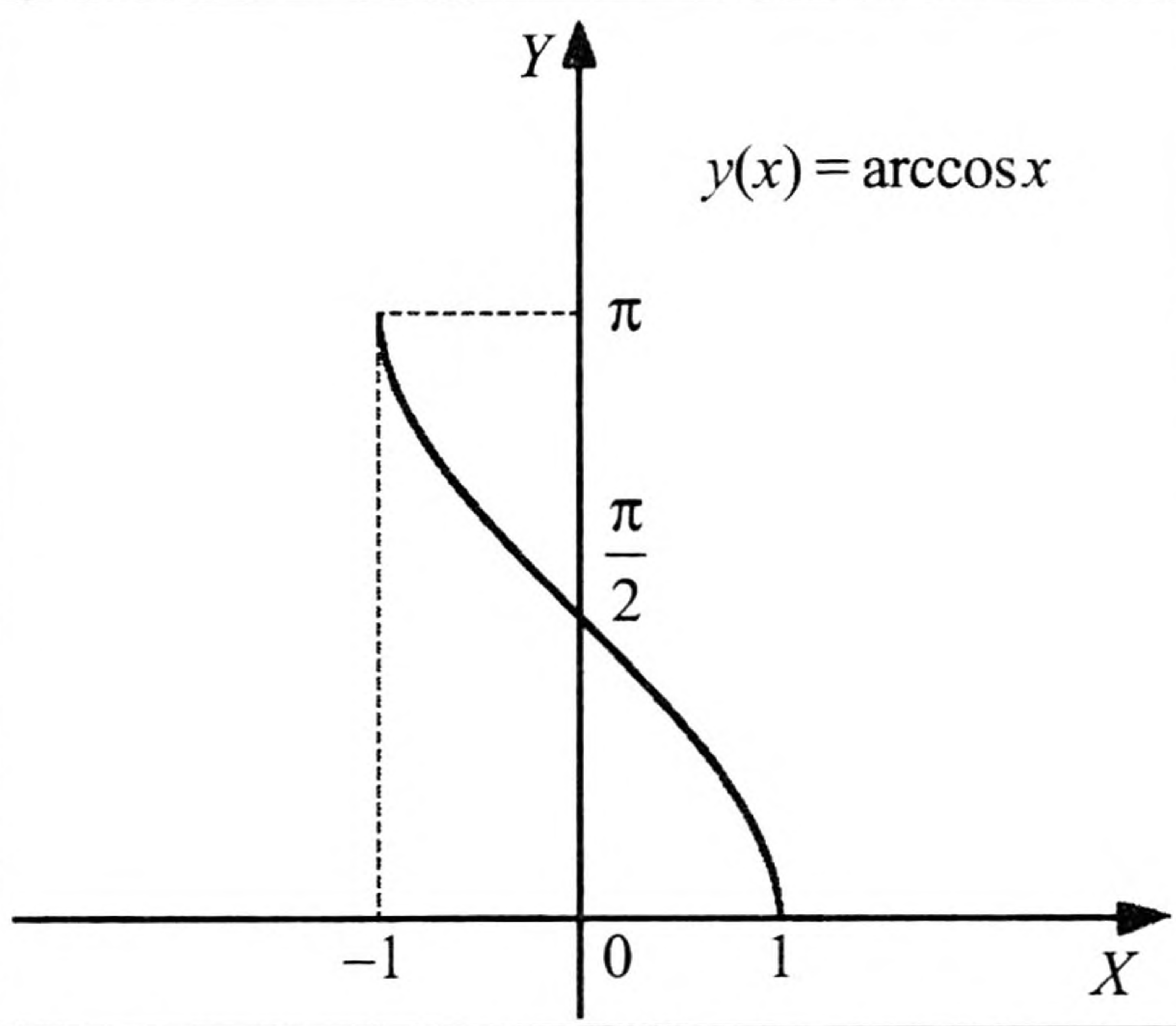
4. Гипербола $y=\frac{k}{x}$. Пример $y=\frac{1}{x}$	
5. $y=\sqrt{x}$	
6. $y=\sqrt[3]{x}$	

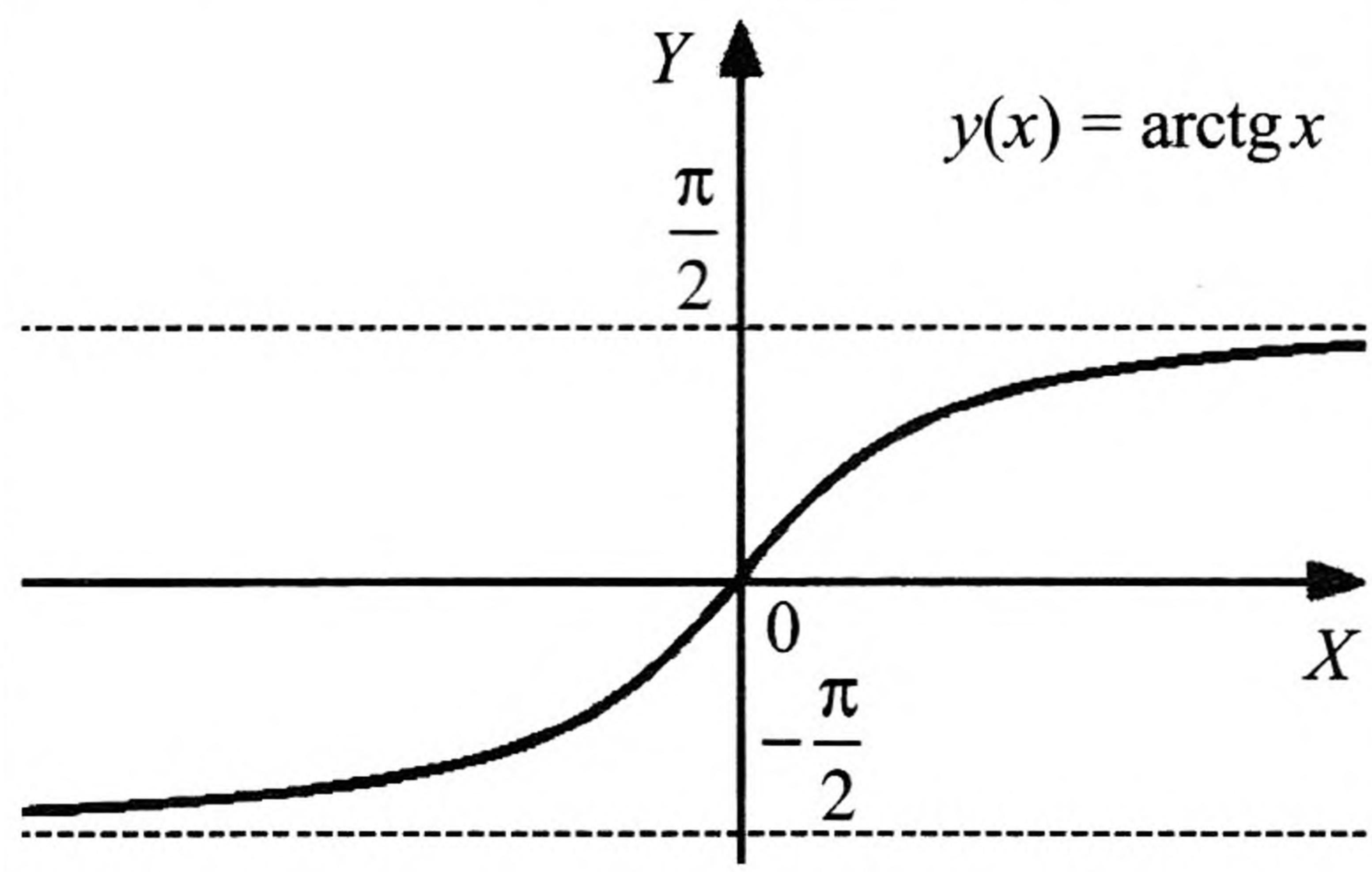
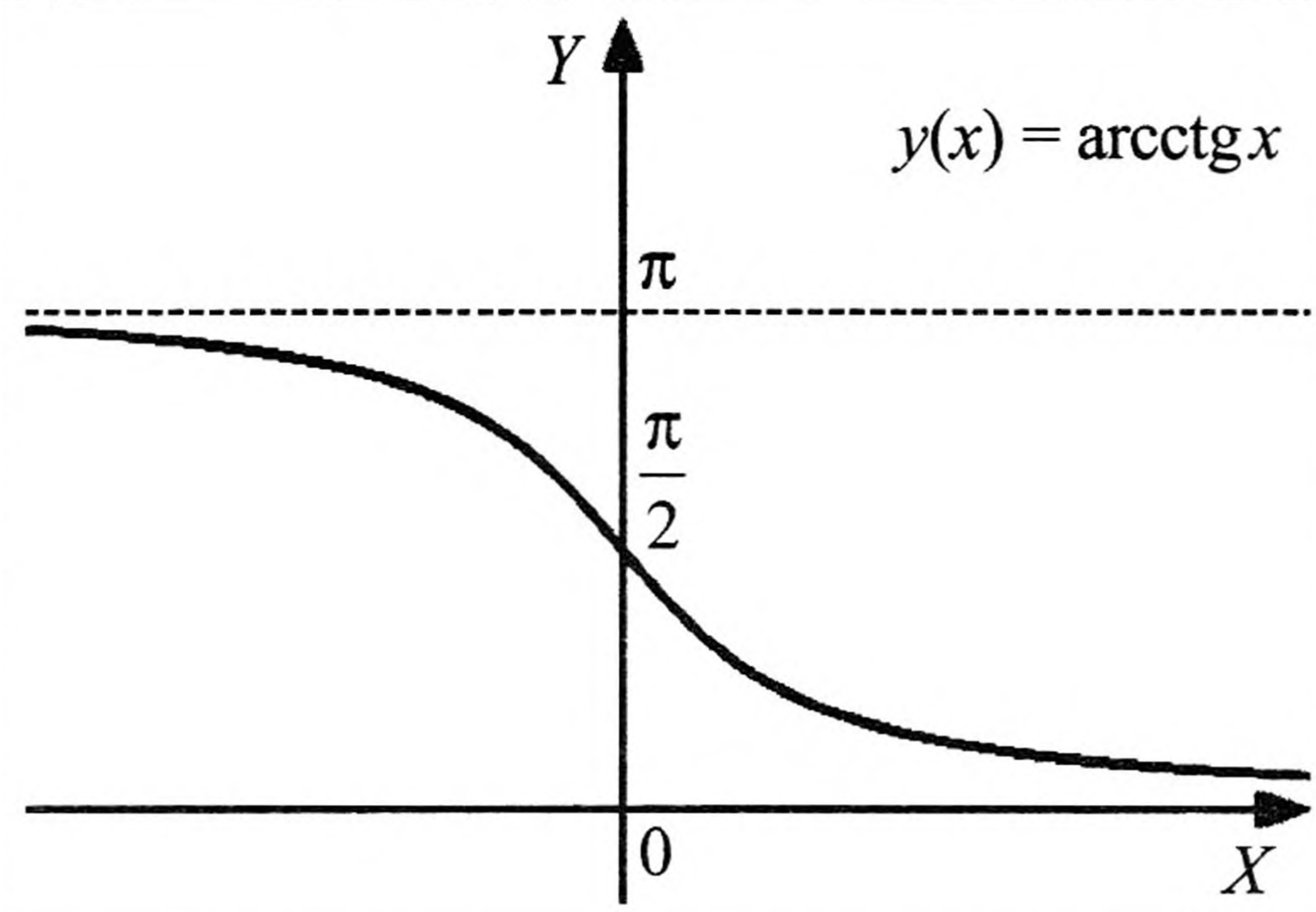
<table>
<tr><th colspan="2">Показательная функция</th></tr>
<tr><td>$y = a^x$
$a > 1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = a^x$
$0 < a < 1$</td><td>
</td></tr>
</table>

Логарифмическая функция	
$y = \log_a x$ $a > 1$	
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$	

Тригонометрические функции	
$y = \sin x$	
$y = \cos x$	

$y = \operatorname{tg} x$	
$y = \operatorname{ctg} x$	

Обратные тригонометрические функции	
$y = \arcsin x$	
$y = \arccos x$	

$y = \operatorname{arctg} x$	
$y = \operatorname{arcctg} x$	

Здесь приведены основные, «базовые» графики. А как будут выглядеть, например, графики функций $y = \sin(2x)$ или $y = 4x^2 + 5$? Об этом — в главе «Преобразования графиков функций».

Обратите внимание: уравнения, которые вы решаете, обычно относятся к одному из этих пяти типов. И для каждого типа есть свои способы решения. Мы подробно рассматривали методы решения показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений. Теперь понятно, почему: они основаны на тех или иных свойствах функций.

Почему в уравнении $3^x = 3^5$ мы можем «отбросить» основания и записать, что $x = 5$? Да потому что показательная функция $y = 3^x$ возрастает и каждое значение принимает только один раз.

Почему уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много решений, которые записываются в виде серии:

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где n — целое? Потому что функция $y = \sin x$ — периодическая, то есть каждое свое значение принимает бесконечно много раз.

Зная графики элементарных функций, вы уже не запутаетесь с ОДЗ уравнений и неравенств. Вы сможете решать сложные задачи графически — а это часто во много раз легче и быстрее, чем аналитически.

Есть еще и такие уравнения, где слева и справа стоят функции разных типов. Для их решения применяется графический способ, а также метод оценки.

Метод оценки

Сейчас мы рассмотрим мощный метод, который применяется, когда в левой и правой частях уравнения или неравенства стоят функции разных типов. Для того чтобы лучше его запомнить, расскажем историю о том, как птичка и рыбка полюбили друг друга.

1. Рассмотрим уравнение

$$2^{\left(\sqrt{3}-\cos 10\pi x\right)\left(\sqrt{3}+\cos 10\pi x\right)} = 8 + (20x+3)^2.$$

Оно отлично подходит для первого знакомства с методом оценки — конечно, если вы уже уверенно решаете алгебраические, тригонометрические и показательные уравнения.

Что делать с этим уравнением? Конечно же, упростим его. Сделаем те преобразования, которые можно сделать сразу.

$$2^{\left(\sqrt{3}-\cos 10\pi x\right)\left(\sqrt{3}+\cos 10\pi x\right)} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$2^{3-\cos^2 10\pi x} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi x}} = 8 + (20x+3)^2.$$

Смотрим внимательно. В левой и правой части появились восьмерки. И это добрый знак!

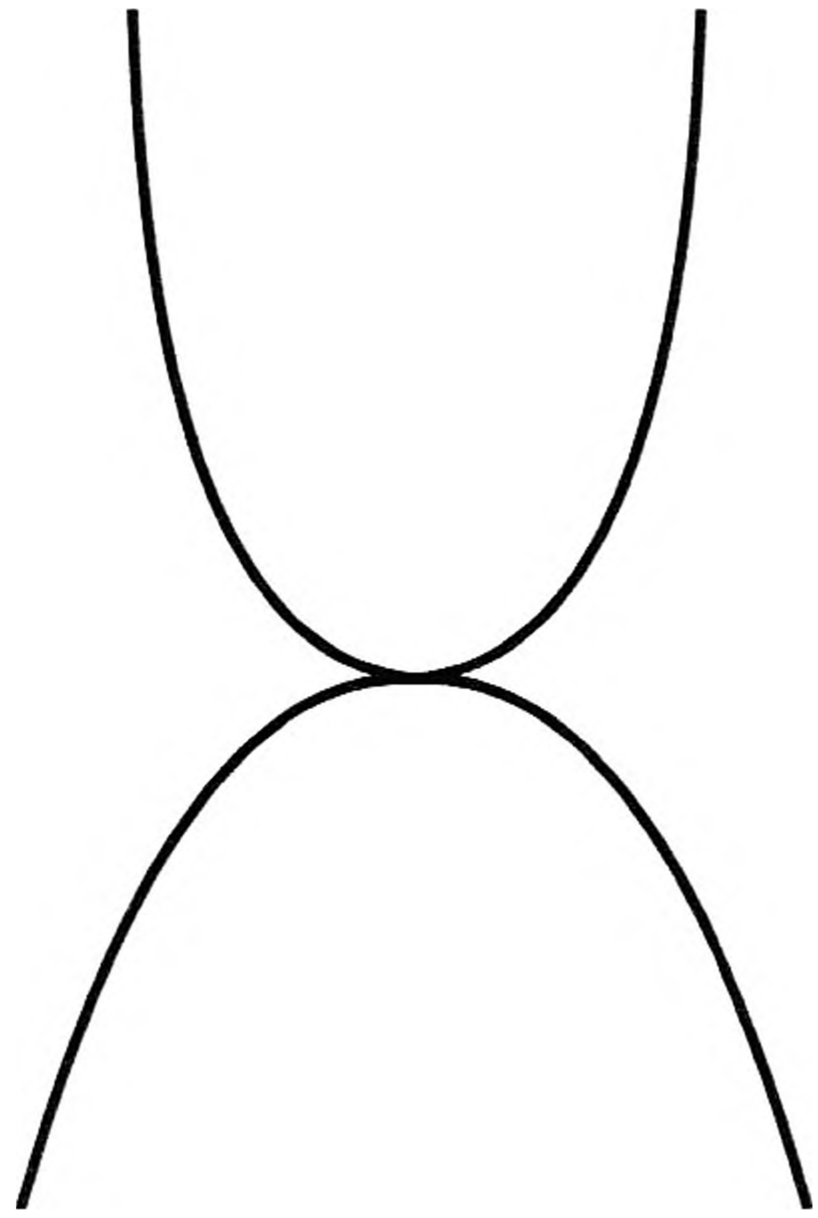
Дело в том, что перед составителями заданий второй части ЕГЭ стоит нетривиальная задача: с одной стороны, им надо составить сложные задания. С другой — сделать так, чтобы подготовленный школьник (такой, как вы) все же смог их решить.

Поэтому в сложных задачах части часто оставляют «подсказки» — специально для вас, дорогие друзья! Торчащие ниточки, хвостики, за которые, как в детективном сюжете, можно потянуть и распутать весь клубок. Например, вы вдруг замечаете, что одна из частей уравнения является полным квадратом. Или видите одинаковые коэффициенты в левой и правой частях, что наводит на мысль об удачной замене. А в данном уравнении подсказка — вот эти восьмерки слева и справа.

В левой и правой частях нашего уравнения находятся функции разных типов. Это уравнение бесполезно возводить в квадрат или делать с ним арифметические действия. Бесполезно брать логарифмы от обеих частей — от всего этого оно станет только хуже.

Метод оценки применяется для уравнений и неравенств, где функции, стоящие в левой и правой части, могут быть равны друг другу только в определенной точке, причем одна из них принимает в этой точке наименьшее значение, а другая — наибольшее.

Вот как это выглядит:



А чтобы лучше запомнить суть метода, рассказываем историю.

Глубоко-глубоко в море жила маленькая рыбка. А высоко-высоко в небе жила маленькая птичка. И однажды они полюбили друг друга! А встретиться они могли только в одной точке, на границе моря и неба, до которой рыбке надо подняться, а птичке — спуститься!

О чем эта история? О нашем уравнении, конечно! В левой и правой его частях находятся функции разных типов. И при определенном значении x они оказались равны друг другу. Легко заметить, что значения выражения в левой части всегда больше либо равны восьми («птичка»), значения выражения в правой части — меньше либо равные восьми («рыбка»). И возможно, есть такая точка, где у одной из этих функций будет минимум, а у другой — максимум, причем значение каждой из них станет равно восьми.

Нам осталось только проверить, что эта точка действительно есть. Приравняем правую часть к восьми.

$$8+(20x+3)^2=8;$$

$$(20x+3)^2=0;$$

$$x=-\frac{3}{20}=-0,15.$$

Подставив $x=-0,15$ в левую часть, получим, что и она равна восьми при этом значении x. Значит, $x=-0,15$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: $x=-0,15$.

2. Вот еще одна задача на метод оценки.

$$7^{-|x-3|}\cdot\log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 1.$$

Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $7^{|x-3|}$:

$$\log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 7^{|x-3|}.$$

В левой и правой частях полученного неравенства оказались функции разных типов. Метод оценки!

Выделим под логарифмом полный квадрат:

$$6x-x^2-7=2-\left(x^2-6x+9\right)=2-(x-3)^2.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2\left(2-(x-3)^2\right) \geq 7^{|x-3|}.$$

Наибольшее значение выражения под логарифмом равно 2. Стало быть, наибольшее значение логарифма равно $\log_2 2$, то есть 1, и достигается оно при единственном значении $x = 3$.

В то же время, наименьшее значение выражения $7^{|x-3|}$ также равно 1, и достигается оно при том же единственном значении $x = 3$.

Поэтому последнее неравенство будет выполнено лишь в одном-единственном случае: когда обе его части равны 1, т. е. при $x = 3$. Решением данного неравенства служит единственное число!

Ответ: $x = 3$.

Кратко повторим основные тезисы этой главы:

1. В сложных задачах части 2 вариантов ЕГЭ чаще всего специально для вас оставляют подсказки. Учитесь ими пользоваться!
2. Если в левой и правой частях уравнения находятся функции разных типов — значит, это уравнение надо решать либо графически, либо методом оценки.
3. Как правило, здесь находится единственное значение x, при котором левая и правая части равны друг другу.

Преобразование графиков функций

Покажем, как на основе графика какой-либо элементарной функции построить графики более сложных функций.

Взяв обычную параболу или синусоиду, можно сдвинуть ее вправо, влево, вверх или вниз, растянуть ее или сжать по горизонтали, а также по вертикали. Можно еще отразить ее относительно оси X или оси Y. **С графиком функции мы можем сделать те же действия, что и с изображением в Фотошопе или другом графическом редакторе!**

И все эти преобразования определенным образом задаются в формуле функции.

1. Сдвиг графика по горизонтали.

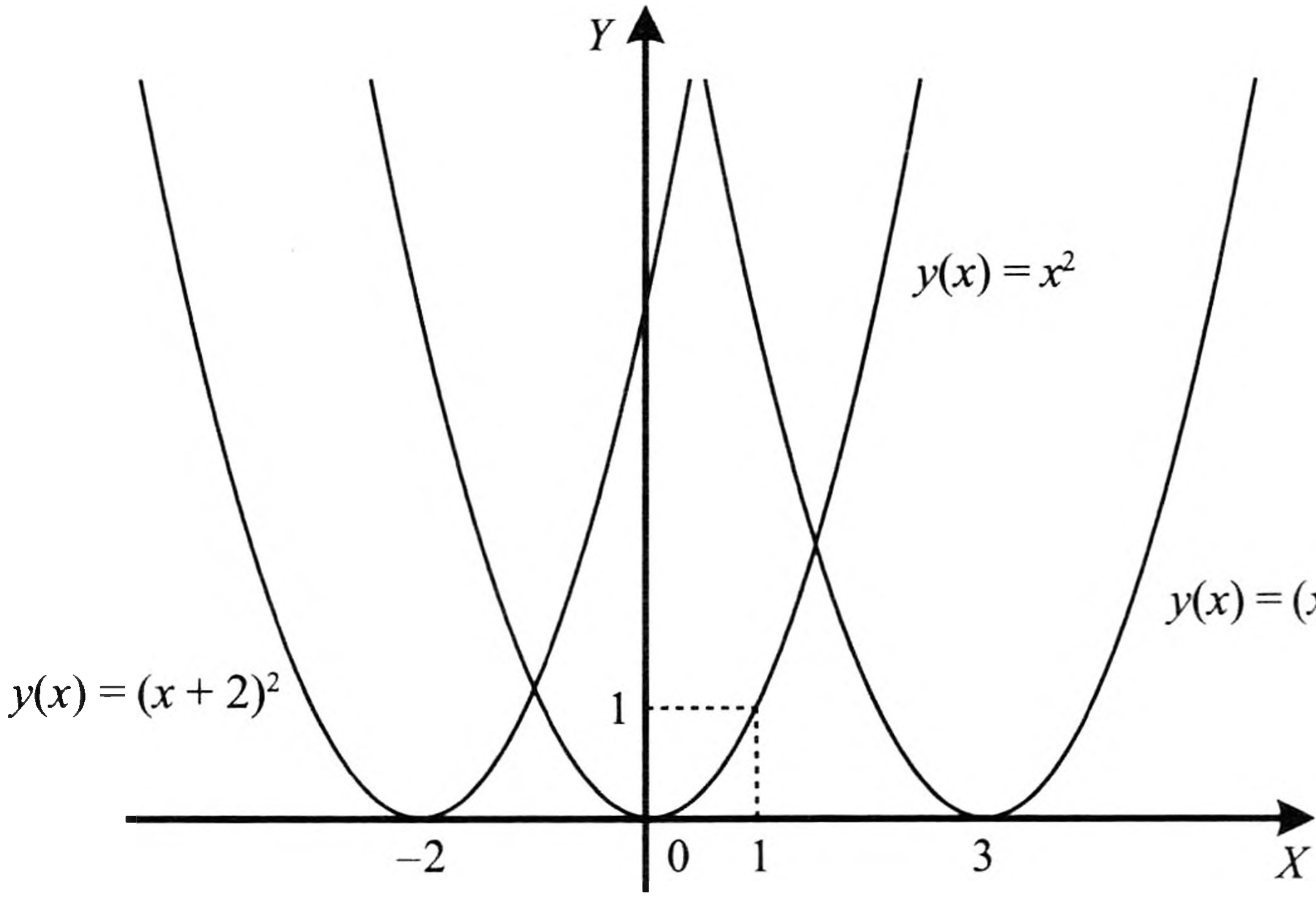
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ будет сдвинут относительно исходного на a вправо. График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходного на a влево.

На рисунке изображены графики трех функций.

$y = x^2$. Знакомая нам парабола, симметричная относительно оси Y.

$y = (x - 3)^2$. Такая же квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вправо.

$y = (x + 2)^2$. Такая же парабола, сдвинутая на 2 влево.



2. Сдвиг графика по вертикали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и A — некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x) + A$ будет сдвинут относительно исходного на A вверх. График функции $y = f(x) - A$ сдвинут относительно исходного на A вниз.

Посмотрим на рисунок.

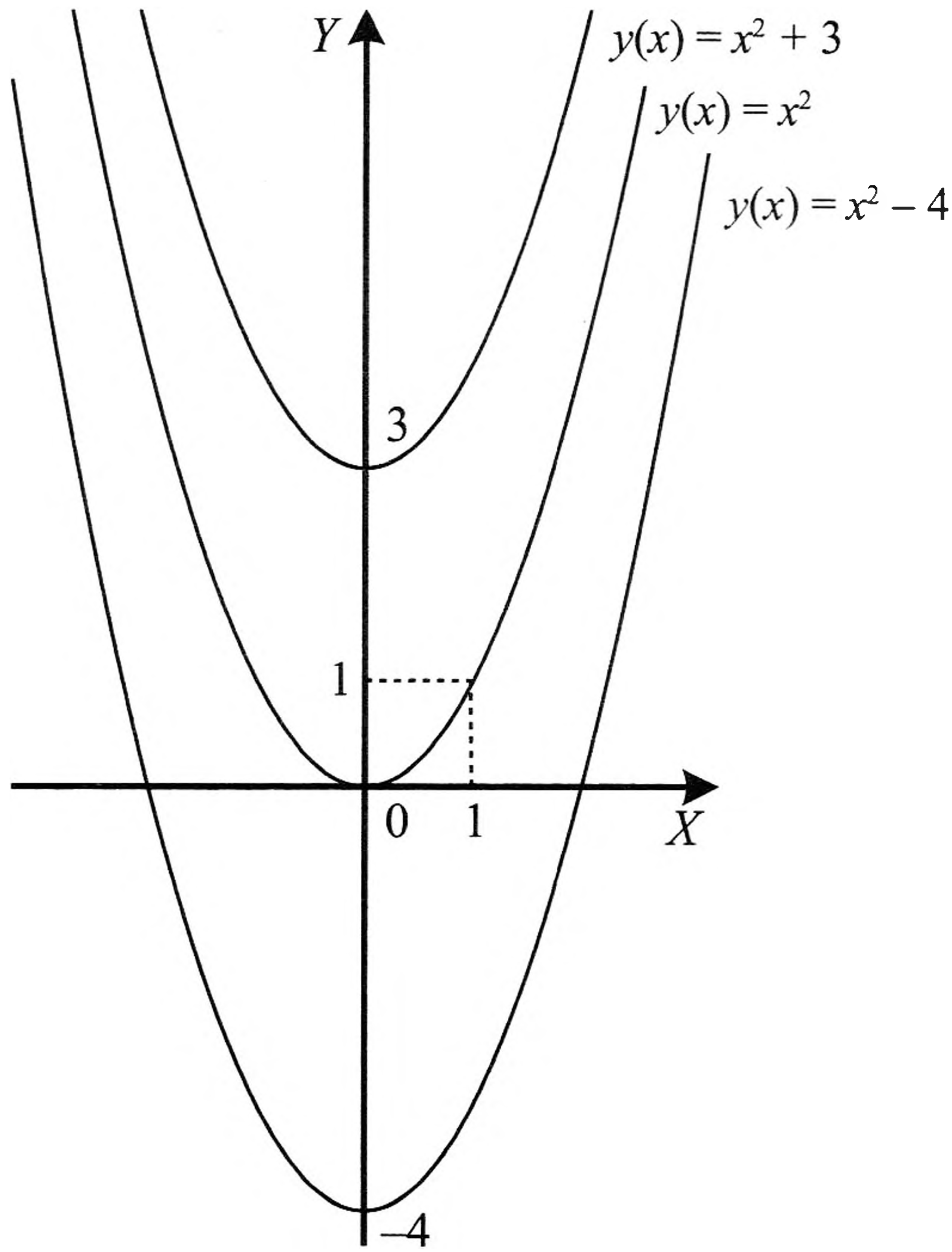
$y = x^2$. Обычная парабола.

$y = x^2 + 3$. Квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вверх.

$y = x^2 - 4$. Квадратичная парабола, сдвинутая на 4 вниз.

Как вы думаете, в чем разница между этим преобразованием и тем, которое мы рассмотрели в пункте 1?

Разница в порядке действий!



Строя график функции $y = (x - 3)^2$, мы сначала вычисляем $x - 3$, потом возводим результат в квадрат. График этой функции — квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вправо по X.

Строя график $y = x^2 + 3$, сначала вычисляем x^2, потом к результату прибавляем 3. Получаем квадратичную параболу, сдвинутую на 3 вверх по Y.

Итак, если некоторое число прибавляется к аргументу x (или вычитается из него), то сдвиг будет по оси X. Если сначала вычислили значение функции (в данном случае x^2), а потом прибавили (или вычли) некоторое число, то сдвиг будет по Y.

3. Растяжение (сжатие) по горизонтали.

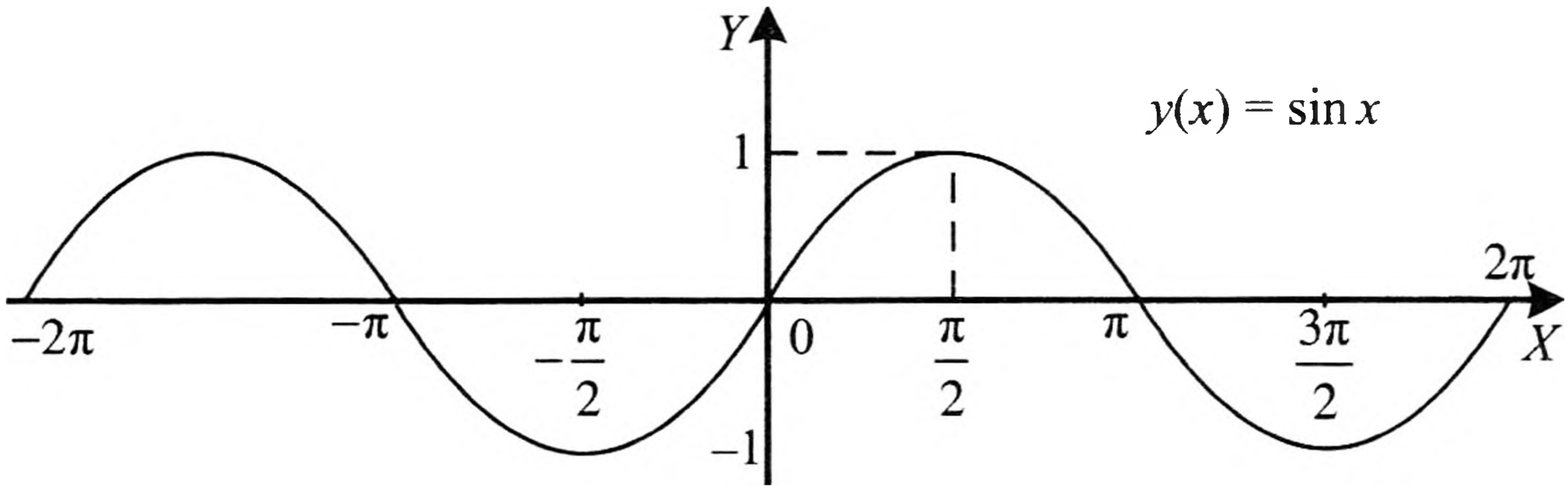
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции $y = f(kx)$ будет растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.

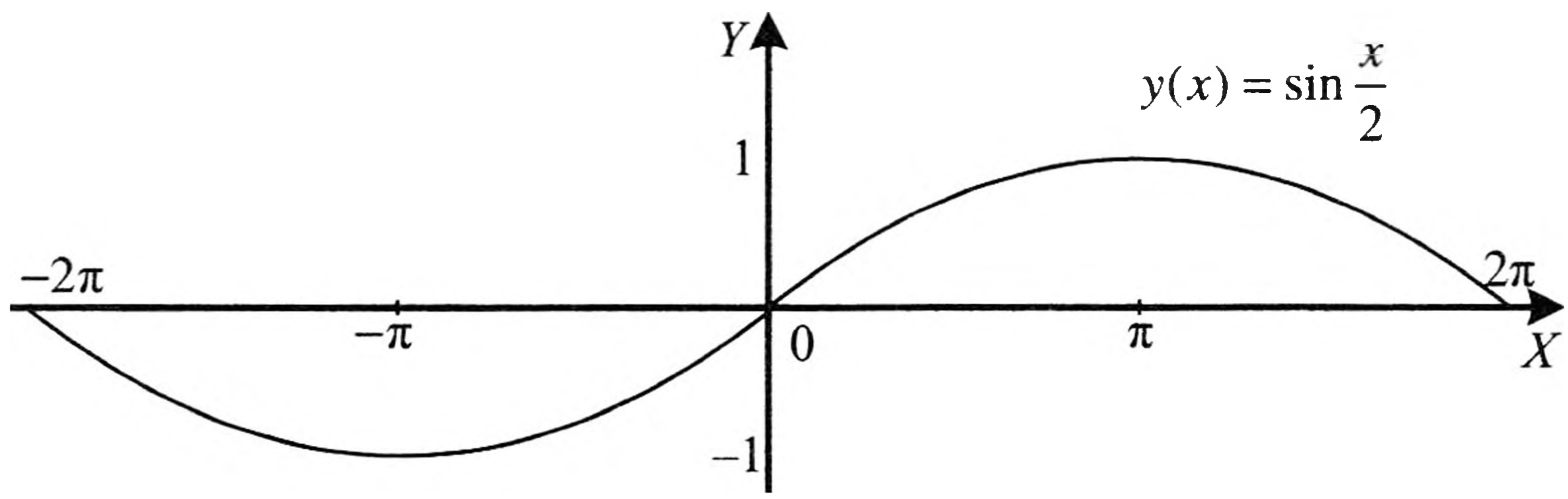
На рисунке изображены графики трех функций.

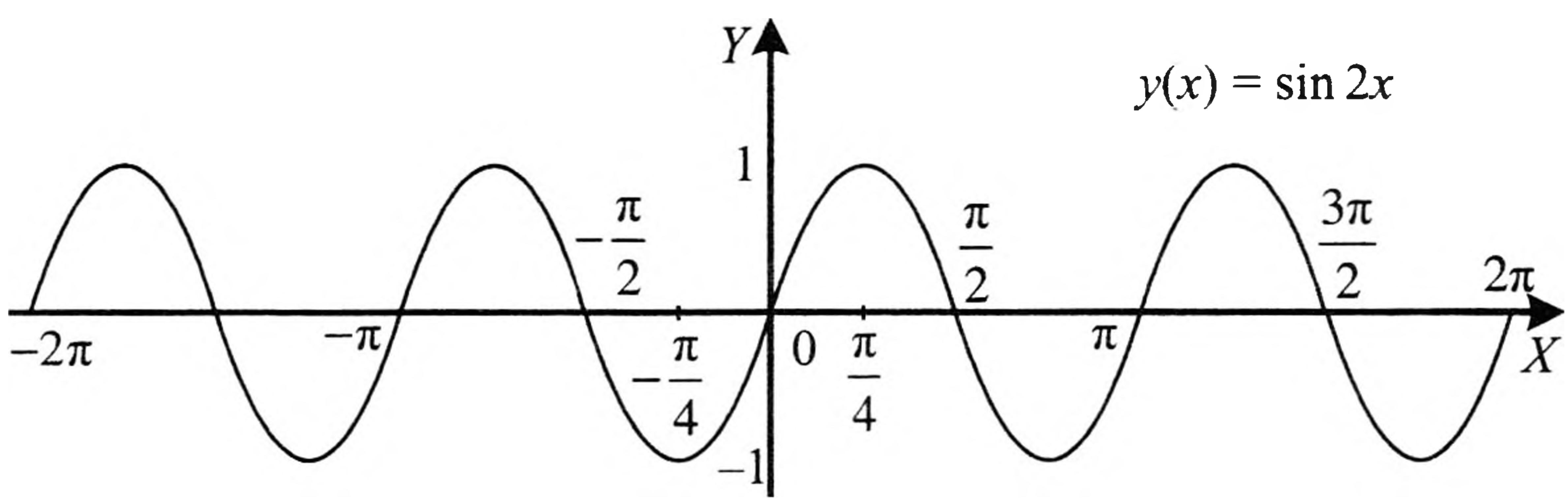
$y = \sin x$ — обычная синусоида,

$y = \sin \frac{1}{2} x$ — синусоида растянута в 2 раза по горизонтали, период для этой функции равен 4π.

$y = \sin 2x$ — синусоида сжата в 2 раза по горизонтали. Физик сказал бы, что здесь по сравнению с функцией $y = \sin x$ частота увеличилась в 2 раза, а период уменьшился в 2 раза.







4. Растяжение (сжатие) по вертикали.

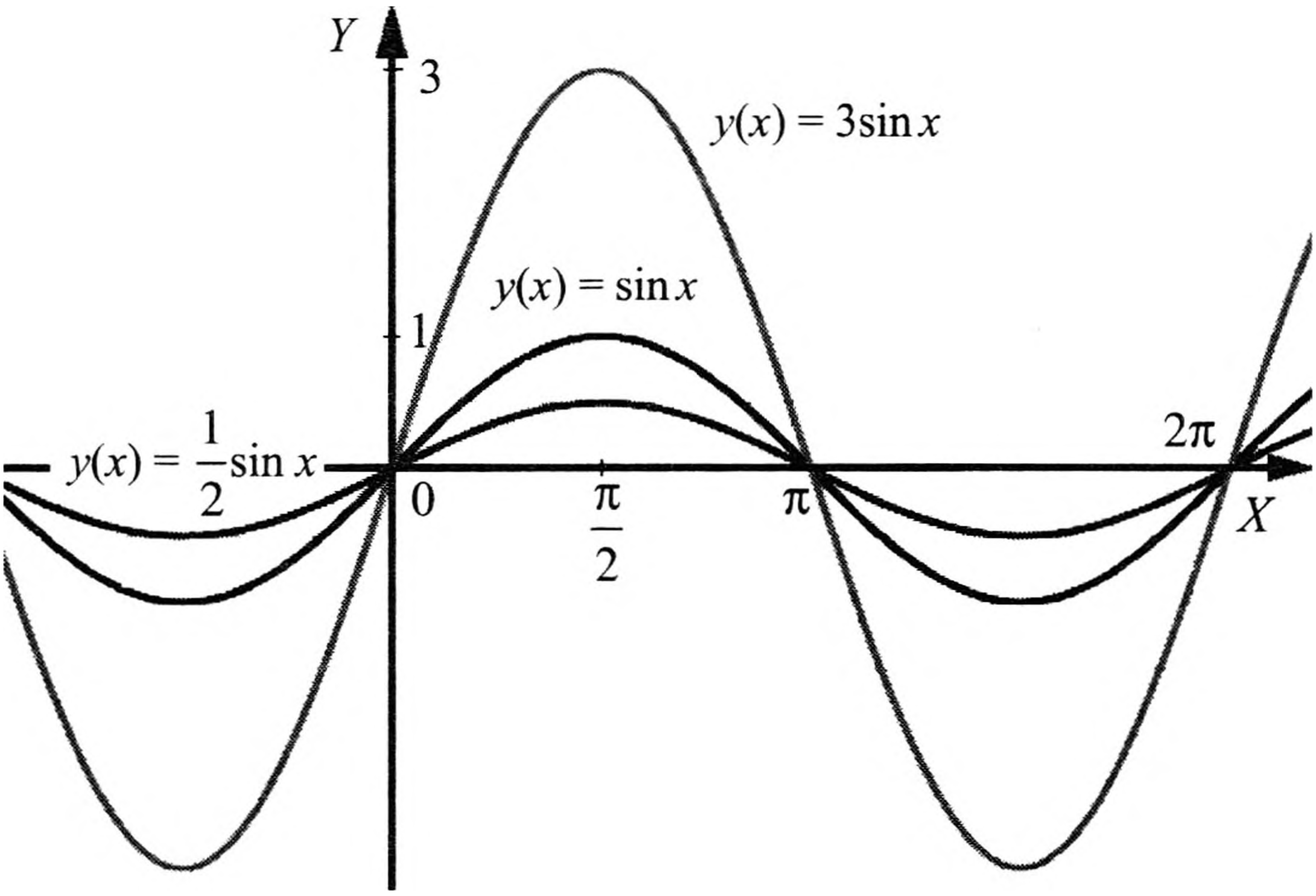
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $C > 0$. Тогда график функции $y = C f(x)$ будет растянут относительно исходного в C раз по вертикали, если $C > 1$, и сжат относительно исходного в C раз по вертикали, если $0 < C < 1$.

На рисунке изображены графики трех функций.

$y = \sin x$ — обычная синусоида,

$y = \frac{1}{2}\sin x$ — синусоида сжата в 2 раза по вертикали. Можно сказать, что ее амплитуда в 2 раза меньше, чем у функции $y = \sin x$.

$y = 3\sin x$ — синусоида растянута в 3 раза по вертикали. Здесь амплитуда в 3 раза больше, чем у функции $y = \sin x$.



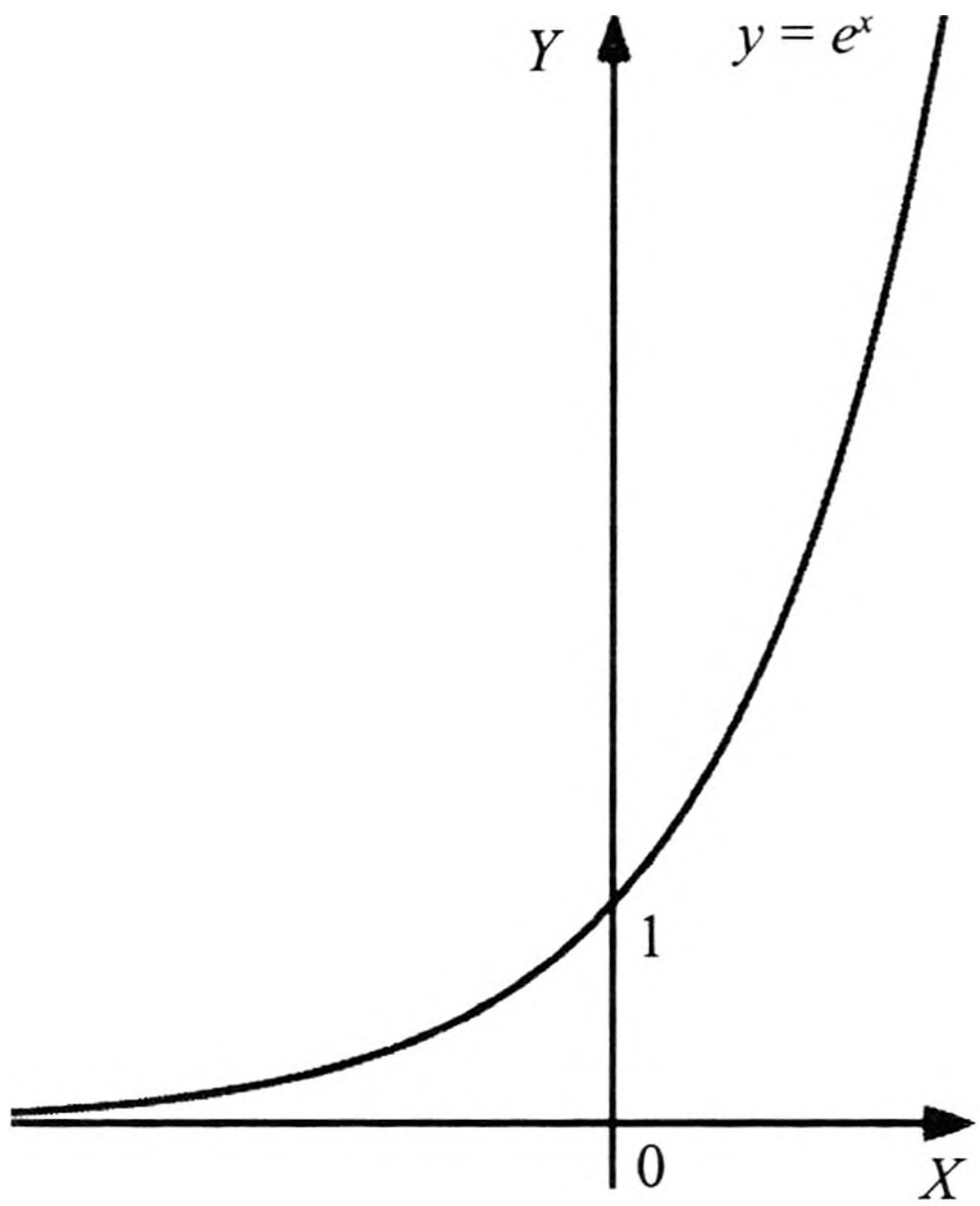
Заметим, что и здесь та же зависимость от порядка действий. Если аргумент функции умножить на какое-либо число, то растяжение (сжатие) будет по X, то есть по горизонтали. Если функцию $f(x)$ умножить на какое-либо число, растяжение (сжатие) графика происходит по Y.

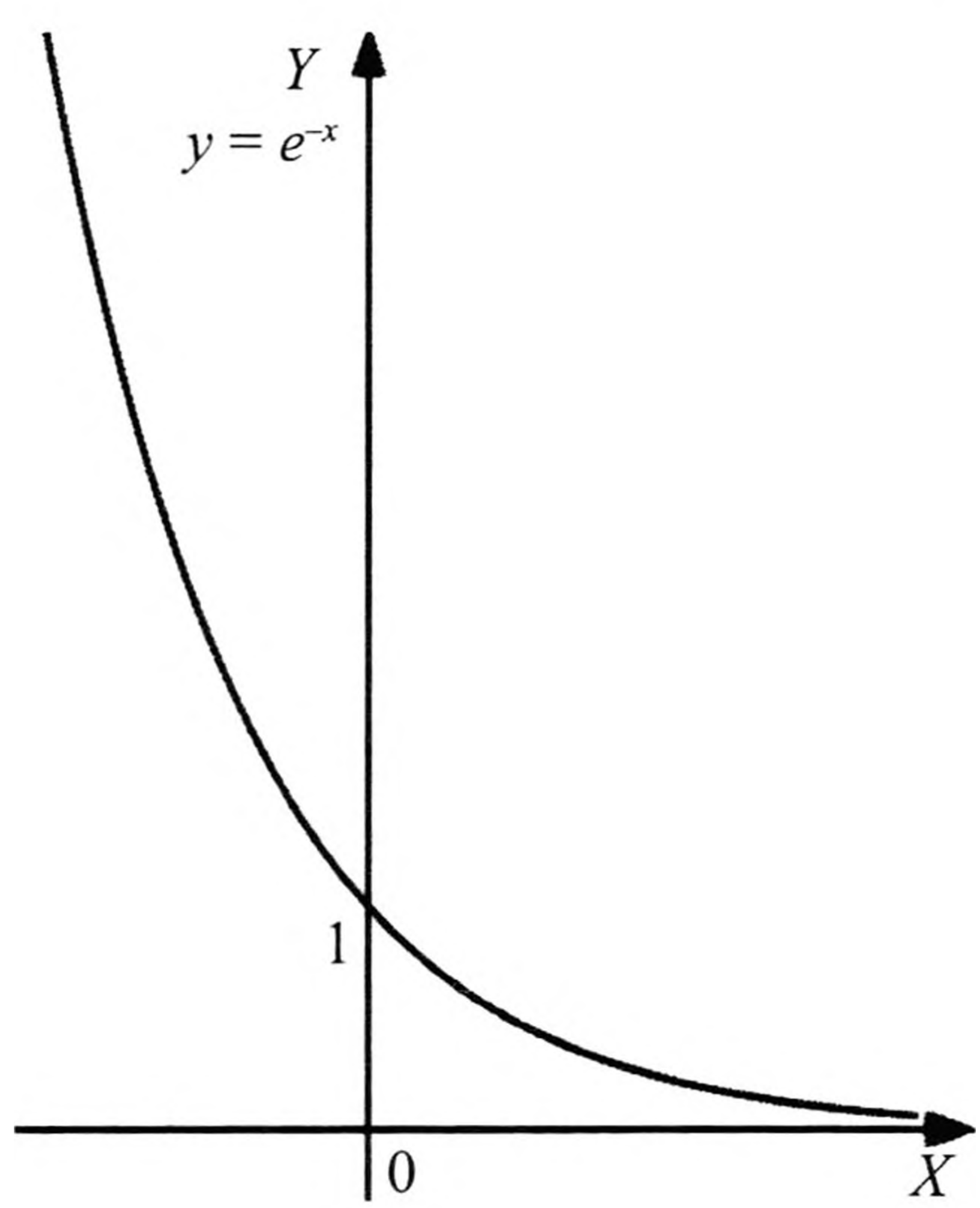
Отражение по горизонтали

Продолжим нашу аналогию с графическим редактором. Помните, в графическом редакторе есть функции «отразить рисунок по горизонтали» и «отразить по вертикали». А как это выглядит математически?

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Y.

Вот на рисунке графики функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

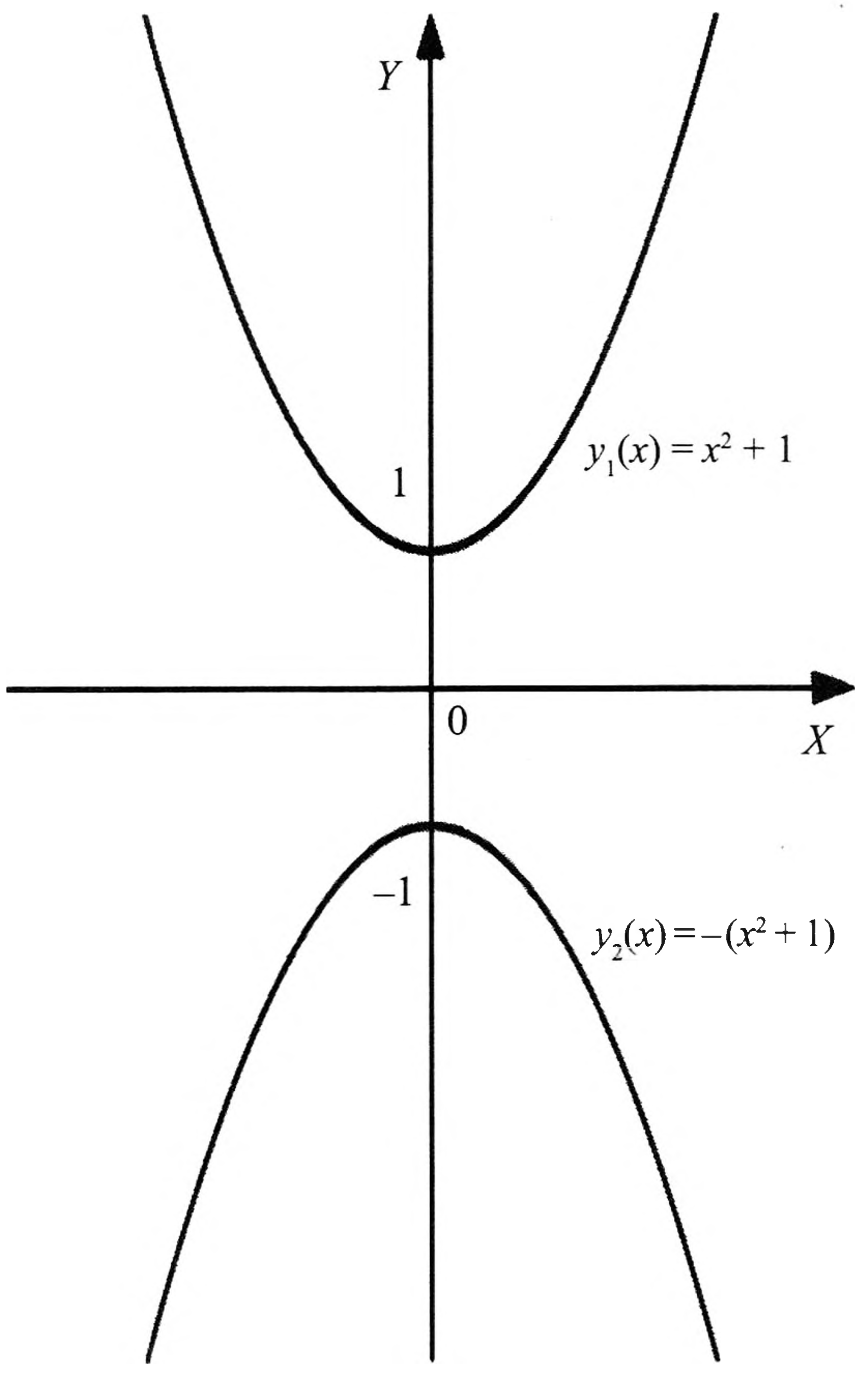




Отражение по вертикали

Осталось отражение по вертикали. Как вы догадались, для того чтобы отразить график функции по вертикали, перед функцией надо поставить знак «минус».

На рисунках — графики функций $y_1 = x^2 + 1$ и $y_2 = -(x^2 + 1)$.

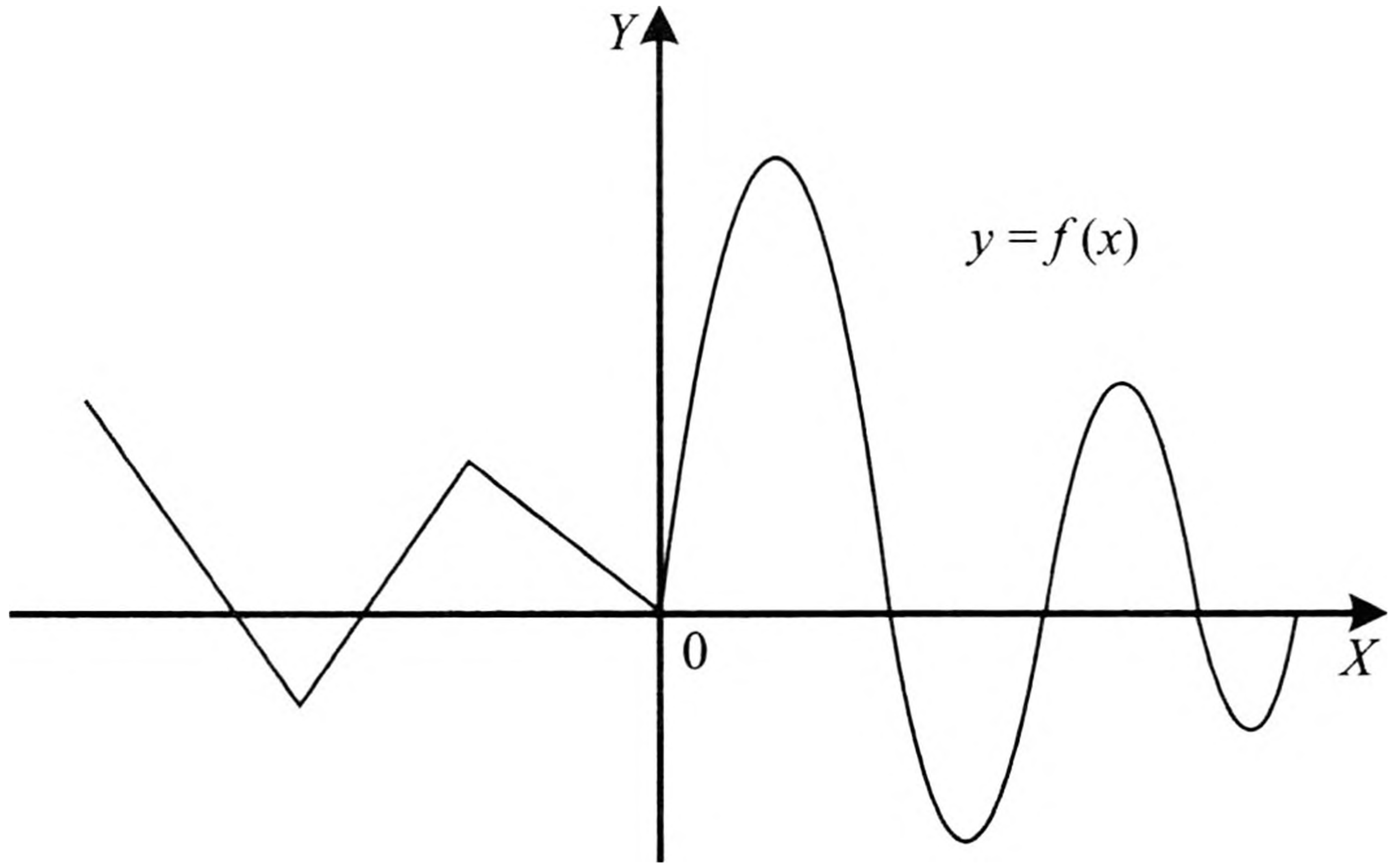


Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Вспомним определение модуля.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

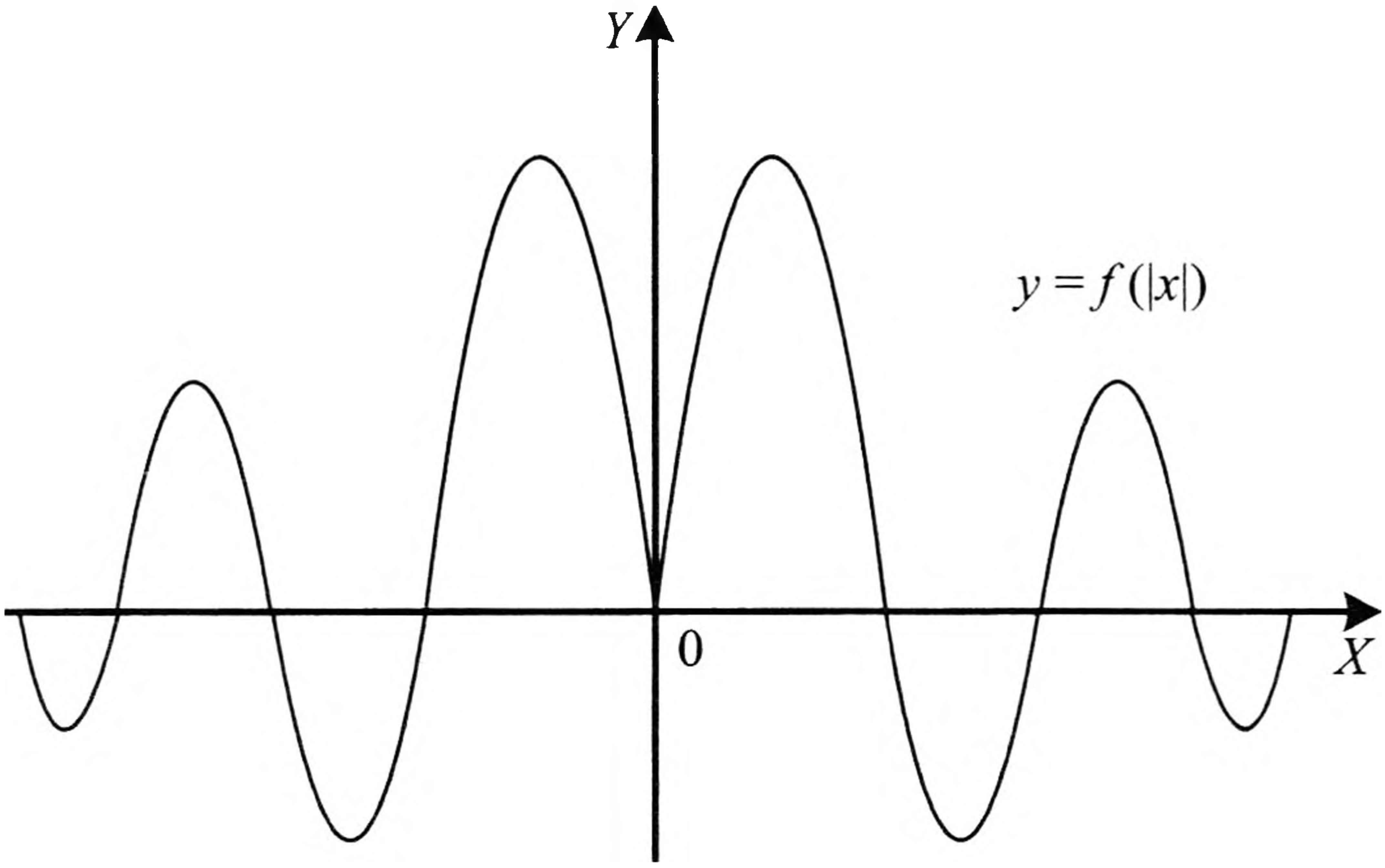
На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$.



Как же будет выглядеть график функции $y = f(|x|)$?

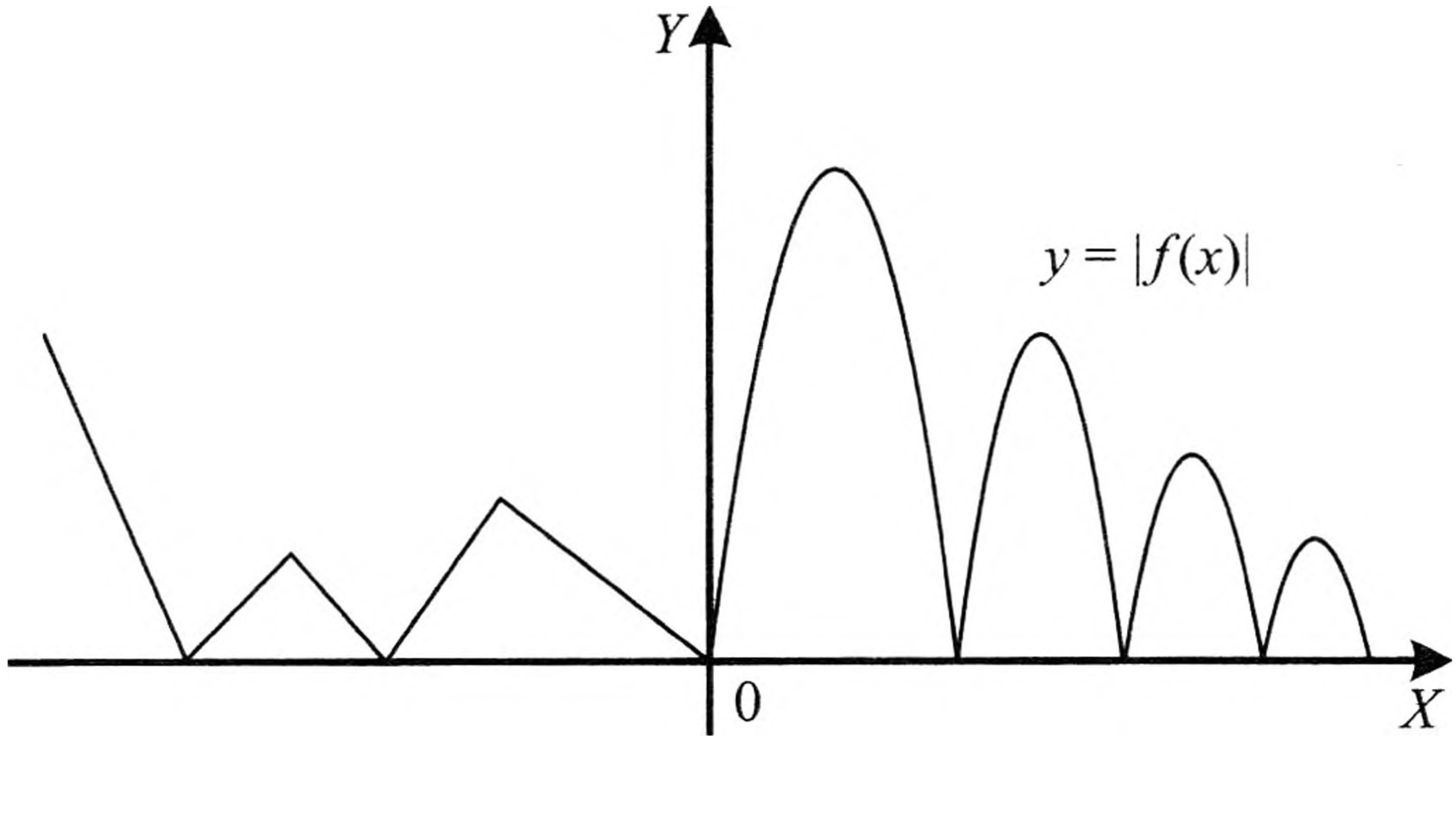
Поскольку $|x| = x$, если $x \geq 0$, вся часть графика функции $y = f(x)$, находящаяся справа от оси Y, останется на месте. Что же касается части графика слева от оси Y — она исчезнет! Вместо нее появится симметрично отраженная правая часть графика.

Действительно, если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит, вместо каждого отрицательного x мы берем противоположное ему положительное значение и вычисляем значение функции в это точке.



Постройте самостоятельно графики функций $y = |x|^3$ и $y = \sqrt{|x|}$.

А теперь график функции $y = |f(x)|$. Чувствуете разницу? Порядок действий другой. Сначала мы строим график функции $y = f(x)$. Затем, согласно определению модуля, вся часть графика, лежащая выше оси X, остается на месте. Ведь для этих значений $f(x) \geq 0$, значит, $|f(x)| = f(x)$. А часть графика, лежащая ниже оси X, отражается симметрично вверх относительно оси X.

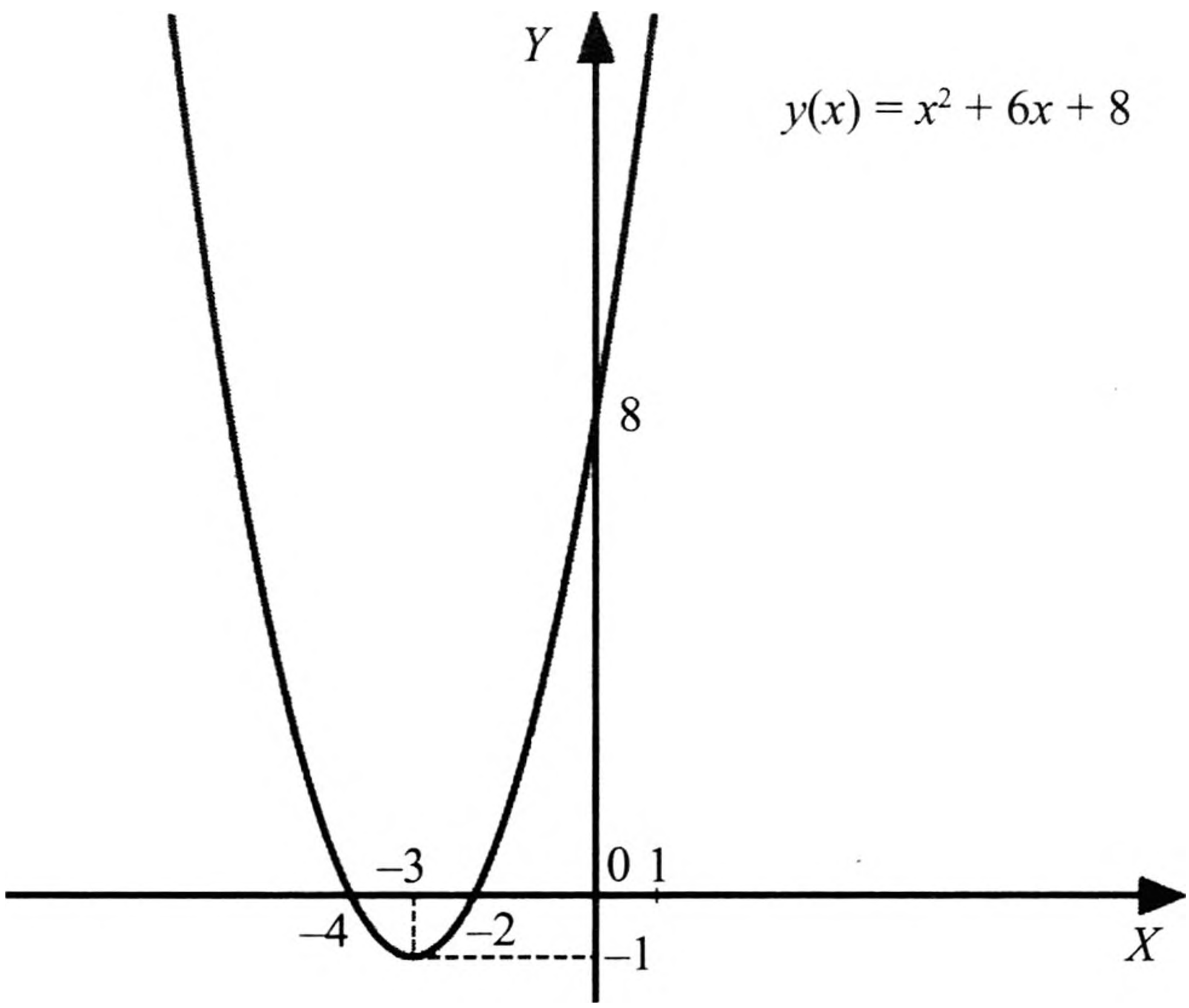


Рассмотрим несколько примеров.

1. Построим график функции $y = x^2 + 6x + 8$.

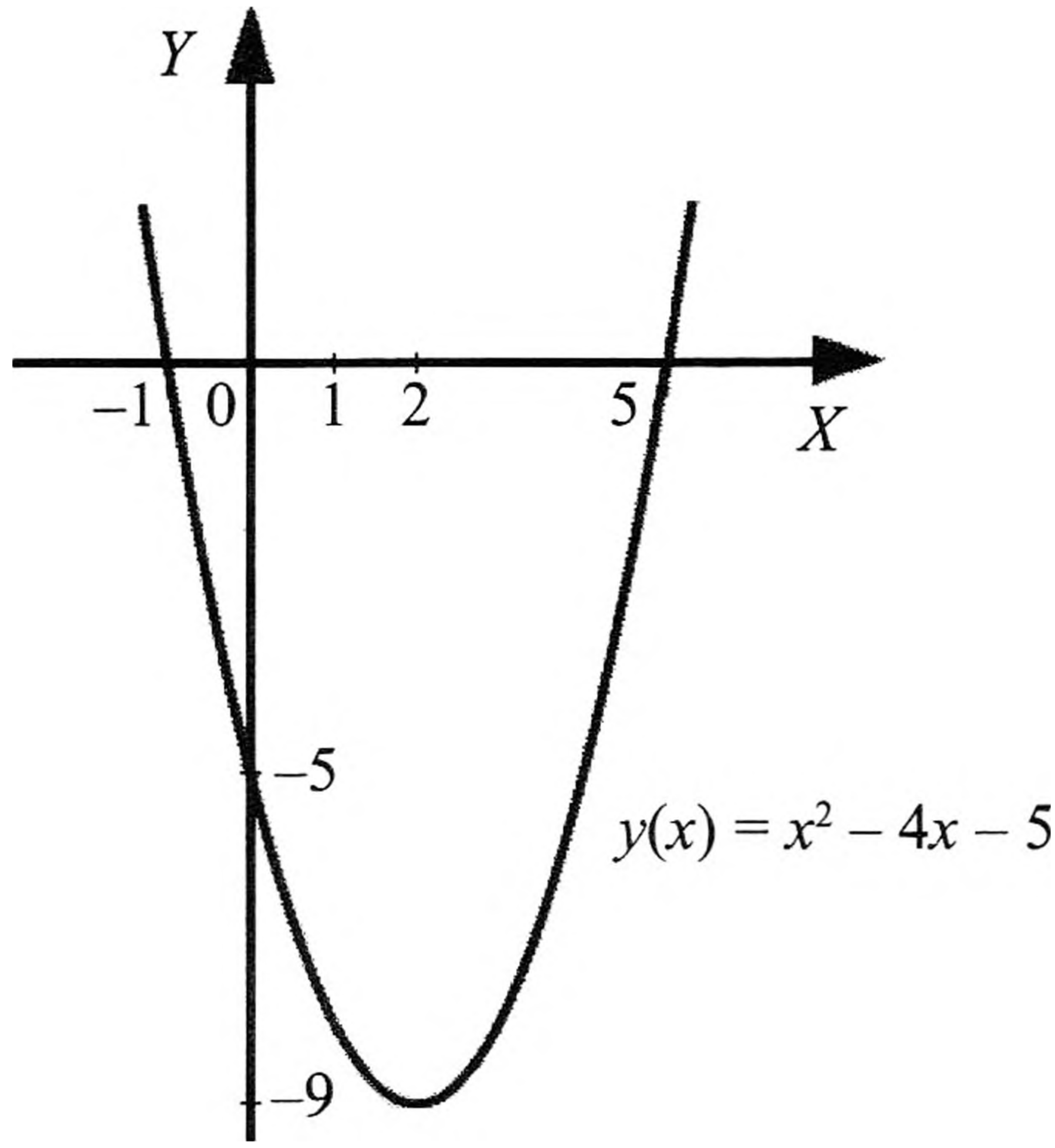
Выделим из выражения $x^2 + 6x + 8$ полный квадрат.
$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x \cdot 3 + 9 - 1 = (x + 3)^2 - 1$.

Графиком функции $y = (x + 3)^2 - 1$ является квадратичная парабола $y = x^2$, сдвинутая на 3 единицы влево и на 1 единицу вниз.

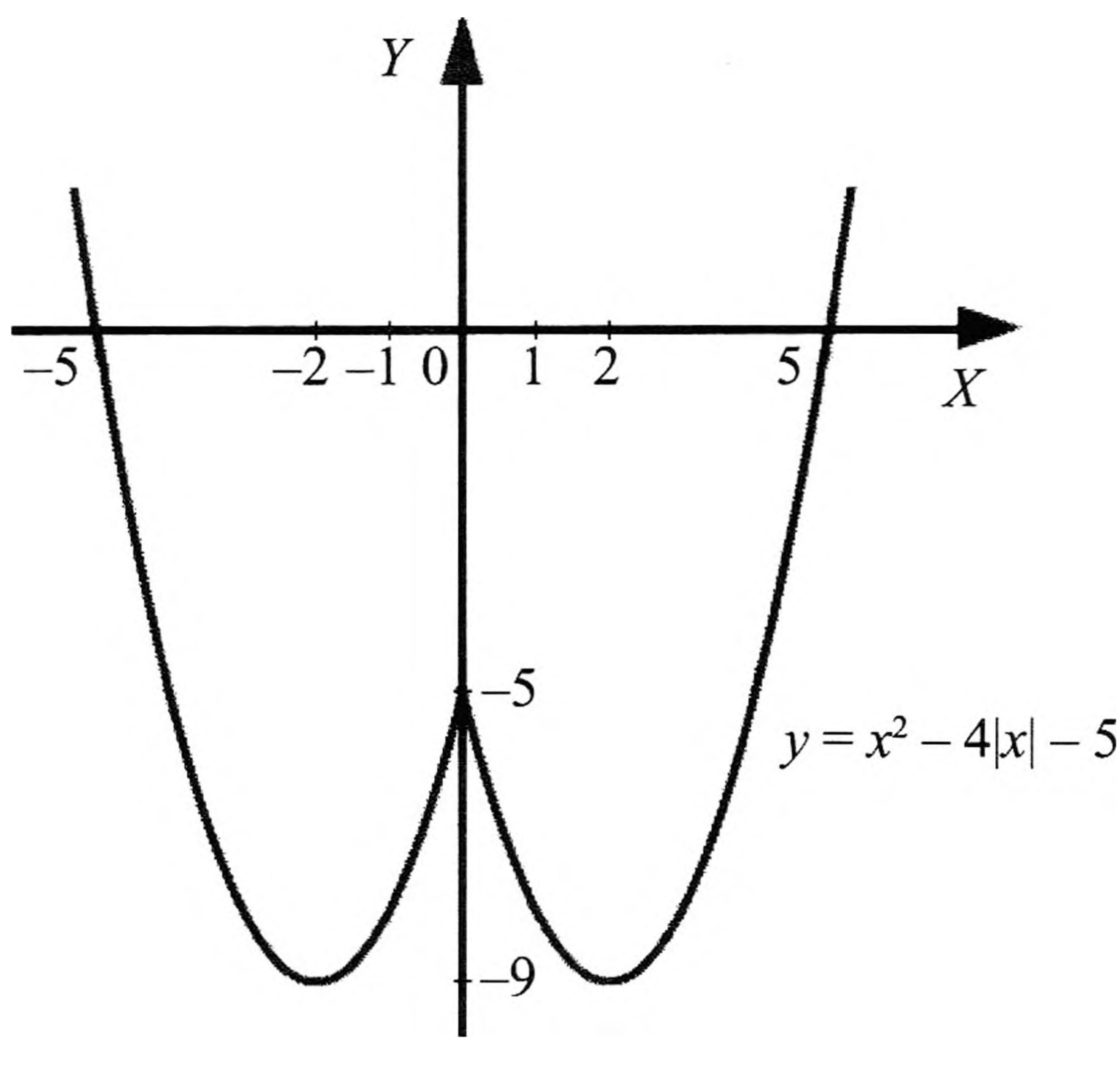


2. Построим график функции $y = x^2 - 4|x| - 5$.

Заметим, что $x^2 = |x|^2$.
Значит, если $y(x) = x^2 - 4x - 5$, то $y(|x|) = x^2 - 4|x| - 5$.
Построим график функции $y = x^2 - 4x - 5$.

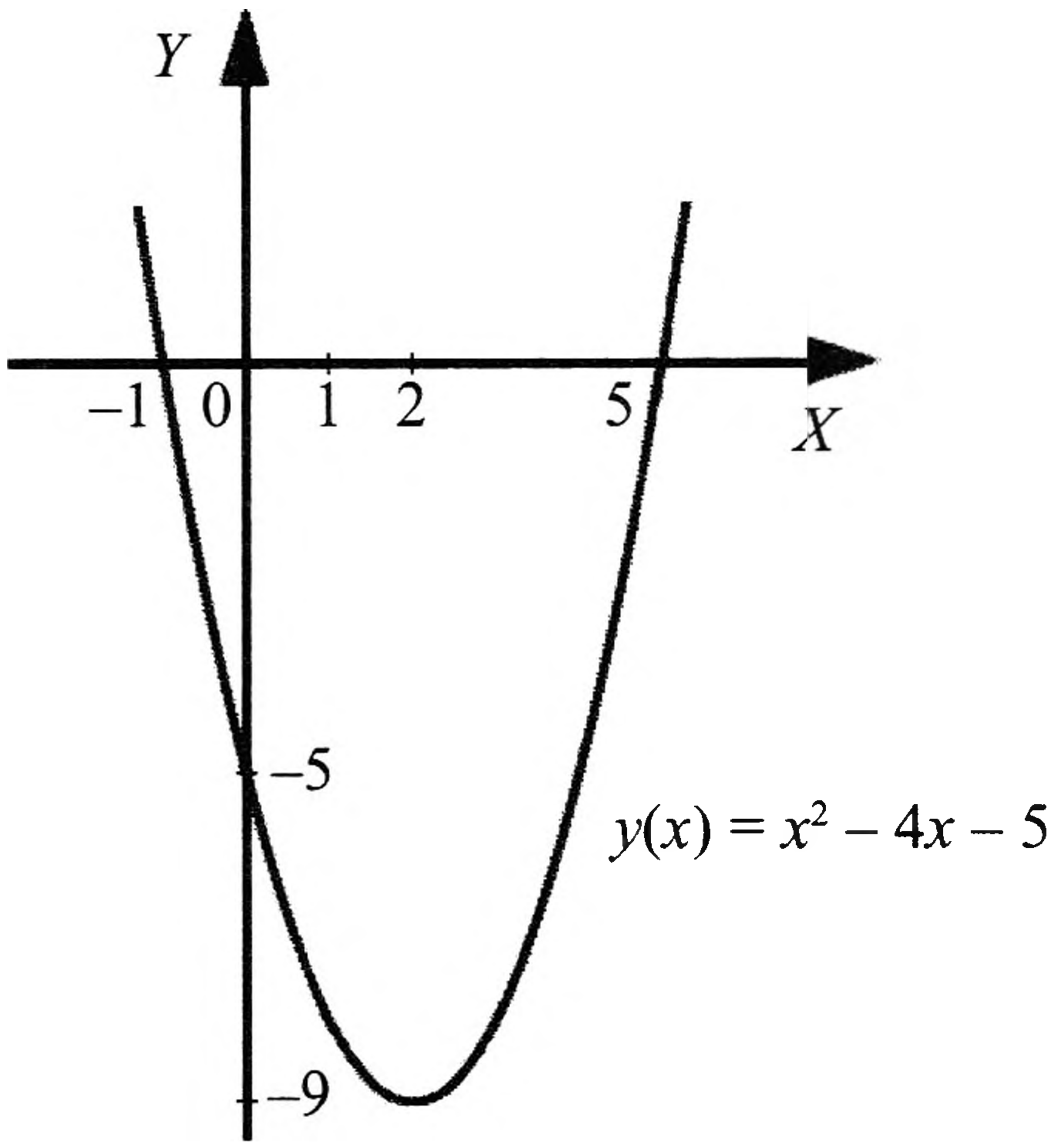


Чтобы получить график функции $y = x^2 - 4|x| - 5$, действуем по известной нам схеме. Вся правая часть исходного графика, где $x \geq 0$, остается на месте. А вместо левой части графика, где $x < 0$, рисуем симметрично отраженную правую.



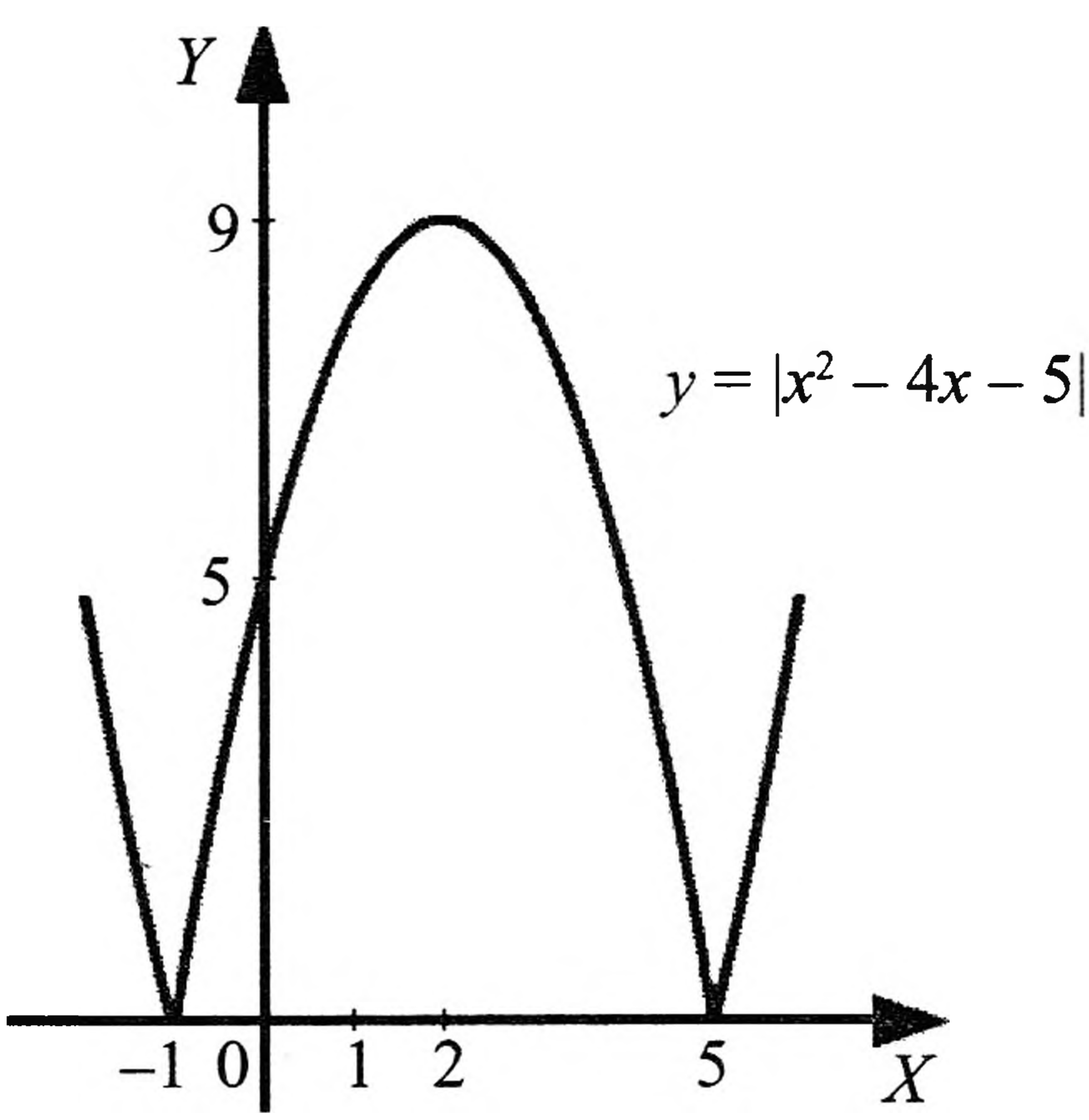
3. Построим график функции $y = |x^2 - 4x - 5|$

Начнем с параболы $y = x^2 - 4x - 5$.

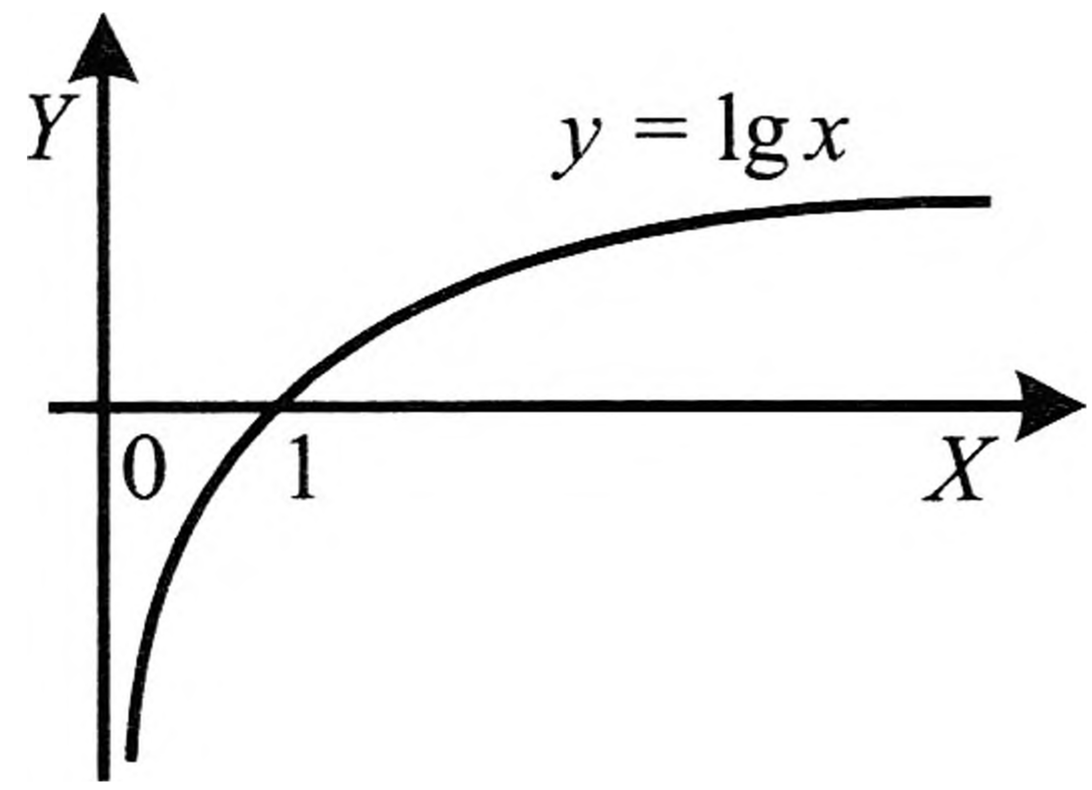


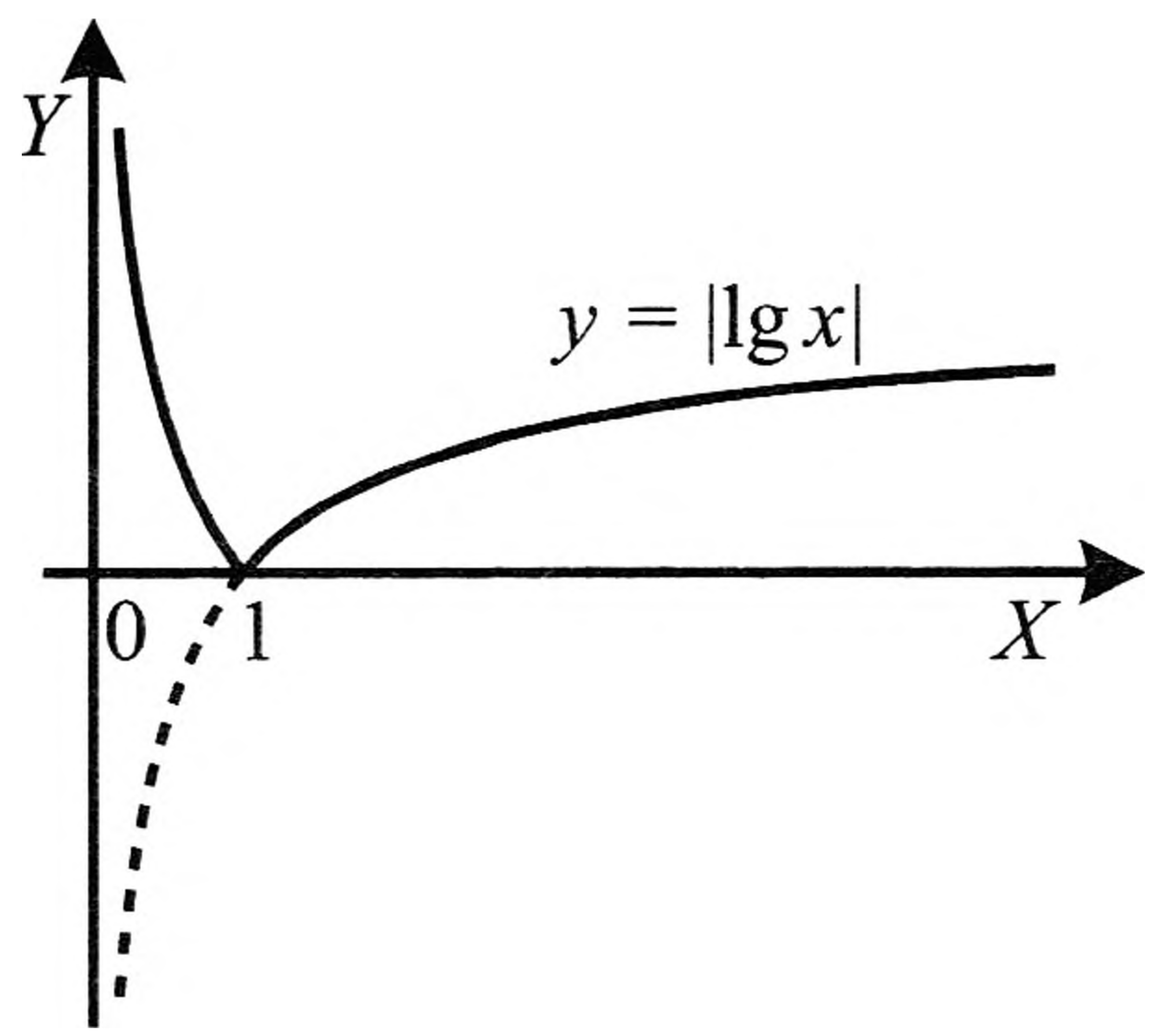
Вся часть графика выше оси X остается на месте. А часть, лежащая ниже оси X, симметрично отражается вверх.

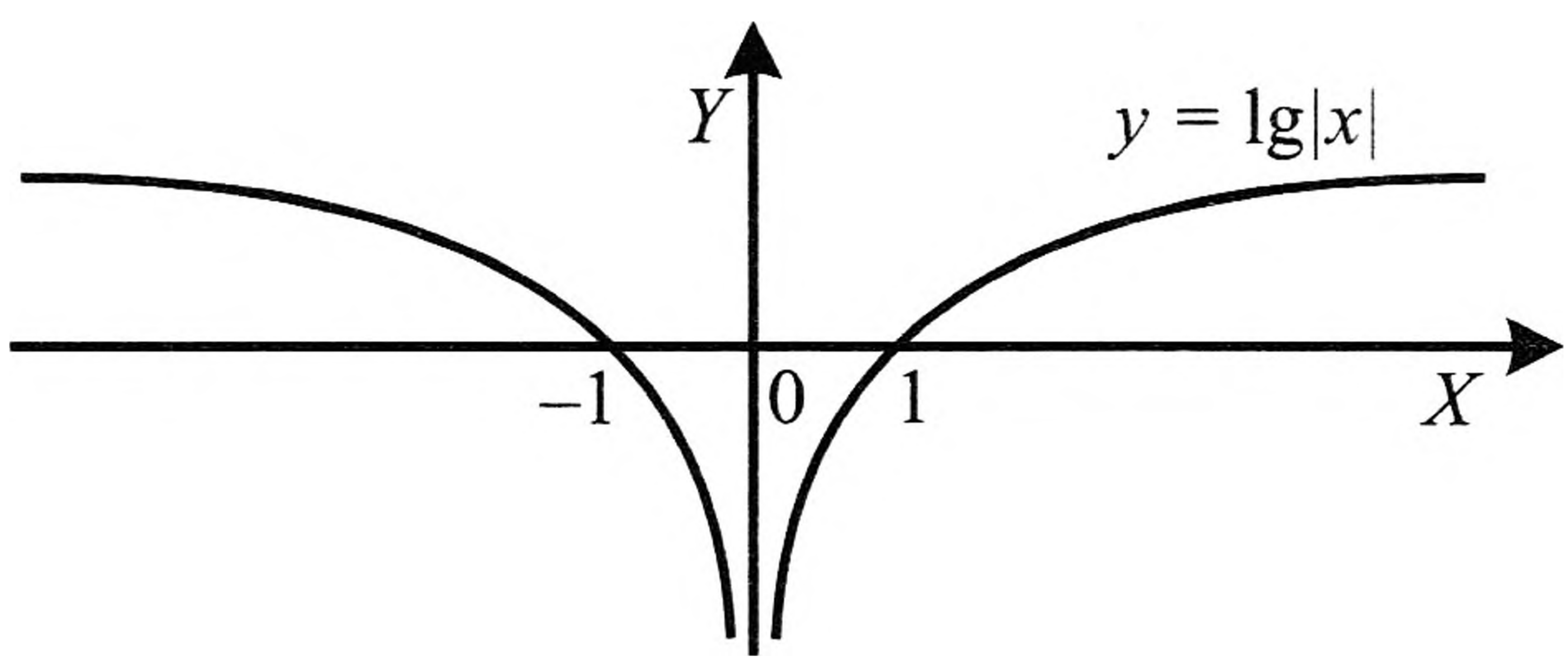
Получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 5|$.



Вот другой пример: график логарифмической функции $y = \lg x$, а также функций $y = |\lg x|$ и $y = \lg |x|$.







Не только функции. «Базовые элементы» для решения задач с параметрами

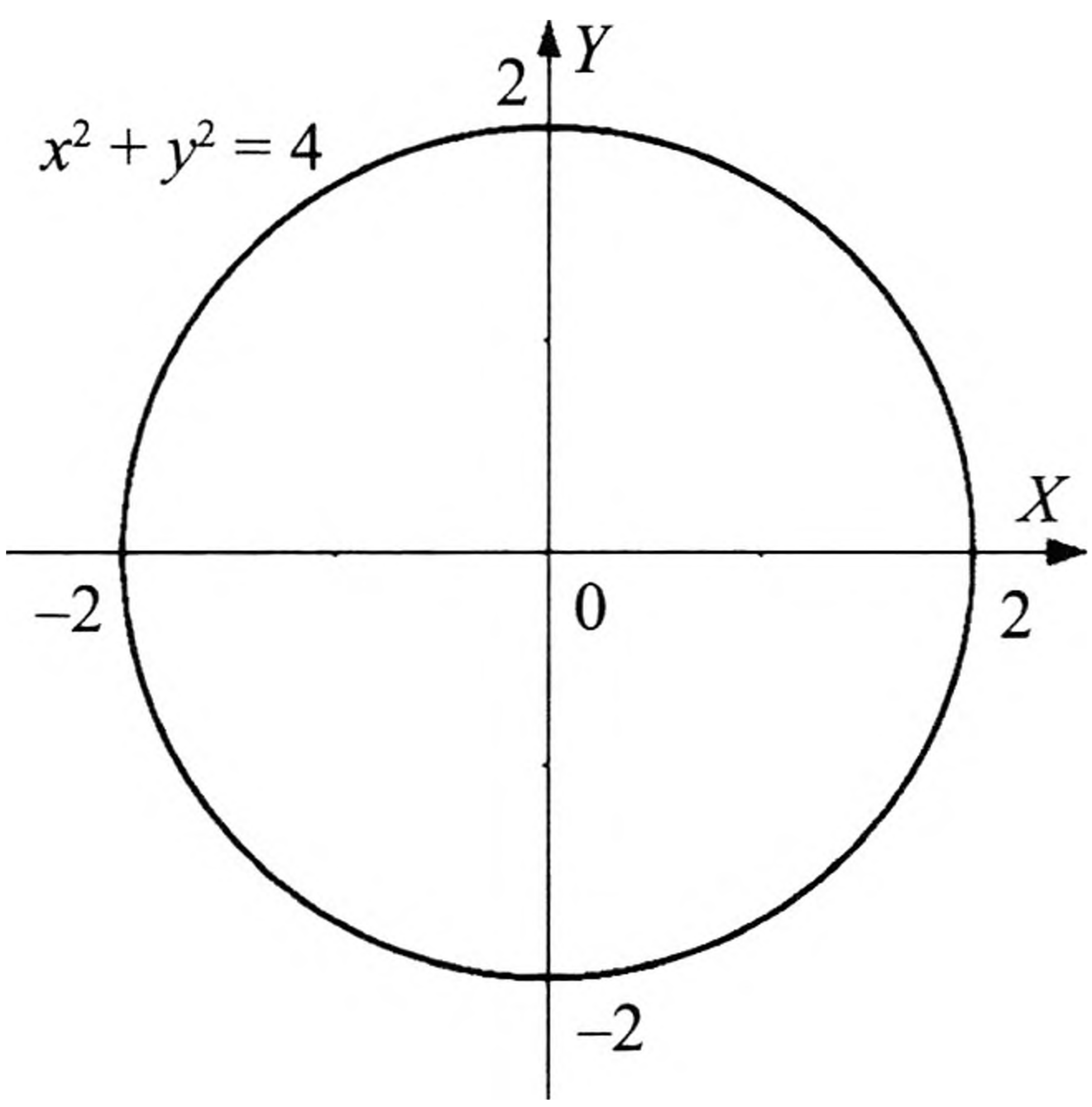
А теперь следующий уровень. Новые объекты, часто встречающиеся в задачах с параметрами. Ваша задача — узнавать уравнения, задающие эти объекты, с первого взгляда.

Не все из них являются функциями. Среди них будут кривые и фигуры на плоскости, которые тоже задаются уравнениями, содержащими x и y, но функциями, в школьном смысле этого слова, они не являются!

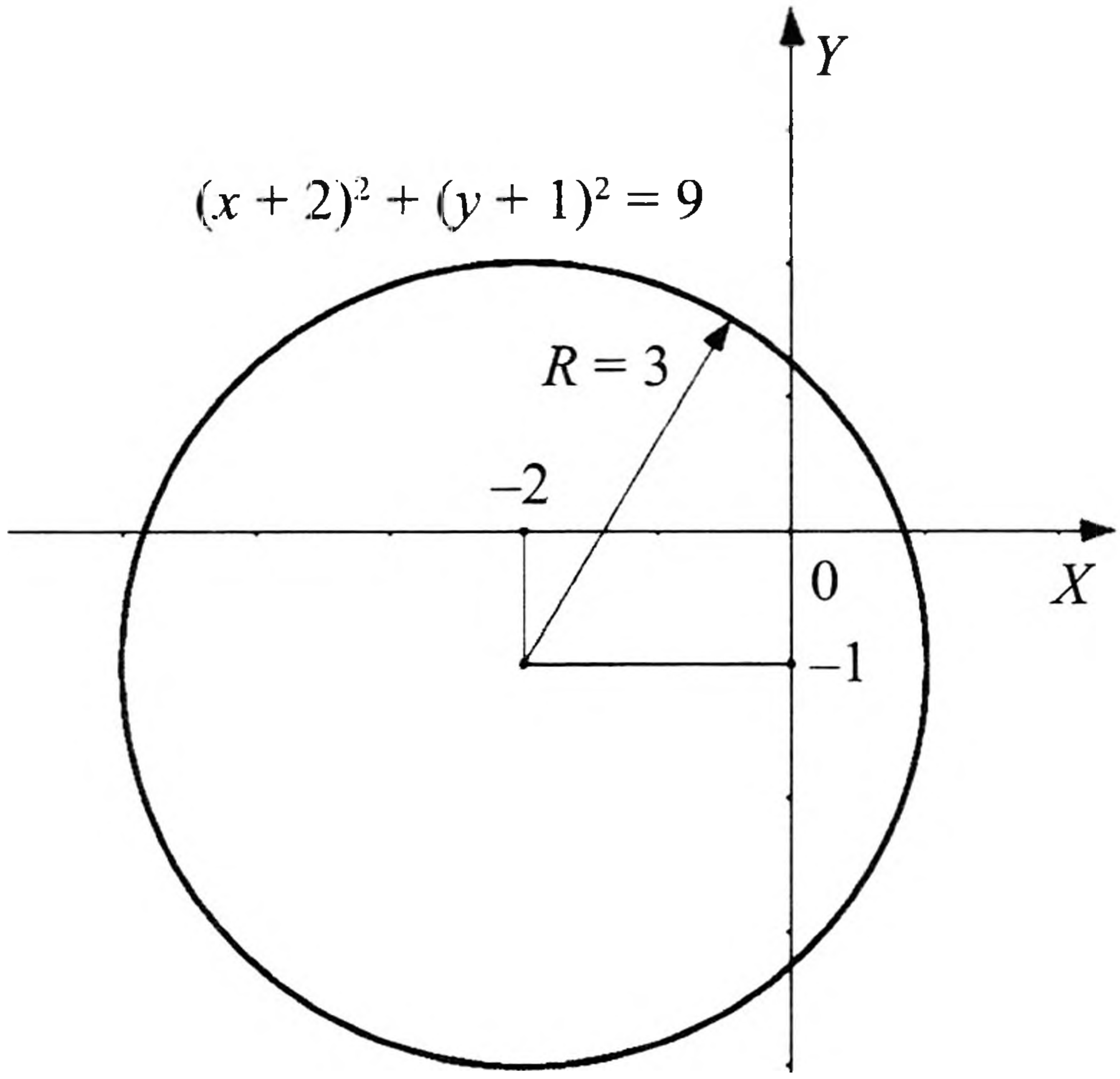
Как и графики основных элементарных функций, эти «базовые элементы» надо знать наизусть, — конечно, если вы хотите на ЕГЭ решить задачу с параметром, а в дальнейшем изучать высшую математику.

1. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.

Вот, например, окружность с центром в начале координат и радиусом 2.



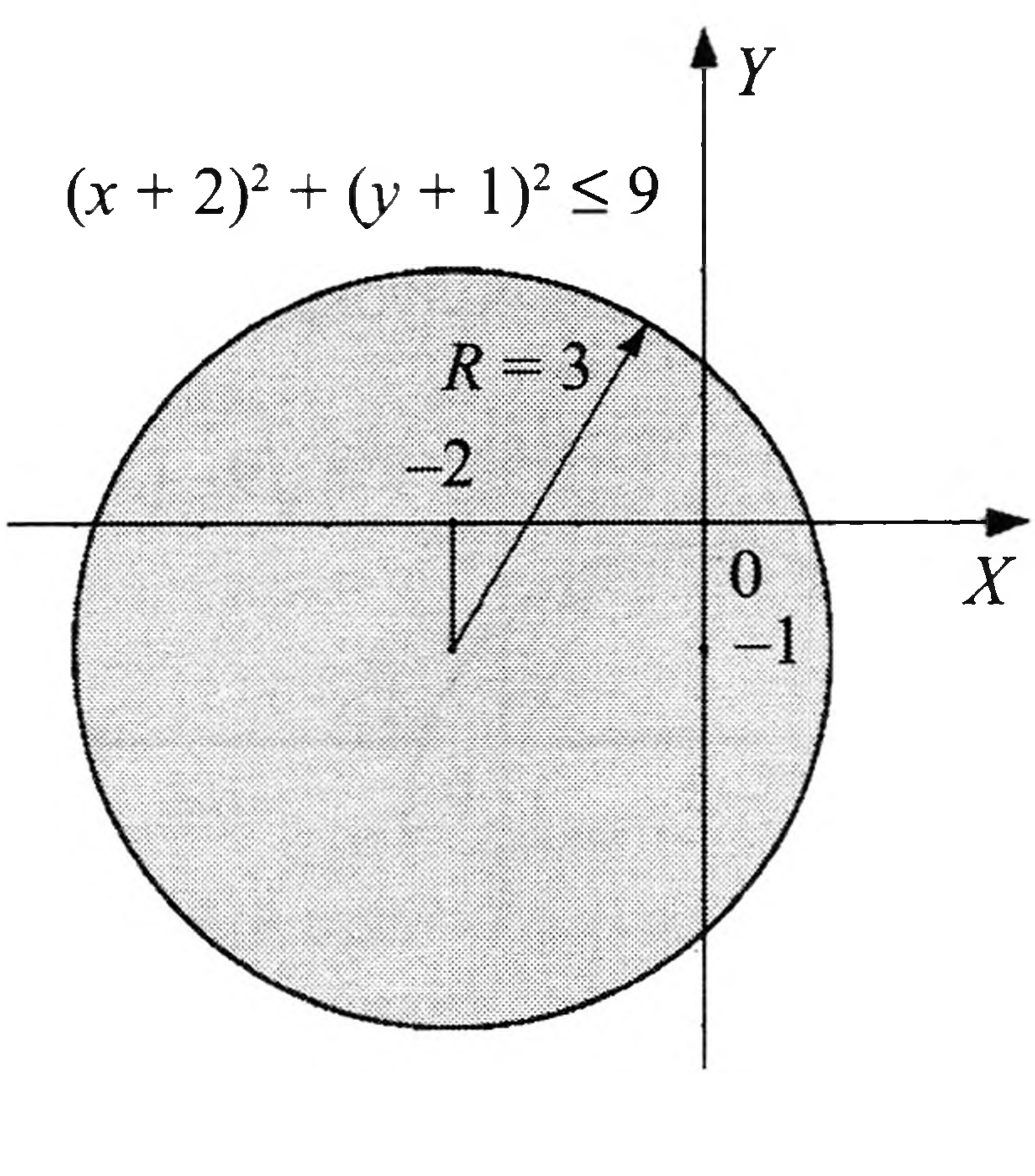
2. Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$. На рисунке — пример такой окружности. Центр в точке $(-2; -1)$, радиус равен 3.



Обратите внимание: окружность не является графиком функции, поскольку одному значению x здесь может соответствовать два значения y.

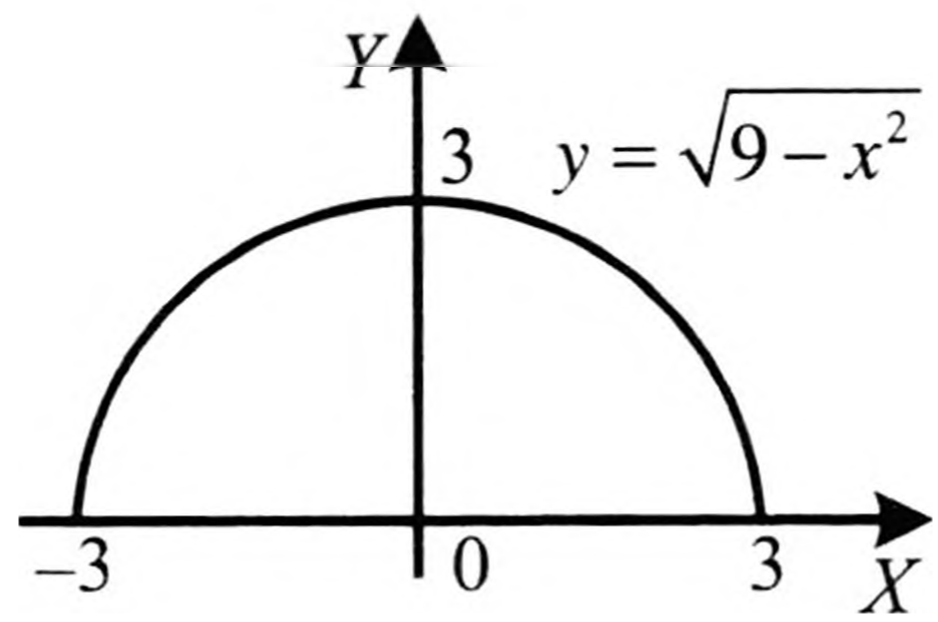
3. Круг вместе с границей задается неравенством:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2.$$

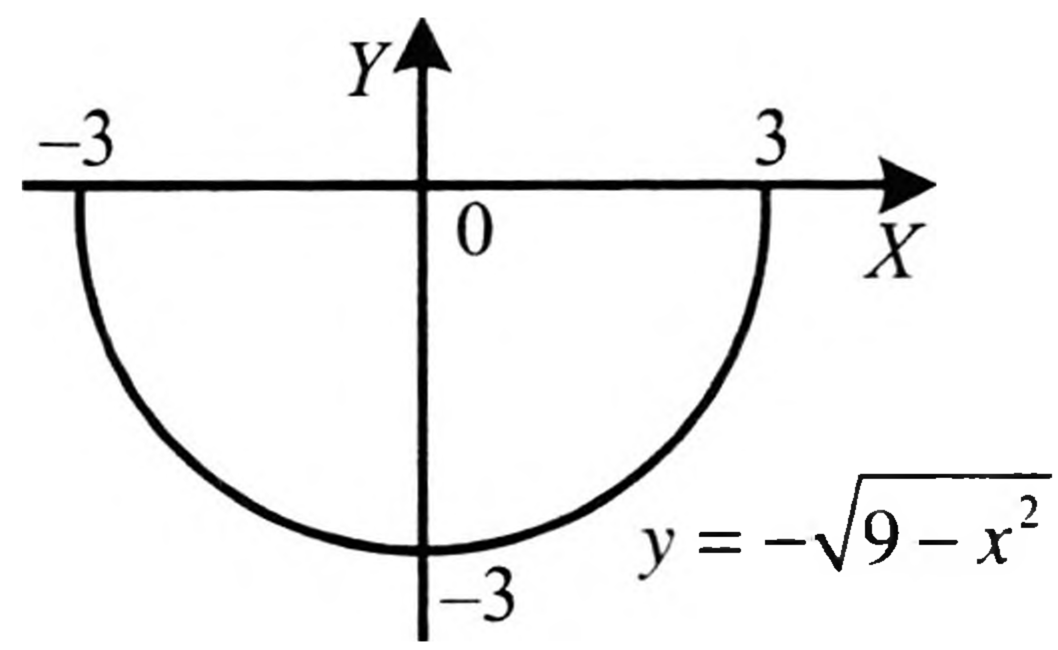


4. В первом уравнении $x^2 + y^2 = R^2$ выразим y через x при условии $y \geq 0$.

Уравнение $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.

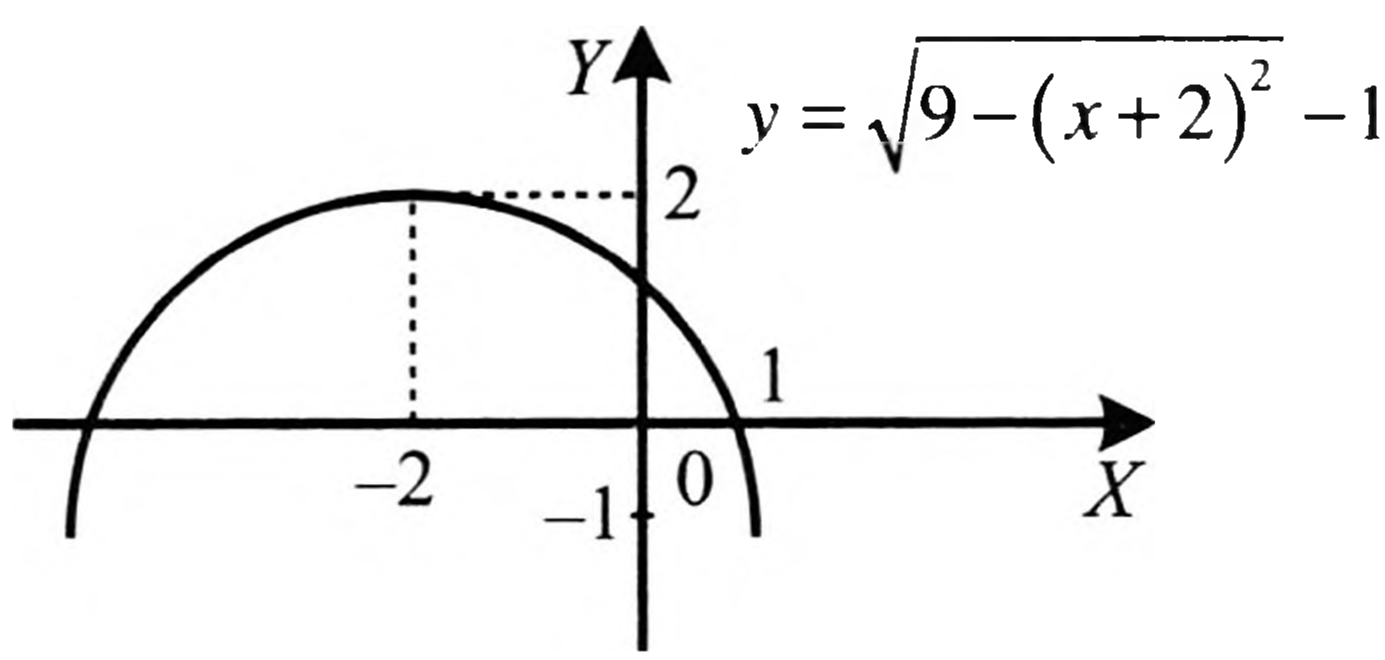


Очевидно, что уравнение $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ будет задавать нижнюю полуокружность.

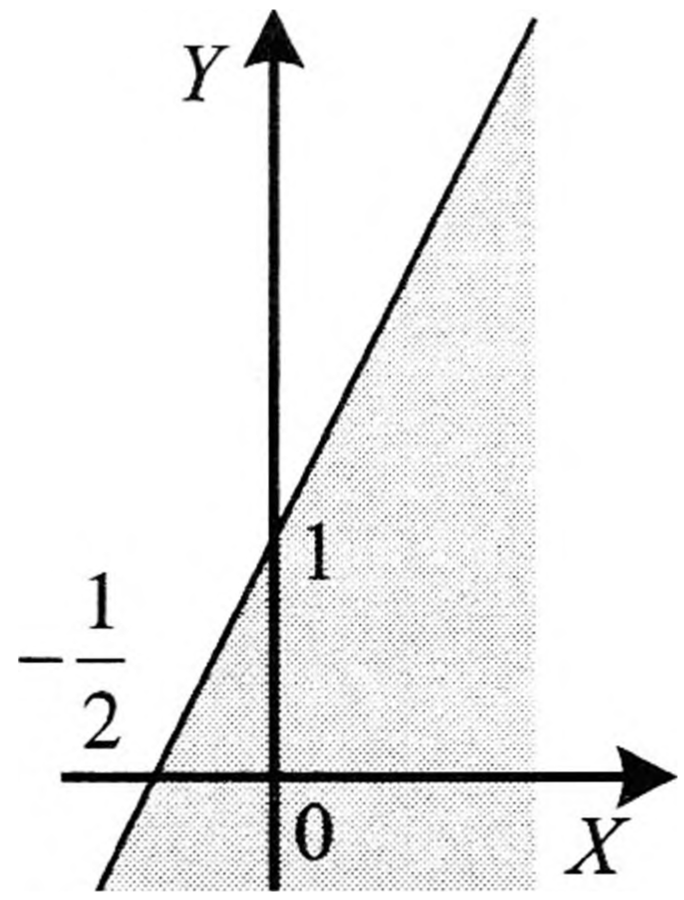


5. Уравнение $y = \sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b$ задает верхнюю полуокружность центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$.

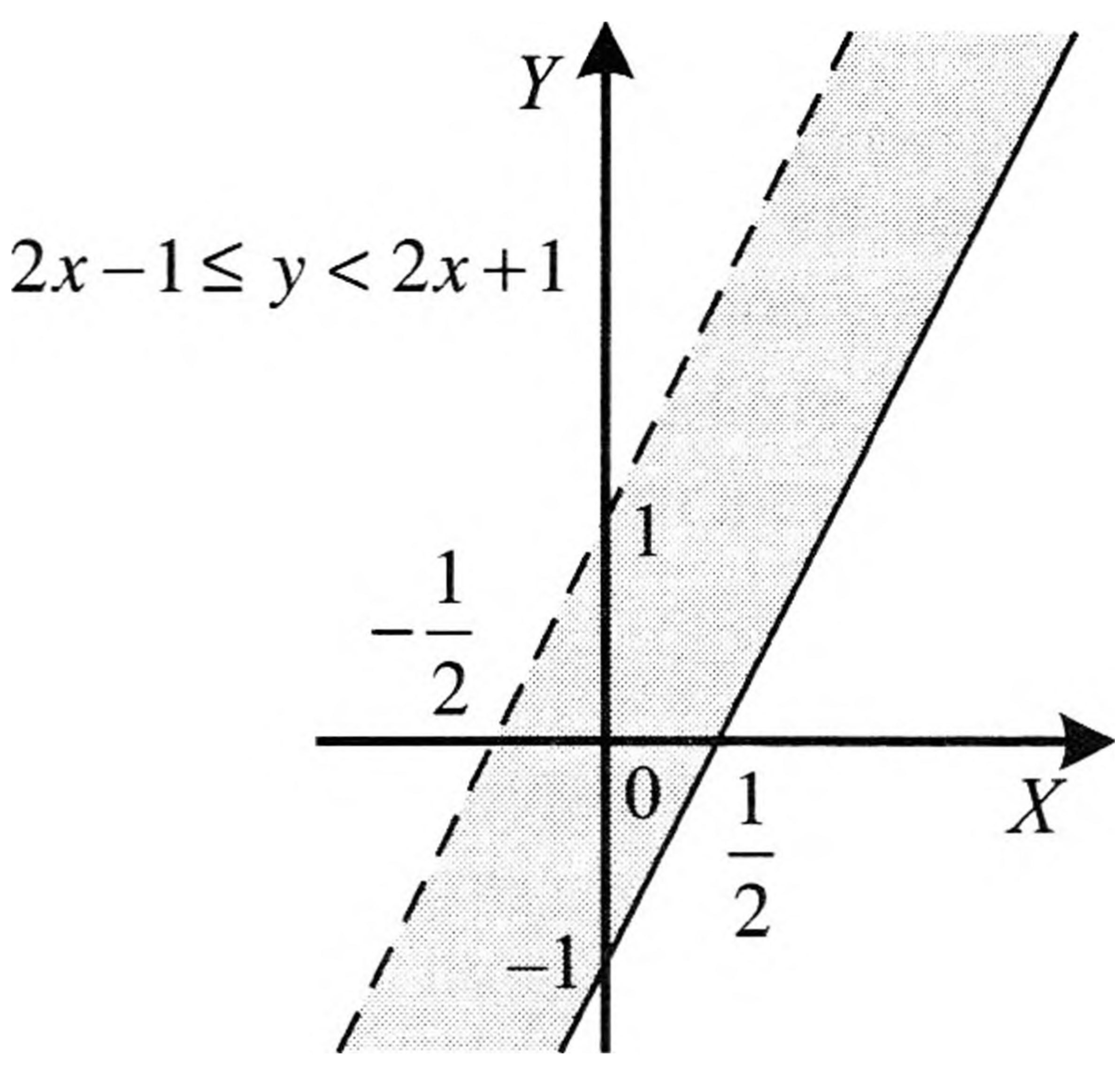
На рисунке — пример такой полуокружности.



6. Вспомним тему «Графическое решение неравенств» из школьного курса математики. На рисунке показана область, заданная неравенством $y \leq 2x + 1$. Это полуплоскость под прямой $y = 2x + 1$, включая саму прямую.



7. Двойное неравенство (которое можно записать в виде системы из двух неравенств) также задает область на плоскости. На рисунке — полоска между двумя параллельными прямыми, заданная двойным неравенством $2x - 1 \leq y < 2x + 1$. Обратите внимание, что верхняя прямая в эту область не входит, так как неравенство $y < 2x + 1$ строгое.



8. Уравнение $a|x| + b|y| = c$ при положительных a, b и c задает ромбик, симметричный относительно начала координат. На рисунке — пример такого ромбика. Только не говорите, что это график функции!

Как мы его строили? Очень просто! Можно отдельно рассмотреть все случаи и раскрыть модули по определению.

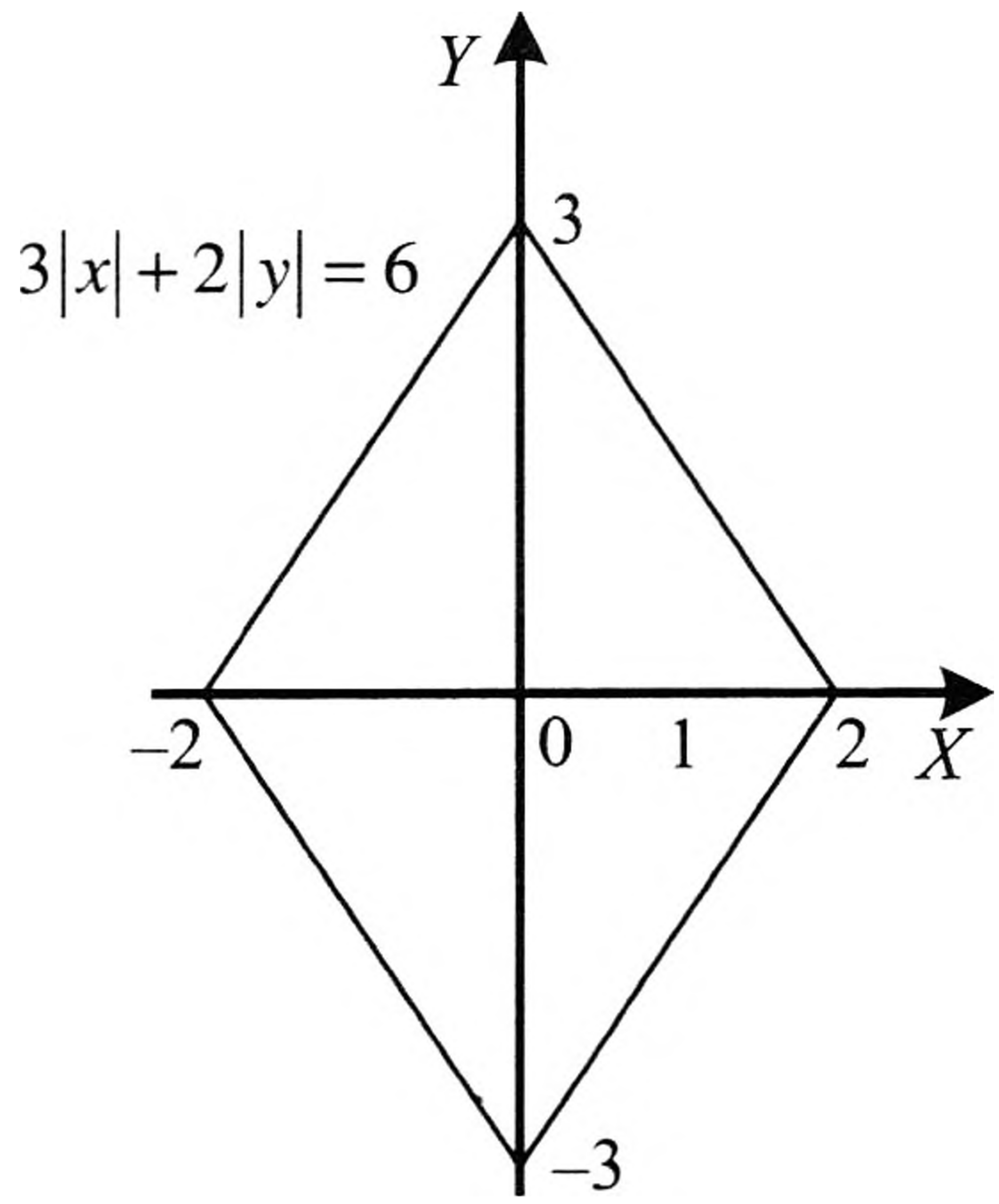
1) При $x \geq 0$, $y \geq 0$ получим: $3x + 2y = 6$.

2) При $x \geq 0$, $y < 0$ получим: $3x - 2y = 6$

3) При $x < 0$, $y \geq 0$ получим: $-3x + 2y = 6$,

4) И наконец, при $x < 0$, $y < 0$ имеем: $-3x - 2y = 6$.

Эти 4 отрезка и образуют ромбик.



9. И теперь — схема, на которой строится множество задач с параметрами. Как только у составителя задач заканчиваются идеи, он вспоминает именно об этой схеме.

Эта схема — сумма модулей, то есть функция вида $y = |x + a| + |x + b|$.

Запомните ее.

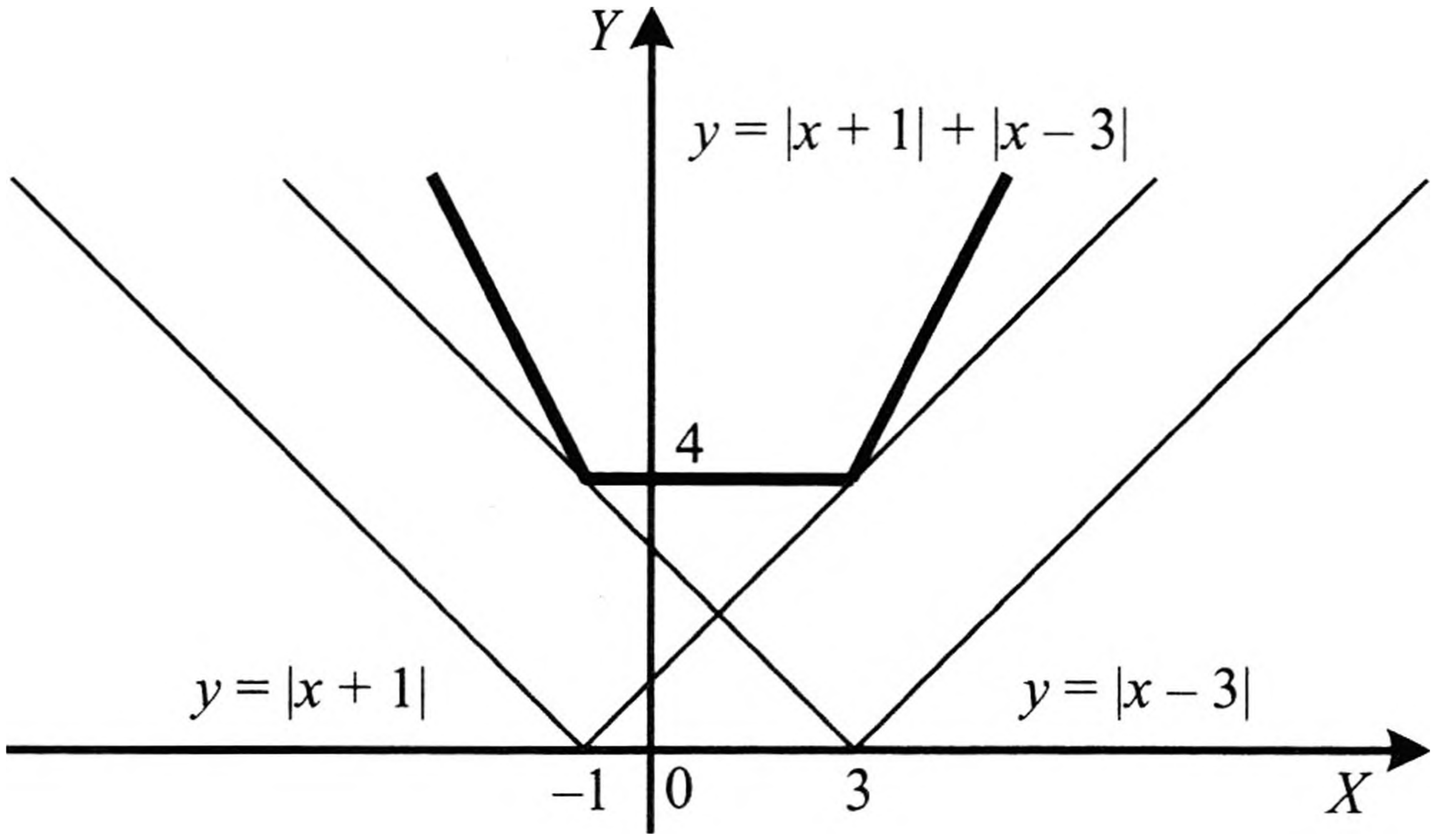
Давайте для примера построим график функции $y = |x + 1| + |x - 3|$.

График функции $y = |x + 1|$ сдвинут на 1 влево. График функции $y = |x - 3|$ — на 3 вправо. Осталось сложить два графика.

Складываем значения этих функций в ключевых точках $x = -1$ и $x = 3$ (это точки, в которых один из модулей равен нулю). А дальше — пользуемся очевидным правилом.

Сумма двух линейных функций также является линейной функцией.

Соединим отрезком точки $(-1; 4)$ и $(3; 4)$. Затем возьмем по одной точке на промежутках $x < -1$ и $x > 3$ и достроим график.



Чем так хороша эта схема? Вот, например, тренировочная задача.

При каком значении параметра c уравнение $|x+1| + |x-3| = c$ имеет бесконечно много решений?

Мы уже умеем решать уравнения с модулем с помощью метода интервалов. Однако с помощью графика это намного быстрее!

При $c < 4$ уравнение не имеет решений.

При $c > 4$ уравнение имеет 2 решения.

И при $c = 4$ все значения x из промежутка $[-1; 3]$ являются решениями.

Ответ: $c = 4$.

Построение графиков функций

Построение графиков функций — одна из самых интересных тем в школьной математике. Умение строить графики необходимо и для решении задач с параметрами, и дальше, для изучения математического анализа.

Общая схема построения графика функции:

1. Область определения функции.
2. Область значений.
3. Нули функции (точки, в которых график пересекает оси координат).

4. Промежутки знакопостоянства функции (то есть промежутки, на которых она строго положительна или строго отрицательна).
5. Асимптоты (если есть).
6. Поведение функции в бесконечности.
7. Четность — нечетность (если есть).
8. Периодичность (если есть).
9. Производная функции.
10. Промежутки возрастания и убывания. Точки максимума и минимума и значения в этих точках.

Обратите внимание, что о производной мы вспоминаем далеко не сразу. Кроме нее, есть еще множество важных характеристик поведения функции. А на первом курсе к этой схеме добавится также нахождение точек перегиба и промежутков выпуклости (вогнутости) функции.

1. Построить график функции $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

Пользуемся нашей схемой.

Функция определена при всех x, кроме $x = \pm\dfrac{1}{2}$. В точках $x = \pm\dfrac{1}{2}$ имеет вертикальные асимптоты, то есть при приближении к этим точкам уходит в бесконечность.

Функция четная: $y(-x) = y(x)$.

График проходит через начало координат, то есть $y(0) = 0$.

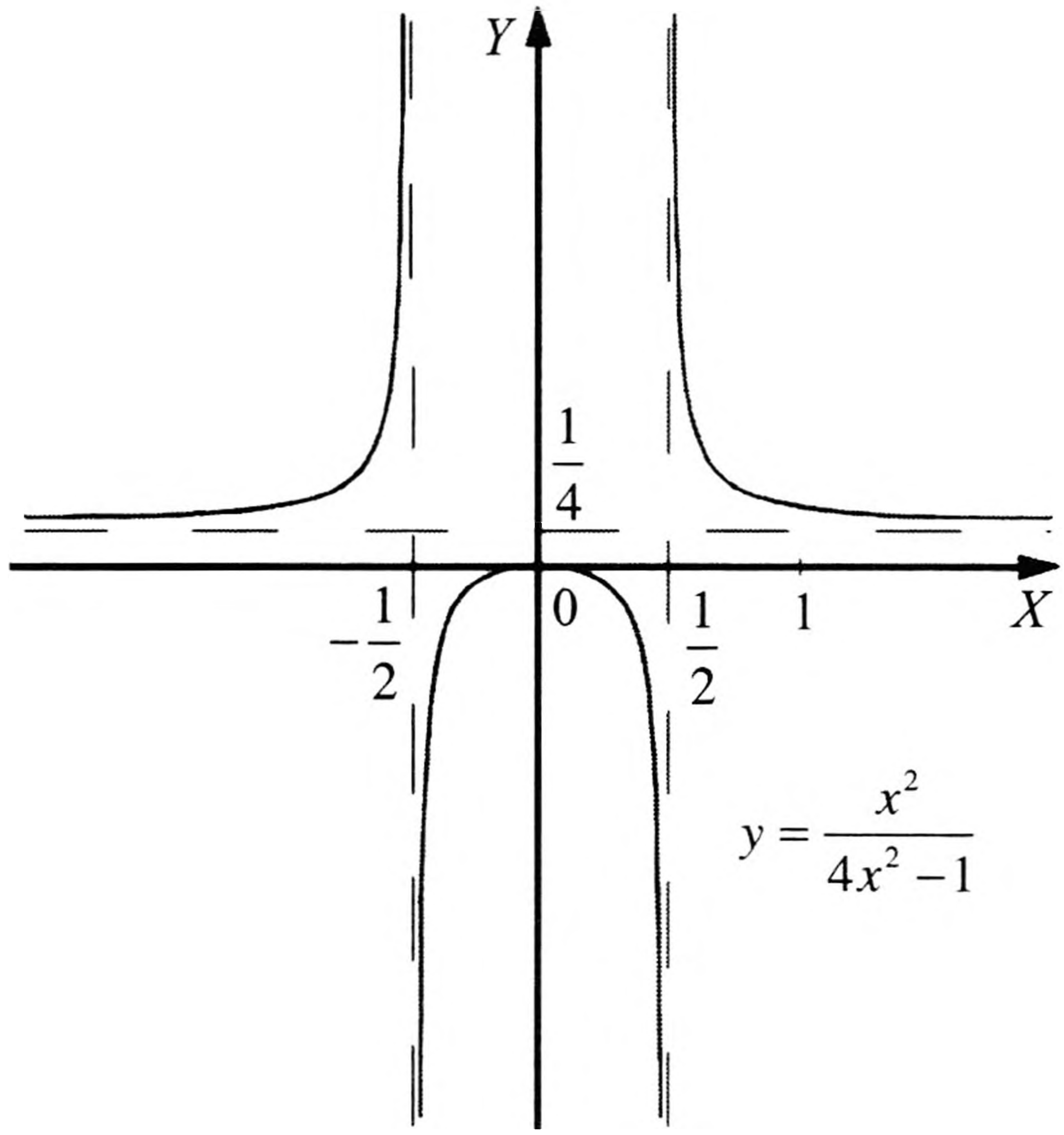
Знаки функции легко найти, применяя метод интервалов.

Функция положительна при $x < -\dfrac{1}{2}$ или $x > \dfrac{1}{2}$, равна нулю при $x = 0$, отрицательна на промежутках $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Посмотрим, что будет, когда x стремится к бесконечности. Возьмите, например, $x = 1000$, и подставьте в формулу функции. Что вы заметили? Верно ли, что тогда $4x^2 - 1$ почти не будет отличаться от $4x^2$? При бесконечно больших x единицей в знаменателе можно пренебречь, и значение функции будет стремиться к $\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$.

Итак, $y=\frac{1}{4}$ — горизонтальная асимптота данной функции.

Того, что мы уже знаем, достаточно для построения графика функции. Даже производная не понадобилась!



2. Построить график функции $y=x^2+\frac{1}{x}$.

Функция определена при всех x, кроме $x=0$. В точках $x=0$ имеет вертикальную асимптоту, то есть при приближении к нулю уходит в бесконечность.

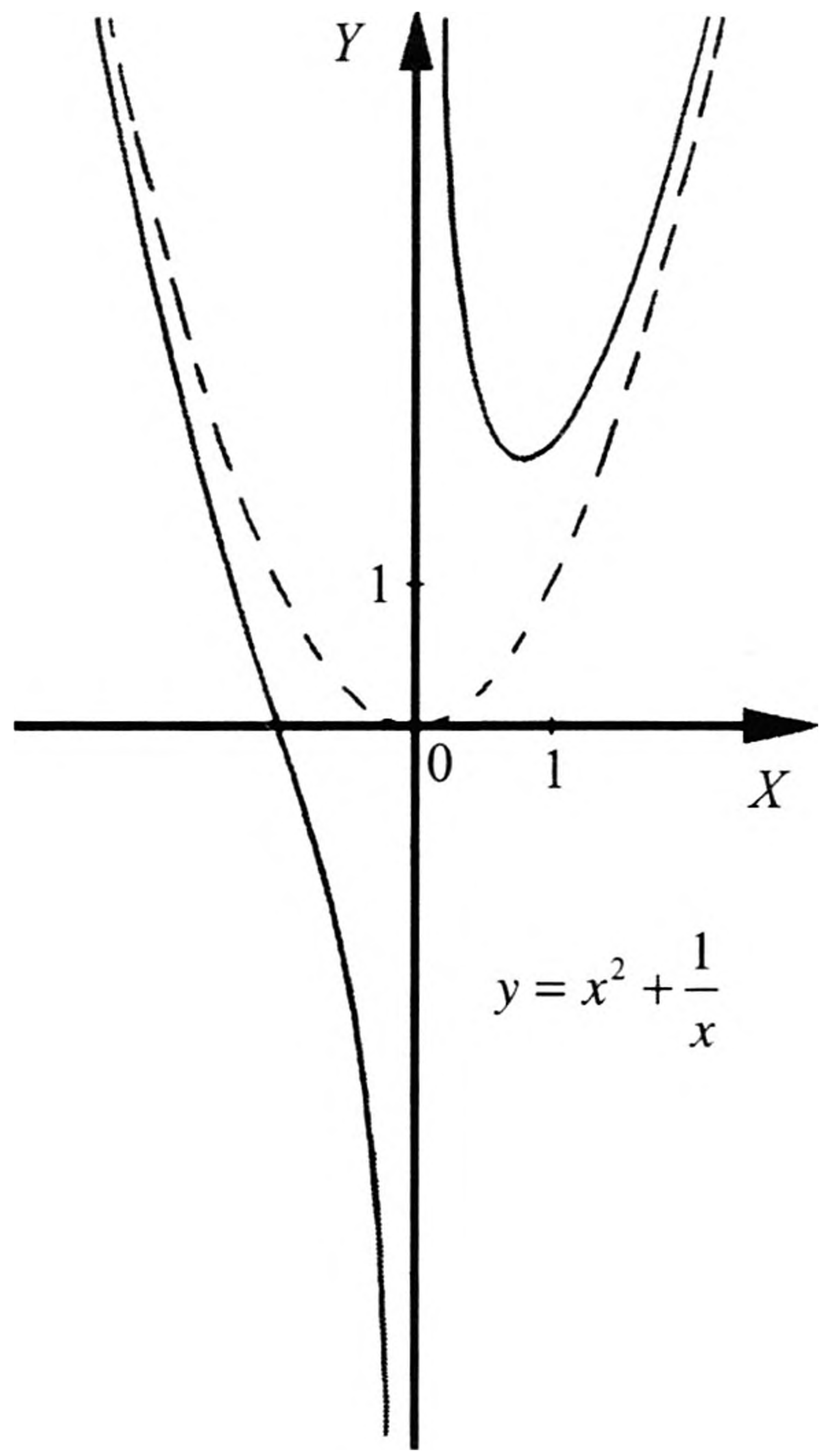
Общего вида, то есть ни четная, ни нечетная.

Нули функции: $y=0$ при $x=-1$. Точек пересечения с осью Y нет.

Функция положительна при $x<-1$ или $x>0$, равна нулю при $x=-1$, отрицательна на промежутке $(-1;\ 0)$.

Что будет, если x стремится к бесконечности? Тогда величина $\frac{1}{x}$ будет пренебрежимо мала, и функция ведет себя как парабола $y = x^2$.

Вот как выглядит график функции. Если же мы хотим точно узнать, где будет точка минимума этой функции, надо найти производную и приравнять ее к нулю.



Задачи с параметрами формата ЕГЭ по математике

Эта тема так интересна и многогранна, что ей надо посвятить отдельную книгу, причем более толстую, чем та, которую вы читаете. Сейчас мы познакомим вас с типичными приемами решения задач с параметрами и покажем, в каком направлении двигаться дальше в освоении этой темы.

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами

1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$$

не имеет действительных корней.

Посмотрим внимательно на уравнение. Всегда ли оно является квадратным относительно переменной x? — Нет, не всегда. В случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, оно, как говорят, «вырождается» в линейное.

Поэтому отдельно рассмотрим два случая — когда данное уравнение квадратное и когда оно линейное.

1) $a-2=0 \Rightarrow a=2$.

Тогда уравнение примет вид $2 = 0$. Такое уравнение не имеет действительных корней, что удовлетворяет условию задачи.

2) $a \neq 2$.

Тогда уравнение будет квадратным. Квадратное уравнение не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицательный.

Найдем дискриминант D:

$$D = b^2 - 4ac = 4(a-2)^2 - 8(a-2) < 0.$$

$$(a-2)^2 - 2(a-2) < 0.$$

Вынесем $(a - 2)$ за скобки.

$$(a-2)(a-4) < 0.$$

Решив неравенство методом интервалов относительно a, получим

$$a \in (2; 4).$$

С учетом пункта 1, получим ответ: $a \in [2; 4)$.

Теперь мы сможем ответить на вопрос, что же это такое — задача с параметром?

В уравнении, которое мы только что рассмотрели, кроме переменной x, содержалась еще буква a. Причем эта буква может принимать любые допустимые значения, и в зависимости от нее уравнение имеет различные решения или вообще не имеет решений. В нашем случае при $a = 2$ уравнение становится линейным. При других значениях параметра a уравнение будет квадратным, и в зависимости от a у него либо есть корни, либо их нет.

Фраза «решить уравнение для каждого значения параметра a» означает, что нужно рассмотреть все возможные случаи в зависимости от параметра a. В тех случаях, когда решения есть, их надо выразить через a.

Вот другая иллюстрация понятия «параметр». График функции $y = x^2 + a$ будет сдвинут вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$, или пройдет через ноль, если $a = 0$. При разных значениях параметра мы получаем разные графики!

И вот пример из физики. Уравнение Клапейрона–Менделеева связывает между собой три переменных — объем, давление и температуру идеального газа. И это при условии, что масса газа остается постоянной!

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Если температура постоянна, мы получаем знакомый вам изотермический процесс, описываемый уравнением $p = \frac{\text{const}}{V}$, причем константа в этом уравнении зависит от температуры. Чем выше температура T, тем выше в координатах V, p располагается изотерма.

Можно сказать, что при разных значениях параметра T получаются разные изотермы и, соответственно, разные формулы для зависимости p от V. Значение параметра определяет вид функции.

Раньше в этой книге мы говорили о функциях одной переменной, о зависимостях одной переменной от другой по определенному закону или правилу. Однако в жизни чаще всего в одном уравнении связаны между собой несколько величин. Так, как в приведенном выше уравнении Клапейрона–Менделеева. Вот почему для нас так важно изучение задач с параметром. Они описывают ситуации и процессы, где факторов, влияющих на результат, может быть несколько.

Вернемся к нашим задачам.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов действительных корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

минимальна.

Первая мысль, которая приходит в голову, — найти дискриминант и выразить корни квадратного уравнения по известной формуле. Конечно, это сделать можно, если времени не жалко. Представьте, какой сложной будет формула для этой суммы квадратов! Поищем другой способ.

В условии сказано: «Сумма квадратов действительных корней...» Это значит, во-первых, что корни есть, а во-вторых, их должно быть два. А это будет в случае, когда дискриминант положителен ($D > 0$).

Чтобы исследовать сумму квадратов действительных корней уравнения, вспомним теорему Виета. Она дает соотношения для корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

В нашем случае, с учетом условия $D > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - 4(a-2) > 0, \\ x_1 + x_2 = a, \\ x_1 x_2 = a - 2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы

$$a^2 - 4(a-2) > 0,$$

$$a^2 - 4a + 8 > 0.$$

Квадратный трехчлен в левой части не имеет корней, так как его дискриминант равен -32, то есть отрицателен. Поэтому неравенство будет выполняться для всех действительных значений a.

Возведем второе уравнение системы в квадрат

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = a^2, \\ x_1x_2 = a - 2. \end{cases}$$

Из этих двух уравнений выразим через параметр a сумму квадратов x_1 и x_2.

$$x_1^2 + 2(a-2) + x_2^2 = a^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2(a-2),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 4.$$

Значит, сумма квадратов корней исходного уравнения

$$S = a^2 - 2a + 4.$$

Данное выражение является квадратным трехчленом, график функции $S(a)$ — парабола, ветви направлены вверх. Поэтому минимум будет достигаться в ее вершине. Найдем вершину параболы

$$a_в = \frac{2}{2} = 1.$$

Ответ: 1

3. Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

положительны.

Как и в первой задаче, уравнение является квадратным, кроме случая, когда $a - 3 = 0$. Рассмотрим этот случай отдельно.

1) $a = 3$. Получим линейное уравнение

$$-6x + 15 = 0,$$

$$x = 2{,}5.$$

У него единственный корень, причем положительный. Это удовлетворяет условию задачи.

2) $a \neq 3$. Тогда уравнение будет квадратным. Нам надо, чтобы решения существовали, причем были положительными. Раз решения есть, то $D \geq 0$.

Сейчас мы покажем замечательный прием решения квадратичных уравнений и неравенств с параметрами. Он основан на следующих простых утверждениях.

Оба корня квадратного уравнения x_1 и x_2 положительны тогда и только тогда, когда их сумма положительна и произведение положительно.

Очевидно, что сумма и произведение двух положительных чисел также положительны. И наоборот — если сумма и произведение двух чисел положительны, то и сами числа положительны.

Оба корня квадратного уравнения и отрицательны тогда и только тогда, когда их сумма отрицательна, а произведение положительно.

Корни квадратного уравнения x_1 и x_2 имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно.

Сумма и произведение корней входят в формулировку теоремы Виета, которой мы и воспользуемся. Получим

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 5a(a-3) \ge 0, \\ \dfrac{2a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(4a-15) \le 0, \\ \dfrac{2a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0. \end{cases}$$

Второе и третье неравенства имеют одинаковое решение $a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Решение первого неравенства: $a \in [0; 3{,}75]$.

Решение системы: $a \in [0; 3{,}75]$.

С учетом пункта 1 получим ответ.

Ответ: $a \in [0; 3{,}75]$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$$

имеет единственное решение?

Уравнение является показательным, причем однородным. Мы умеем решать такие уравнения! Разделим обе части на $9^x \ne 0$.

Получим:

$$(a-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + (2a-3)\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 3a-4.$$

Заменой $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t,\ t > 0$, оно сводится к следующему:

$$(a-1)t^2 + (2a-3)t - (3a-4) = 0.$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело единственное решение, нужно, чтобы уравнение относительно t имело ровно один положительный корень.

1) В случае $a = 1$ уравнение будет линейным

$$-t+1=0,$$

$$t=1.$$

Оно имеет единственный корень, причем положительный, что удовлетворяет условию задачи.

2) В случае $a \neq 1$ уравнение будет квадратным.

Его дискриминант

$$D=(2a-3)^2+4(a-1)(3a-4)=16a^2-40a+25=(4a-5)^2.$$

Дискриминант является полным квадратом. Значит, он всегда неотрицателен, и уравнение имеет либо один, либо два корня. В этом случае несложно найти корни в явном виде.

$$t_1=\frac{3-2a+4a-5}{2(a-1)}=\frac{2a-2}{2a-2}=1$$

$$t_2=\frac{3-2a-4a+5}{2(a-1)}=\frac{4-3a}{a-1}$$

Один корень получился не зависящим от параметра, причем положительным. Это упрощает задачу.

Для того, чтобы уравнение имело единственный положительный корень, нужно, чтобы второй был отрицательным либо равным нулю, либо чтобы корни совпадали. Рассмотрим все случаи.

а) $t_2 \le 0 \Rightarrow \dfrac{4-3a}{a-1} \le 0.$

Тогда $a \in (-\infty;1) \cup \left[\dfrac{4}{3};+\infty\right).$

б) $t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow \dfrac{4-3a}{a-1} = 1,$

$a = 1,25.$

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $a \in (-\infty;1] \cup \{1,25\} \cup \left[\dfrac{4}{3};+\infty\right).$

Квадратные уравнения и неравенства с параметром — обширная и непростая тема. Сейчас мы лишь немного познакомились с ней. Для ее полного освоения рекомендуем вам следующие книги:

1) *В. В. Ткачук.* Математика — абитуриенту.

2) *Виктор Высоцкий.* Задачи с параметрами.

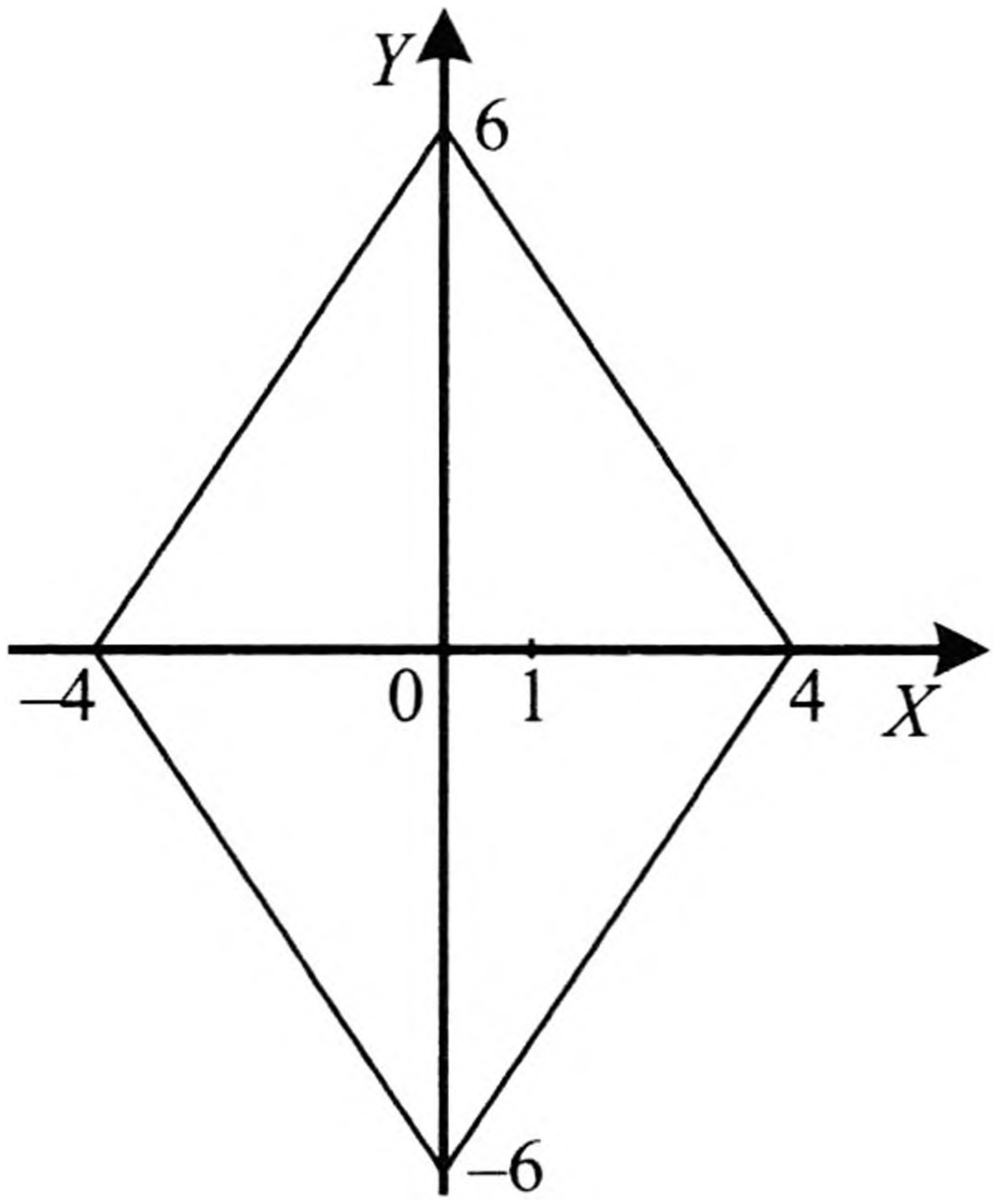
Графический метод решения задач с параметрами

5. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x|+2|y|=12; \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Графиком первого уравнения $3|x|+2|y|=12$ является ромбик с вершинами (4; 0), (–4; 0), (0; 6), (0; –6). Эти точки легко найти, поочередно подставим в уравнение $x = 0$ и $y = 0$.



Графиком второго уравнения $x^2 + y^2 = a$ является окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$ при $a > 0$. При $a = 0$ графиком будет точка (0; 0). При $a < 0$ решений нет.

Значение параметра определяет радиус окружности.

Чтобы исходная система имела максимальное число решений, необходимо и достаточно, чтобы графики ромба и окружности имели максимальное количество точек пересечения.

Возможны следующие случаи.

— Окружность и ромб не пересекаются (окружность расположена внутри ромба), значит, система решений не имеет.

— Окружность касается ромба в четырех точках, значит, система имеет четыре решения.

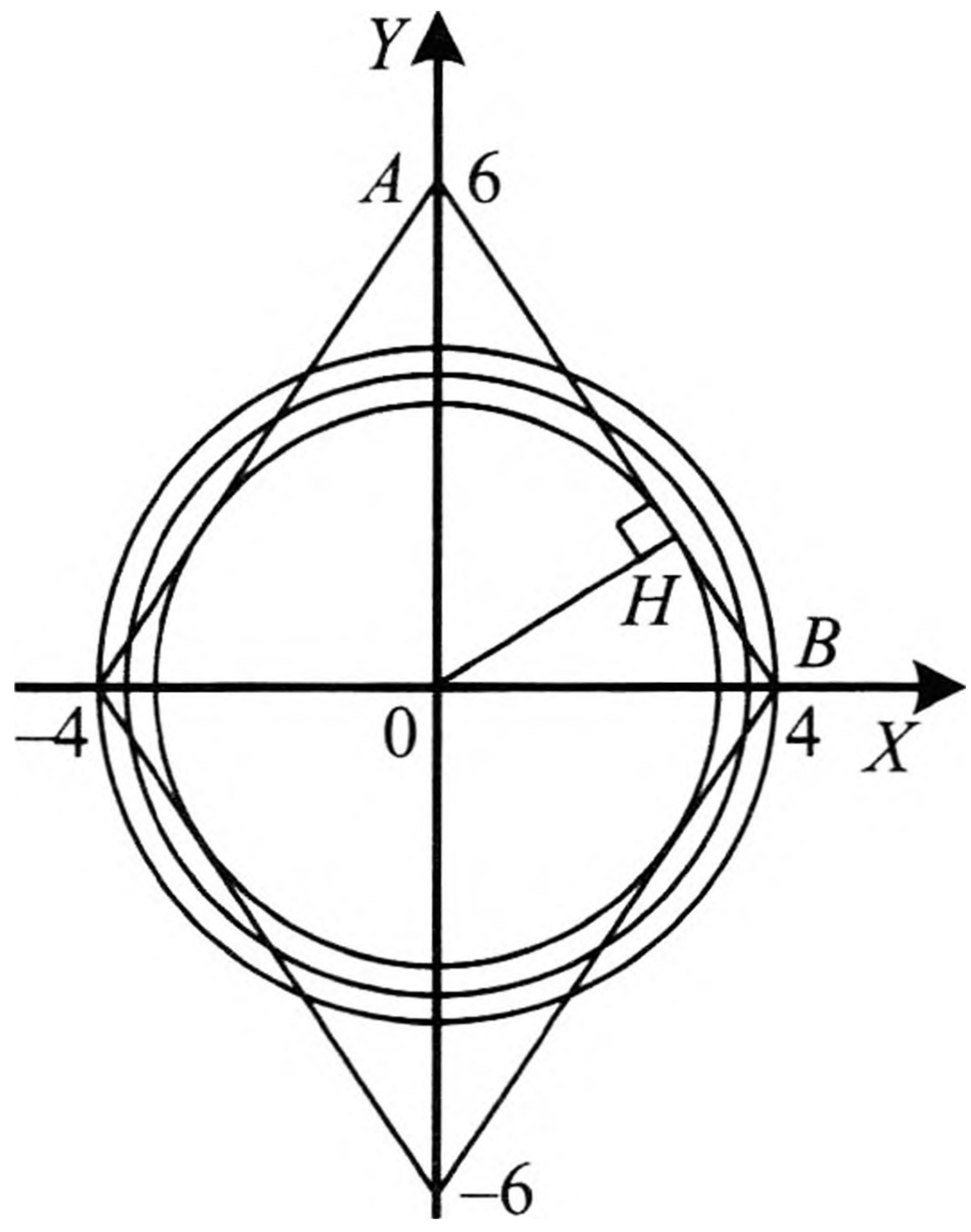
— Окружность пересекает ромб в восьми точках, значит, система имеет восемь решений.

— Окружность пересекает ромб в шести точках (две из них — вершины ромба), значит, система имеет шесть решений.

— Окружность пересекает стороны ромба в четырех точках, значит, система имеет четыре решения.

— Окружность пересекает ромб в двух вершинах, значит, система имеет два решения.

— Окружность и ромб не пересекаются (ромб расположен внутри окружности), значит, система решений не имеет.



Получается, что максимально возможное количество решений — восемь.

Рассмотрим треугольник AOB. Он прямоугольный. $AO = 6$, $OB = 4$, гипотенуза $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$. Радиус окружности

OH перпендикулярен касательной AB. Высота OH, проведенная к гипотенузе, равна

$$OH = \frac{OB \cdot OA}{AB} = \frac{4 \cdot 6}{\sqrt{52}} = \frac{24}{2\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}.$$

Радиус большей окружности $OB = 4$.

Значит, $OH < \sqrt{a} < OB \Rightarrow \frac{12\sqrt{13}}{13} < \sqrt{a} < 4 \Rightarrow \frac{144}{13} < a < 16.$

Ответ: $a \in \left(\frac{144}{13}; 16\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$$

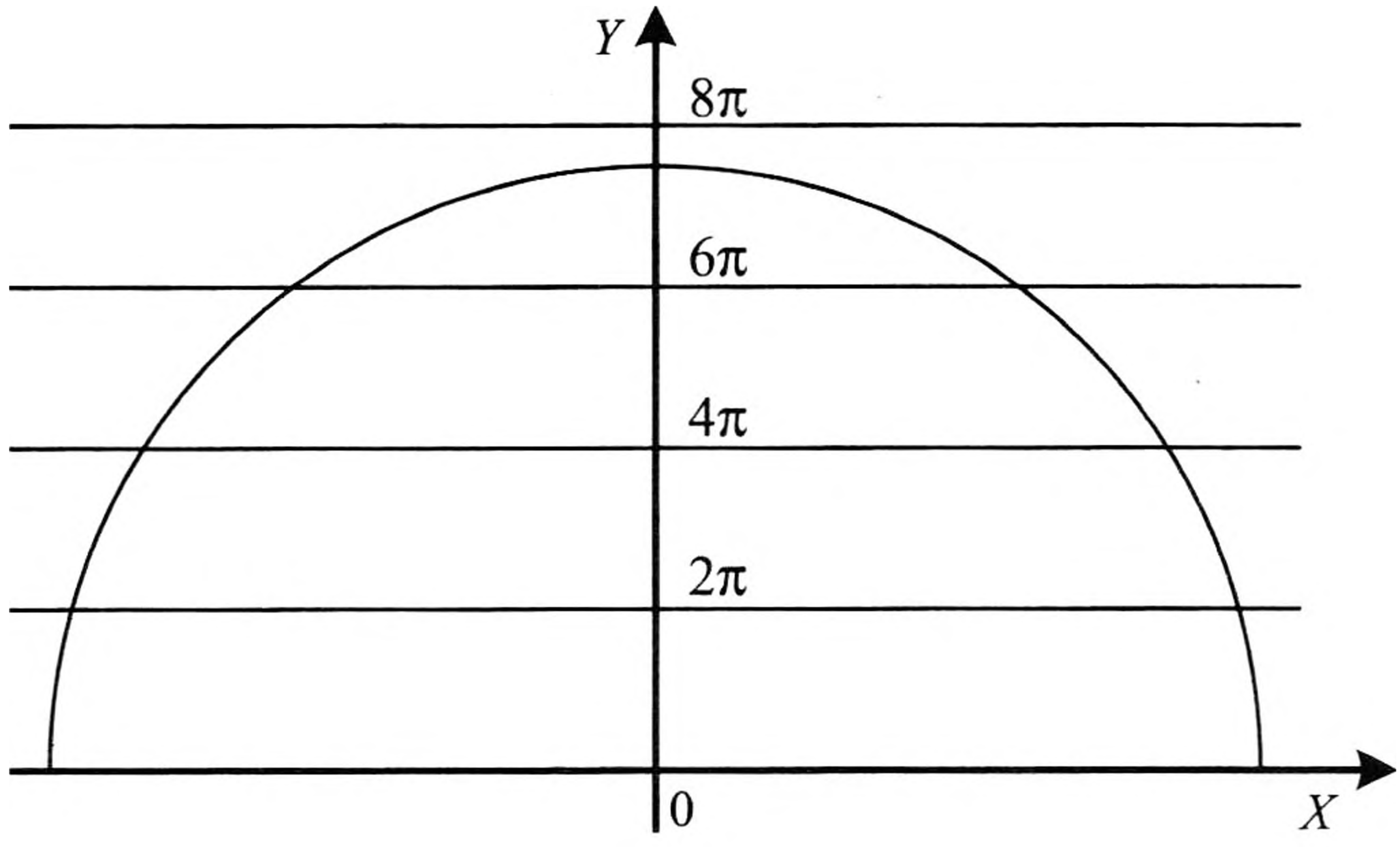
имеет ровно восемь различных решений.

У этой задачи есть интересная особенность — можно «проскочить» мимо правильного решения и запутаться.

Итак, перед нами тригонометрическое уравнение. Решаем его:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Графиком функции в левой части будет верхняя полуокружность с радиусом $R = |a|$ и центром в начале координат. Получается, что ее радиус зависит от параметра. Графиком функции в правой части будут прямые, параллельные оси X, то есть прямые $y = 0$; $y = 2\pi$; $y = 4\pi$; $y = 6\pi$; $y = 8\pi \ldots\ y = 2\pi n$, где n — целое.



Получим, что восемь точек пересечения прямые будут иметь с полуокружностью, когда ее радиус меньше значения 8π и больше значения 6π.

$$6\pi < |a| < 8\pi,$$
$$a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi).$$

Ответ: $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

7. Дано уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a - x + 2 > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ a - x + 2 = (1 - x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - x + 2 > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x \neq 0, \\ a - x + 2 = (1 - x)^2. \end{cases}$$

Присмотримся к этой системе. В первом неравенстве и четвертом уравнении оставим в левой части параметр a, а все остальное перенесем в правую часть. Второе и третье неравенства вообще не зависят от параметра.

$$\begin{cases} a > x - 2, \\ x \neq 0, \\ x < 1, \\ a = x^2 - x - 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решить графически.

Правда, строить графики мы будем не в координатах xOy, а в координатах xOa, — ведь в системе есть только x и a.

Первое неравенство задает область (полуплоскость), расположенную выше прямой $a = x - 2$, не включая саму прямую.

Третье неравенство задает полуплоскость левее прямой $x = 1$, не включая саму эту прямую.

Четвертое уравнение задает обычную параболу. Ее ветви направлены вверх, вершина находится в точке A (0,5; –1,25), точка пересечения с осью a M (0; –1), точки пересечения с осью x: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ и $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$. При этом, согласно условию, $x \neq 0$, то есть точка (0; –1) будет выколотой.

Определим, где пересекаются графики функции $a = x - 2$ и $a = x^2 - x - 1$. Для этого решим систему уравнений:

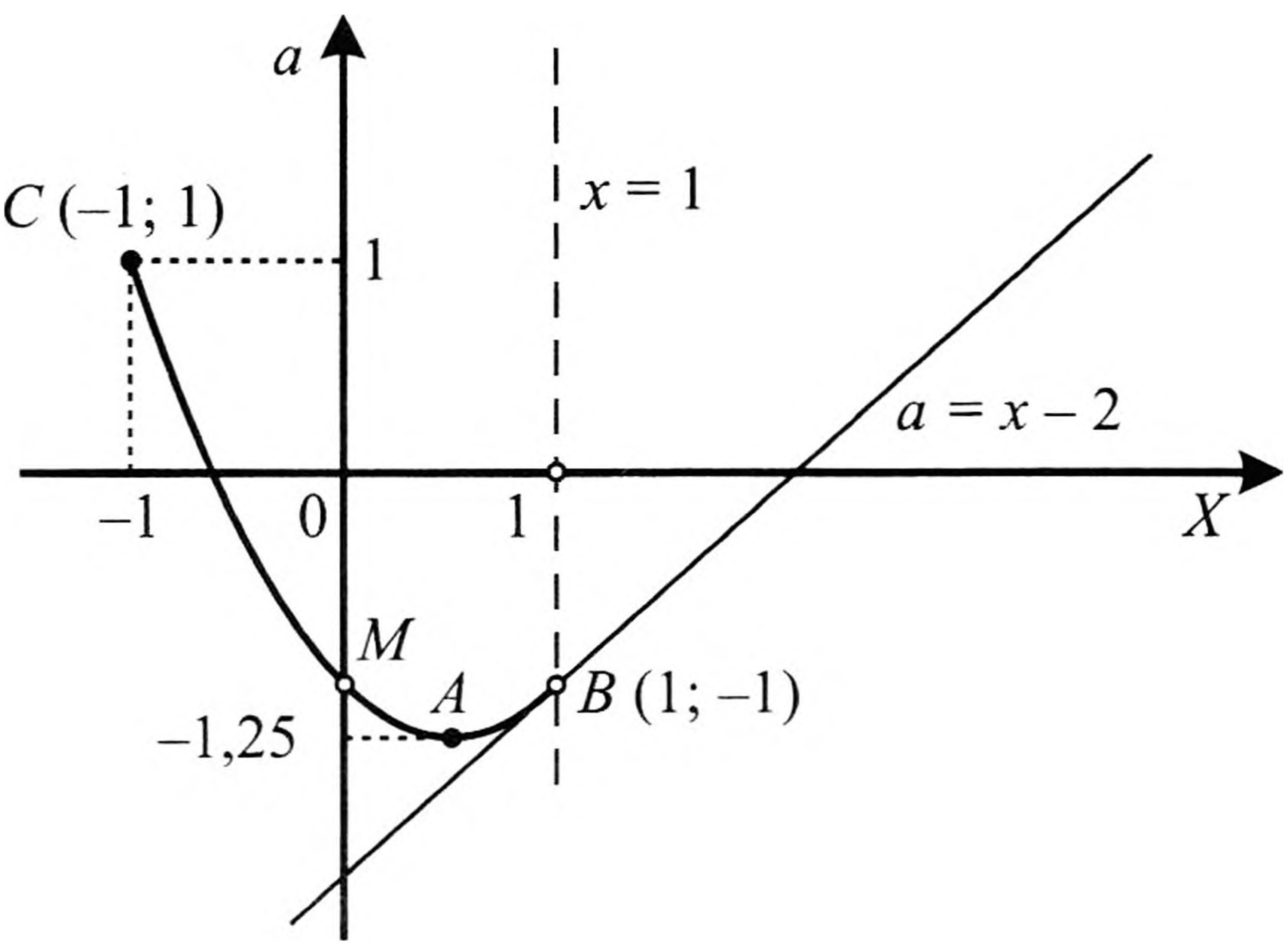
$$\begin{cases} x-2 = x^2 - x - 1, \\ a = x - 2. \end{cases}$$

Получим: $x = 1$, $a = -1$.

На нашем рисунке это точка B (1; –1).

График функции $x = 1$ также проходит через эту точку, то есть все три графика пересекаются в единственной точке B (1; –1).

Условию задачи удовлетворяет часть параболы на промежутке $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.



Нам надо, чтобы на промежутке [–1; 1) было хотя бы одно решение. Заметим, что правый конец промежутка совпадает с правым концом кусочка параболы, причем эта точка является выколотой. Левый конец промежутка $x = -1$ соответствует точке C (–1; 1), принадлежащей параболе.

Осталось определить нужные значения параметра. Для этого выясним, в скольких точках прямая a пересекает график.

При $a < -1{,}25$ прямая a не пересекает график и решений нет (наименьшее значение квадратичной функции равно $-1{,}25$). Значит, это значение нам не подходит.

При $a = -1{,}25$ прямая a касается параболы в вершине A, одно решение. Этот случай нам подходит.

Если прямая a проходит через точки B и M ($a = -1$), то она не пересекает график, так как обе точки являются выколотыми. Значит, решений нет, и этот случай нам не подходит.

Если прямая a расположена между точками A и B при $a \in (-1{,}25; -1)$, то она будет пересекать график в двух точках, поэтому будет два решения. Этот случай нам также подходит.

При $a > -1$ прямая a будет пересекать график в одной точке и решение будет одно вплоть до случая, когда прямая a проходит через точку C, $a = 1$ (включительно). Этот случай нам подходит.

При $a > 1$ прямая a пересекает график в одной точке, но x уже не принадлежит указанному промежутку. Решений нет, и это нам не подходит.

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $a \in [-1,25;-1) \cup (-1;1]$.

8. При каких значениях параметра c уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = c + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет решения?

Сделаем замену $2^{2x-x^2} = t,\ t > 0$.

Найдем, какие значения может принимать функция $t(x)$. Очевидно, что $t > 0$, так как функция $t(x)$ является показательной. Однако это не все.

Легко доказать (нарисовав параболу), что наибольшее значение выражения $2x - x^2$ достигается при $x = 1$, и это значение равно 1.

Поскольку показательная функция с основанием 2 монотонно возрастает и большему значению показателя соответствует большее значение функции, наибольшее значение выражения 2^{2x-x^2} достигается, когда выражение $2x - x^2$ принимает свое наибольшее значение, то есть при $x = 1$.

Итак, если $x = 1$, то $2x - x^2 = 1$, и тогда $t(1) = t_{\max}(x) = 2$.

Мы нашли наибольшее значение функции $t(x)=2^{2x-x^2}$.

Значит, $t\in(0;\,2]$.

Решим наше уравнение относительно t.

$$2\cos^2 t=c+\sqrt{3}\sin 2t.$$

Перенесем все, что не зависит от параметра, в левую часть.

$$2\cos^2 t-\sqrt{3}\sin 2t=c.$$

По формуле понижения степени $2\cos^2 t=1+\cos 2t$, значит

$$1+\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t=c,$$

$$\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t=c-1.$$

Применим метод введения вспомогательного угла, разделив обе части уравнения на 2.

$$\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t=\frac{c-1}{2},$$

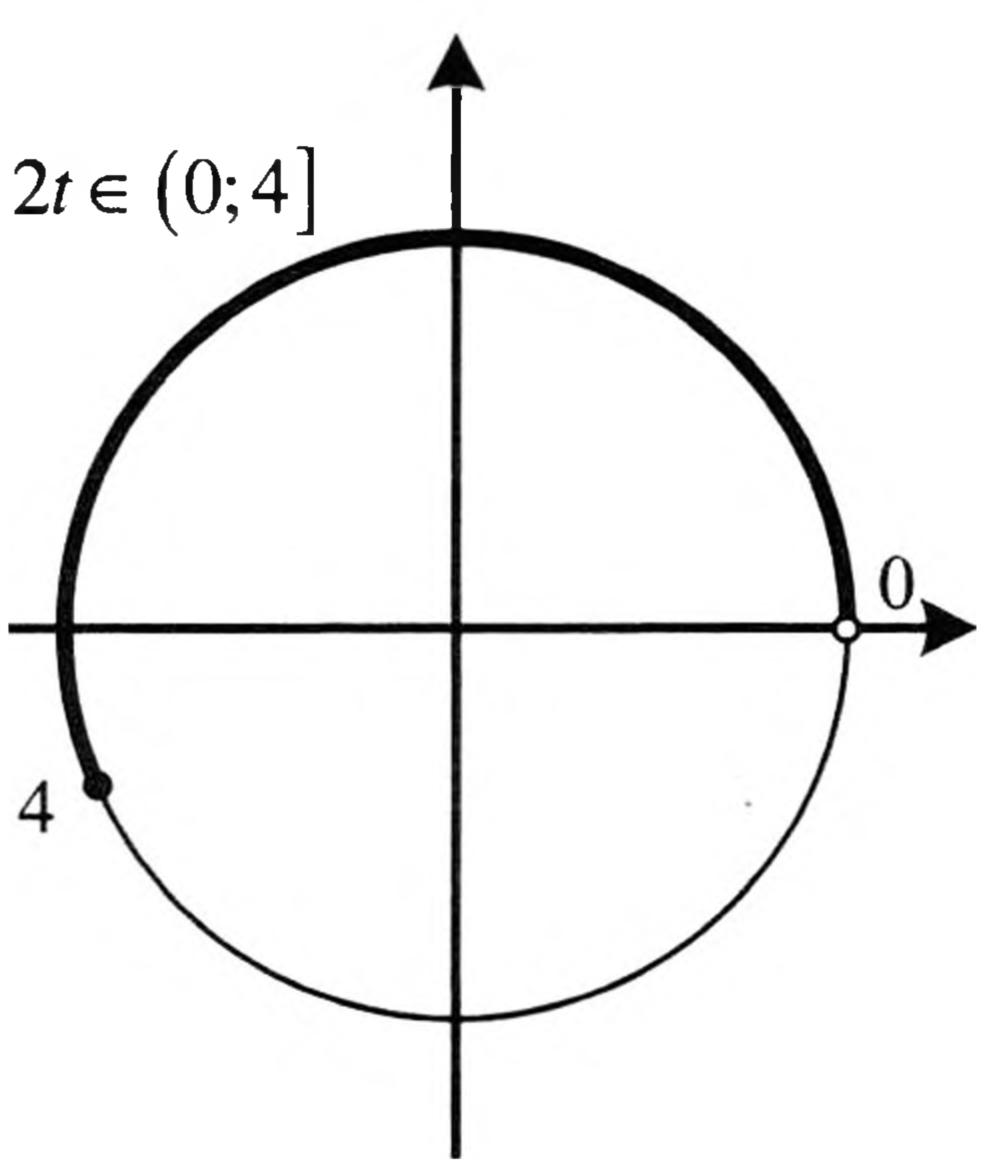
$$\cos\frac{\pi}{3}\cos 2t-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2t=\frac{c-1}{2},$$

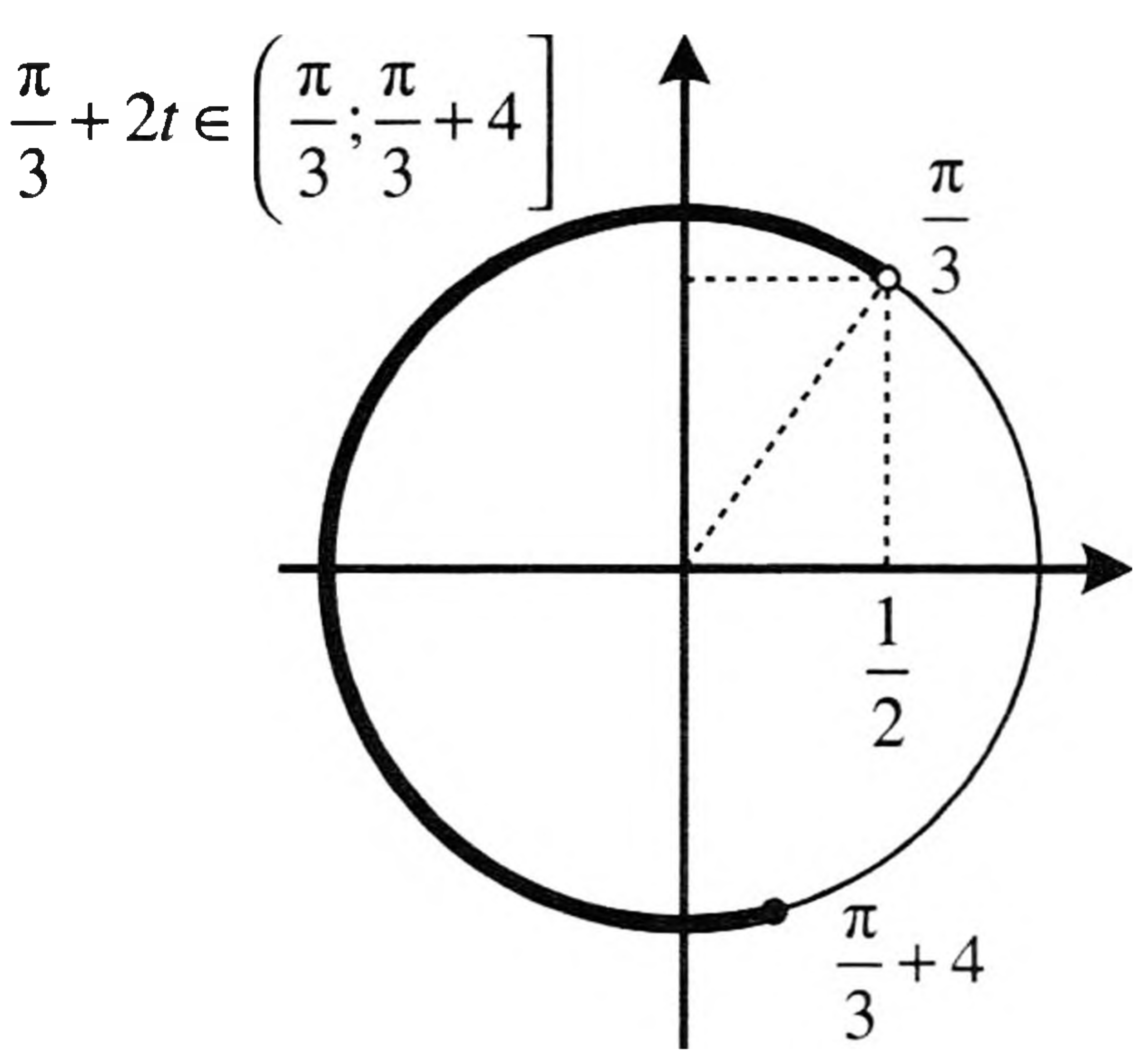
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+2t\right)=\frac{c-1}{2}.$$

Пусть угол $\varphi=\frac{\pi}{3}+2t$. Тогда $\cos\varphi=\frac{c-1}{2}$.

Выясним, какие значения может принимать $\cos\varphi$.

Так как $t\in(0;\,2]$, то $2t\in(0;\,4]$, а $\frac{\pi}{3}+2t\in\left(\frac{\pi}{3};4+\frac{\pi}{3}\right]$. Изобразим этот промежуток на тригонометрической окружности.





Получаем, что если $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2t \in \left(\frac{\pi}{3}; 4 + \frac{\pi}{3}\right]$, то $\cos\varphi \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

Это значит, что

$$-1 \le \frac{c-1}{2} < \frac{1}{2},$$

$$-2 \le c - 1 < 1,$$

$$-1 \le c < 2.$$

Поскольку $-1 \le \cos\varphi \le 1$ и $\cos\varphi = \frac{c-1}{2}$, мы имеем дополнительное условие:

$$-1 \le \frac{c-1}{2} \le 1,$$

$$-2 \le c - 1 \le 2,$$

$$-1 \le c \le 3.$$

Ответом является пересечение полученных промежутков.

Ответ: $c \in [-1; 2)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}.$$

Решение сложных задач мы рекомендуем начинать с замены переменной. Это позволит увидеть главное — структуру уравнения.

Обозначим $t = 2^{|x|}$.

Конечно же, $t > 0$, поскольку это значение показательной функции. А есть ли еще ограничения для t?

Очевидно, что $|x| \ge 0$, поэтому $2^{|x|} \ge 2^0 \Rightarrow 2^{|x|} \ge 1 \Rightarrow t \ge 1$.

Мы получили более строгую оценку для t. Если ее не сделать, ответ будет неверным.

Если $t = 2^{|x|}$, то $4^{|x|} = t^2$.

Уравнение примет вид $t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$.

Это уравнение — квадратное относительно t.

Заметим, что если при каком-либо значении a корнем данного уравнения будет $t = 1$, то такое значение a нам точно не подходит.

В самом деле, при $t = 1$ получим, что $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Тогда исходное уравнение относительно x имеет либо единственный корень $x = 0$, либо нечетное число корней, среди которых будет $x = 0$. А по условию задачи, нам надо получить два различных корня.

Два решения у исходного уравнения будет только, если $|x|$ не равен нулю. При этом переменная t будет принимать значения $t > 1$.

Продолжаем исследовать уравнение $t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$.

Если это уравнение имеет два различных положительных корня, то исходное уравнение имеет 4 решения. Такой случай нам тоже не подходит.

Исходное уравнение имеет 2 решения, когда корень $t > 1$ — единственный. Это возможно в нескольких случаях.

1) Этот корень у уравнения вообще единственный, то есть $D = 0$. Получается система условий:

$$\begin{cases} D = 0, \\ t > 1. \end{cases}$$

Найдем дискриминант и приравняем его к нулю.

$$D = \frac{49a^2}{(a-5)^2} - 4 \cdot \frac{12a+17}{a-5},$$

$$a^2 + 172a + 2 \cdot 170 = 0,$$

$$a_1 = -170, a_2 = -2.$$

Заметим, что считать дискриминант в данном уравнении довольно сложно. Проще воспользоваться теоремой Виета.

Сумма корней равна -172 (оба отрицательны), произведение корней $2 \cdot 170$ (положительно). Мы подобрали корни! $a_1 = -170$, $a_2 = -2$.

Подставим значения a, при которых дискриминант равен нулю, в исходное уравнение. Если $a = -2$, получим:

$$t^2 - \frac{7 \cdot (-2)}{-2-5} \cdot t + \frac{12 \cdot (-2) + 17}{-2-5} = 0,$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0.$$

При $a = -2$ дискриминант действительно равен нулю, $t = 1$. Мы уже говорили, что такое значение t не удовлетворяет условию задачи.

При $a = -170$ получим:

$$t = \frac{7a}{2(a-5)} = \frac{7\cdot(-170)}{2\cdot(-170-5)} = 3{,}4 > 1.$$

Этот случай нам подходит.

В каких же еще случаях будет выполняться условие задачи? Видимо, в том случае, если уравнение $t^2 - \frac{7a}{a-5}\cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$ имеет два корня, но только один из них больше единицы.

Очевидно, что $D > 0$ при $a \in (-\infty; -170) \cup (-2; +\infty)$.

Запишем, что $t_1 > 1$, $t_2 \le 1$.

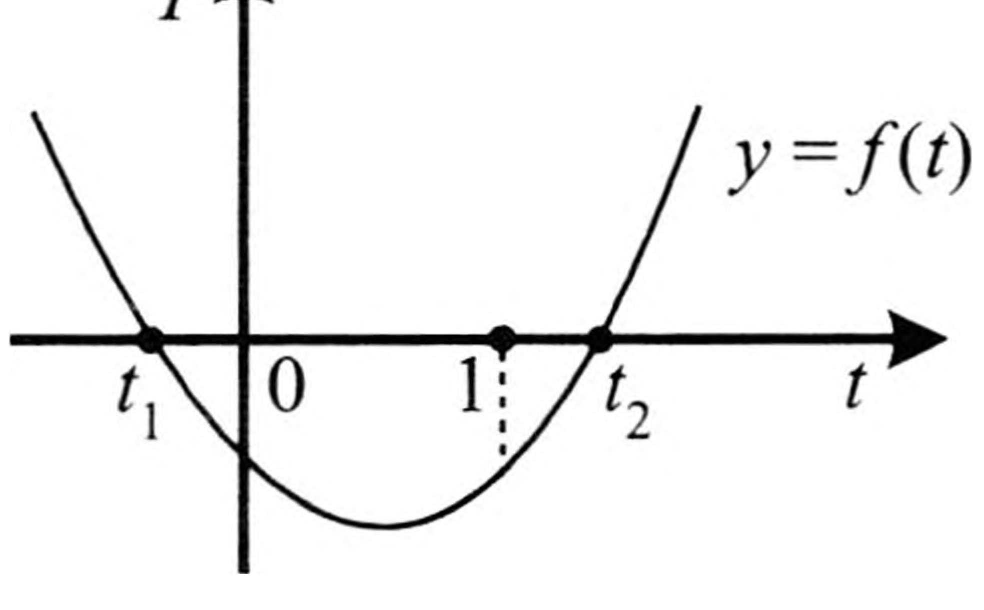
$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Случаи, когда $t_2 < 1$ и $t_2 = 1$ удобно рассмотреть по отдельности.

2) $\begin{cases} t_1 > 1, \\ t_2 < 1. \end{cases}$ Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(t) = t^2 - \frac{7a}{a-5}\cdot t + \frac{12a+17}{a-5}.$$

Ее график — парабола (ветви направлены вверх), имеющая две точки пересечения с осью t (так как дискриминант положительный). Нужно, чтобы один корень был больше единицы, а другой — меньше единицы. Значит, единица находится между корнями. Это значит, что в точке $x = 1$ функция принимает отрицательное значение, то есть $f(1) < 0$.



Подставим значение $t = 1$ в формулу функции и получим неравенство.

$$1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}<0.$$

Решив неравенство, получим $a\in(-2;5)$.

3) $\begin{cases} t_1>1, \\ t_2=1. \end{cases}$ Подставим корень $t = 1$ в уравнение

$$1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}=0.$$

Получим $a = -2$. Этот случай у нас уже был. В этом случае корень будет единственным и равным 1. Второго корня, большего единицы, нет.

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $\{-170\}\cup(-2;5)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+7+a|$$

имеет единственный корень.

Сейчас мы познакомим вас с новой идеей в решении задач с параметрами.

Прежде всего, обратим внимание на повторяющиеся элементы в этом уравнении. Мы можем сделать замену $a + 7 = b$. Получим:

$$x^2+b^2=|x-b|+|x+b|.$$

В правой части — уже знакомая нам сумма модулей. Помните, мы говорили, что эта схема часто встречается в задачах с параметром. Конечно, можно решать уравнение графически, построив графики левой и правой его частей, однако у этого способа есть недостаток: как мы узнаем, пересекаются графики в одной точке или у них еще есть точки касания?

Поэтому выберем другой способ. Обозначим функции в левой и правой частях уравнения как $f(x)$ и $g(x)$.

$$f(x)=x^2+b^2;$$

$$g(x)=|x-b|+|x+b|.$$

Заметим, что $f(x)$ и $g(x)$ — четные относительно x, так как их области определения симметричны относительно нуля и $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$.

Значит, если x_0 — корень уравнения, то и $(-x_0)$ — тоже его корень. Поэтому единственное решение может быть только при $x_0 = 0$. В этом и состоит идея решения таких задач.

Однако это условие является необходимым, но не достаточным. Может быть так, что $x_0 = 0$ — один из корней уравнения, и при этом есть еще решения. Тогда общее количество решений уравнения нечетно.

Чтобы выяснить, какие корни будут у уравнения, помимо $x_0 = 0$, подставим $x_0 = 0$ в уравнение.

Получим:

$b^2 = 2|b|$,

$b = 0$ или $b = -2$ или $b = 2$.

Теперь каждое из найденных значений надо проверить. Подставим их по очереди в исходное уравнение и найдем, сколько решений оно будет иметь при каждом таком b.

1) $b = 0$.

$x^2 = 2|x|$,

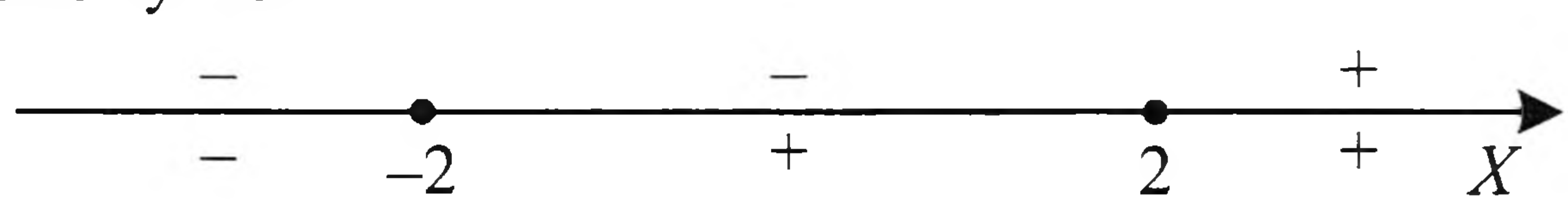
$x = 0,\ x = -2,\ x = 2$.

Исходное уравнение имеет 3 корня, и это нам не подходит.

2) $b = 2$.

$x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

Уравнение решается методом интервалов для модулей. На числовой прямой отмечаем точки –2 и 2 и решаем уравнение на каждом промежутке.



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2,\\ -x+2-x-2=x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 2,\\ -x+2+x+2=x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x-2+x+2=x^2+4.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2,\\ x\in\varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 2,\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x\in\varnothing.\end{cases}\end{array}\right.$$

Получим единственное решение $x = 0$. Нам это подходит. При этом $b = 2$, $a + 7 = 2$, $a = -5$.

3. При $b = -2$ уравнение тоже имеет один корень. Эта ветвь решения дает в результате: $b = -2$, $a + 7 = -2$, $a = -9$.

Ответ: -9, -5.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a\cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Сделаем замену $t = 2^{-x^2}$, $t > 0$.

Оценим t.

$$-x^2 \le 0,$$

$$2^{-x^2} \le 2^0,$$

$$2^{-x^2} \le 1.$$

Значит, $0 < t \le 1$.

Получим уравнение

$$\frac{t^2 - 2t + a}{2t - 1} = 3.$$

Это уравнение должно иметь хотя бы один корень на интервале $0 < t \le 1$.

Преобразуем уравнение. Понятно, что знаменатель дроби не равен нулю, то есть $t \ne 0{,}5$.

$$t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0.$$

Чтобы решения существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, то есть $D \geq 0$. Найдем дискриминант.

$$D = 4(a+3)^2 - 4(a+3) \geq 0.$$

Разложим левую часть этого неравенства на множители.

$$(a+3)(a-1) \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \leq -3, \\ a \geq -2. \end{array}\right.$$

При таких значениях параметра a уравнение имеет решения.

Что делать дальше? Автор бестселлера «Математика — абитуриенту» В. В. Ткачук советует при решении задачи с параметрами повторить про себя 50–100 раз фразу о том, что требуется найти в задаче.

Последуем мудрому совету классика и еще раз повторим условие. Надо найти все значения параметра, при которых исходное уравнение имеет хотя бы одно решение. Что касается уравнения $t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0$, оно должно иметь хотя бы один корень такой, что $0 < t \leq 1$. Значит, нам стоит рассмотреть случаи $D = 0$ и $D > 0$.

1) Начнем со случая $D = 0$. Это происходит при $a = -3$ и $a = -2$. Подставим эти значения параметра в уравнение:

При $a = -3$ получим: $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ — не подходит.

При $a = -2$ получим: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ — подходит.

2) Осталось посмотреть, что будет при $a < -3$ или $a > -2$. Рассмотрим отдельно эти случаи.

а) $a < -3 \Rightarrow a + 3 < 0$.

Теперь мы знаем, какого знака коэффициенты в уравнении

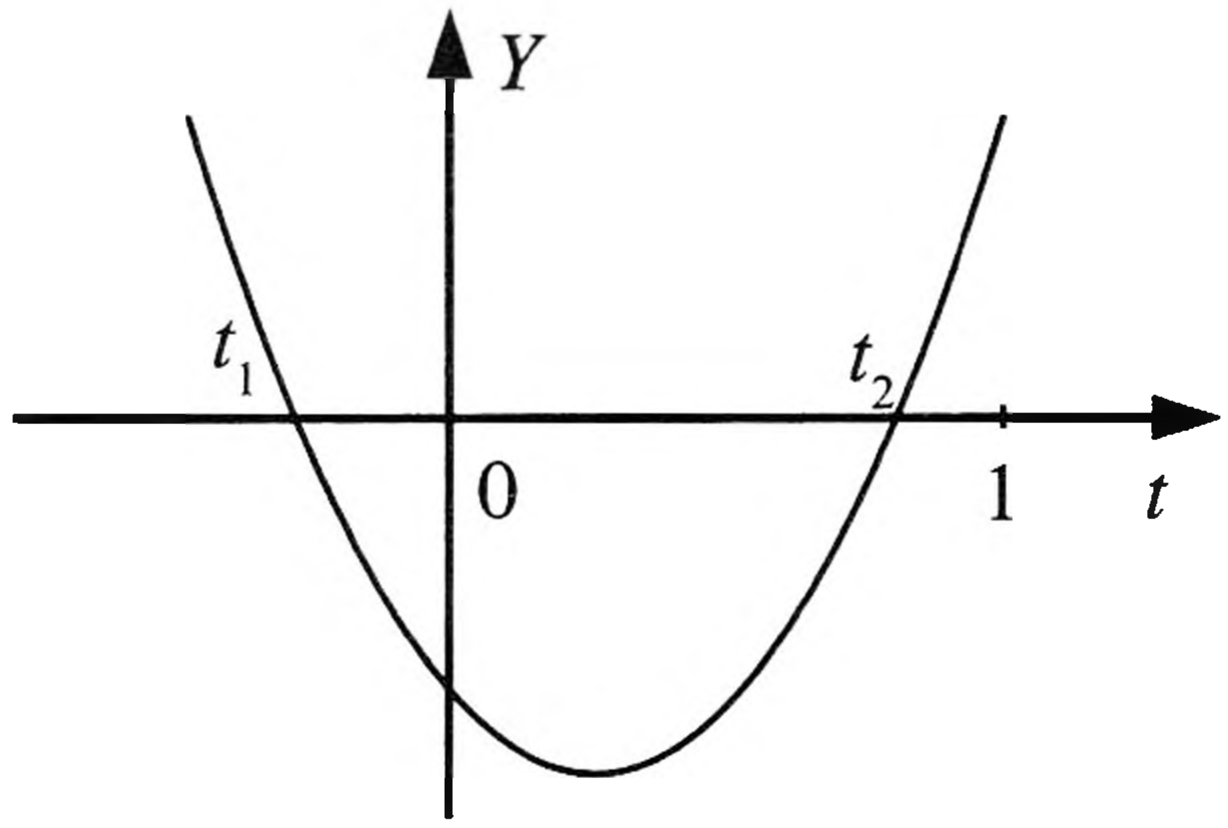
$$t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0.$$

Поскольку $a + 3 < 0$, то по теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 < 0, \\ t_1 + t_2 < 0. \end{cases}$$

Первое условие означает, что корни разных знаков, то есть один из них обязательно положительный. Нам нужно, чтобы этот корень был не больше единицы.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - 2(a+3)t + a + 3$ и изобразим ее график, зная, что у уравнения $f(t) = 0$ один из корней отрицательный, а второй положителен и не больше 1. Тогда $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$, т. е. на концах промежутка [0; 1] функция принимает значения разных знаков).



Это значит, что $f(0)\cdot f(1) < 0$. Обратите внимание, что мы не вычисляем корни по формуле корней квадратного уравнения. Мы обходим эту сложность так же, как и в задачах, которые мы рассмотрели первыми.

$$f(t) = t^2 - 2(a+3)t + a + 3,$$

$$f(0) = a+3;\ f(1) = 1 - a - 3.$$

$$(a+3)(1-a-3) < 0,$$

$$(a+3)(-a-2) < 0.$$

При $a + 3 < 0$ это условие выполняется. Значит, все значения $a < -3$ нам подходят.

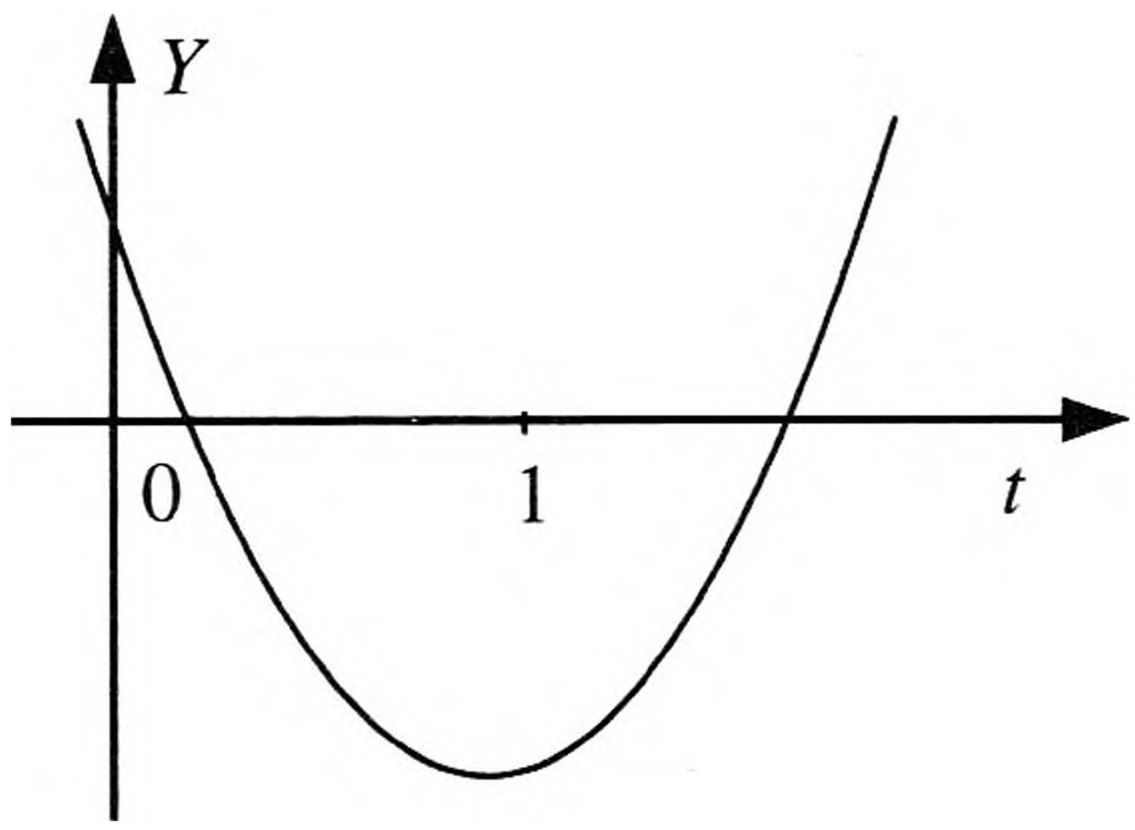
б) $a > -2 \Rightarrow a + 2 > 0 \Rightarrow a + 3 > 1$. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = a+3, \\ t_1 + t_2 = 2(a+3), \\ a+3 > 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \cdot t_2 > 1, \\ t_1 + t_2 > 2. \end{cases}$$

Оба корня положительны, так как положительны их произведение и сумма.

Что еще можно сказать о t_1 и t_2?

Они положительны, и их произведение больше единицы. Это означает, что хотя бы одно из этих чисел больше единицы. Значит, нам нужен случай, когда $t_1 < 1$, $t_2 > 1$, то есть точка $t = 1$ лежит между корнями уравнения.



Это значит:

$$f(1) < 0,$$
$$-a - 2 < 0,$$
$$a > -2.$$

Объединив случаи, получим.

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$.

11. При каких значениях a уравнение имеет ровно 3 корня?

$$|x + a^2| = |a + x^2|.$$

Это уравнение прекрасно. Слева модуль, справа модуль. Помните, в теме «модули» мы говорили, что делать в таком случае.

Так как обе части неотрицательны, их можно возвести в квадрат. Затем перенести все в левую часть, оставив в правой ноль, и разложить по формуле разности квадратов. Получим:

$$(x + a^2)^2 - (a + x^2)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x + a^2 - a - x^2 = 0, \\ x + a^2 + a + x^2 = 0. \end{array}\right.$$

Разложим на множители первое уравнение.

$$(x - a)(1 - x - a) = 0.$$

Теперь второе уравнение. На что оно похоже?

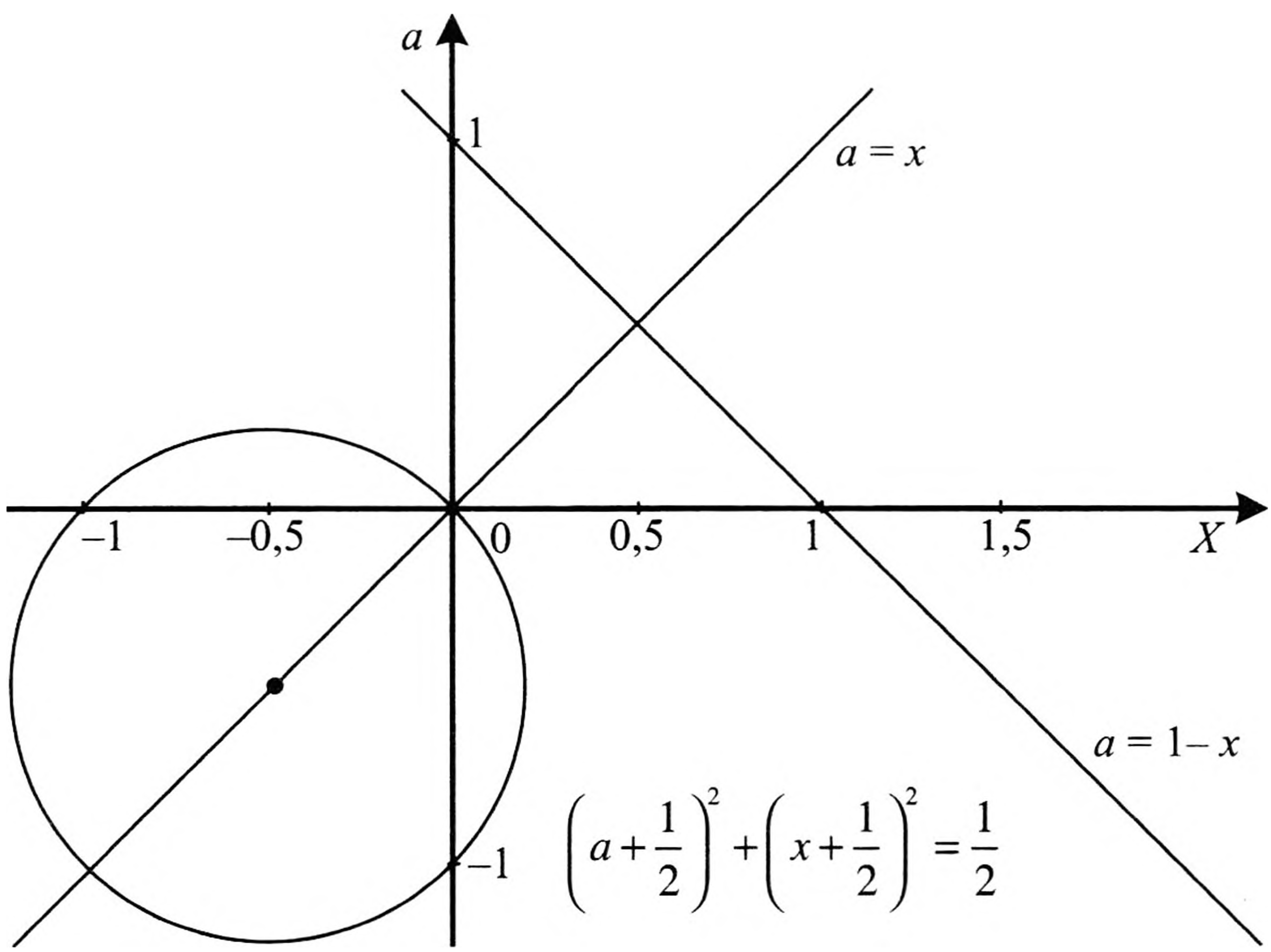
Будь в нем не x^2 и a^2, а x^2 и y^2, мы бы его свели к уравнению окружности. И здесь тоже окружность, только в координатах xOa. Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты:

$$a^2+a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Итак, в координатах xOa второе уравнение задает окружность с центром $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

А первое уравнение в координатах xOa задает две прямые: $a=x$ и $a=1-x$.



Нам надо найти, каким значениям a соответствует три значения x. Для этого будем проводить прямые, параллельные оси x. Три значения x соответствуют одному значению a в следующих четырех случаях:

1) Прямая касается окружности в верхней точке и пересекает обе прямые. Это происходит, если $a=R-0,5=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$.

2) Прямая проходит через начало координат и пересекает окружность в двух точках (причем начало координат — общая точка пересечения окружности и прямой $a = x$), а прямую $a = 1 - x$ в одной точке. Это соответствует значению $a = 0$.

3) Прямая проходит через вторую общую точку пересечения прямой $a = x$ и окружности $(-1; -1)$, пересекая окружность в двух точках, а прямую $a = 1 - x$ в одной точке. Это значение $a = -1$.

4) Прямая касается окружности в нижней точке и пересекает обе прямые. Этому значению соответствует $a = -R - 0,5 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; -1; 0.$

Дорогие друзья! Для дальнейшего освоения темы «Задачи с параметрами» рекомендуем следующие материалы:

1) *В. В. Ткачук.* Математика — абитуриенту.

2) *Виктор Высоцкий.* Задачи с параметрами.

3) Видеокурс Анны Малковой «Задачи с параметрами, графический метод» (бесплатно на *Youtube*).

4) Видеокурс Анны Малковой «С5. Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике» на сайте *www.dvd.ege-study.ru.*

5) Задачи на сайтах для подготовки к ЕГЭ:

www.reshuege.ru

www.mathus.ru

www.alexlalin.net