АВТОРСКИЙ КУРС

АННА МАЛКОВА

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ С ЛУЧШИМИ РЕПЕТИТОРАМИ РОССИИ

Авторский курс подготовки к ЕГЭ

ЕГЭ Подготовка к ЕГЭ и олимпиадам
Образовательная компания ЕГЭ-Студия

5+

ФЕНИКС

Серия «Авторский курс»

А. Г. Малкова

МАТЕМАТИКА

АВТОРСКИЙ КУРС ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

Издание 5-е

Ростов-на-Дону

ФЕНИКС

2019

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
М19

Малкова А. Г.

М19 Математика : авторский курс подготовки к ЕГЭ / А. Г. Малкова. — Изд. 5-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 540, [1] с.: ил. — (Авторский курс).

ISBN 978-5-222-32339-7

Авторский курс подготовки к ЕГЭ — результат многолетней работы Анны Малковой по подготовке к ЕГЭ и к вступительным экзаменам в вузы. Данная книга подойдет учащимся с любым уровнем знаний и поможет сдать ЕГЭ на 75–100 баллов.

Все задачи пособия полностью соответствуют программе подготовки к ЕГЭ.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-222-32339-7

Предисловие

Дорогие друзья!

Я репетитор-практик с опытом работы более 20 лет. Много лет я работаю на результат. Мои ученики отлично осваивают математику и поступают в выбранные вузы. А это значит, что каждый день я решаю творческую задачу: как объяснить максимально просто, интересно и понятно.

Старшеклассникам порой трудно освоить математику.

Трудно, хотя и существует множество книг для абитуриентов, многие из которых написаны очень хорошо. Среди этих книг есть замечательные пособия, однако они рассчитаны на определенный уровень математической подготовки и потому доступны не каждому читателю. А где найти учебник математики, понятный каждому школьнику? Я решила, что раз такой книги еще нет, мне пора ее написать.

Моя книга для тех, у кого ЕГЭ по математике — профильный экзамен. Для тех, кто намерен сдать ЕГЭ на 75–100 баллов и поступить в вуз на специальность, связанную с математикой.

В ней я рассказываю все так же, как ученикам на своих занятиях. Объясняю все хитрости, секреты, ключевые моменты — все, что скрыто от поверхностного взгляда. Вводя новые понятия или термины, я обязательно даю их определения. Так же, как и на занятиях, я рассказываю истории и употребляю метафоры, которые собирала много лет. Они помогают лучше запомнить и понять материал.

Все задачи полностью соответствуют программе подготовки к ЕГЭ. Но это не всё.

Чтобы освоить математику на уровне 75–100 баллов ЕГЭ, недостаточно зазубрить приемы решения отдельных задач. Необходимо четкое понимание основ математики и осознанное их применение. Именно поэтому в книге рассказывается о числовых множествах, об элементарных функциях, их графиках и свойствах, о взаимосвязи математических понятий. И поэтому, читая книгу, не пропускайте страницы и главы. Здесь важно все и нет ничего лишнего!

Моя книга рассчитана на обычного школьника. Если же вдруг материал показался сложным, значит, надо освоить или повторить более простые темы из курса математики 5–7 классов.

Книга будет также полезна школьным учителям и репетиторам.

Я благодарна своим коллегам, принимавшим участие в работе над книгой, — Диане Ермаковой, Антону Акимову, Ивану Королю. Особо хочу поблагодарить одного из лучших репетиторов России Игоря Вячеславовича Яковлева, чей вклад в создание этой книги поистине неоценим.

Анна Малкова

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи на проценты

Первая тема, с которой я традиционно начинаю курс подготовки к ЕГЭ по математике, — это задачи на проценты.

Процент — это одна сотая часть.

Например, 1% от 200 — это 2; 7% от 10 равно 0,7.

Очевидно, что 50% — это половина, 25% — это четверть, 20% — это одна пятая часть.

Найти 37% от числа a — это значит умножить число a на 0,37. Получится $0{,}37a$.

В задачах, да и в жизни, часто говорится об изменении какой-либо величины на определенный процент. Что это значит?

Повышение цены на 10% означает, что к прежней цене x прибавили $0{,}1x$. То есть если первоначальная цена равна x, то новая цена составит $x + 0{,}1x = 1{,}1x$. Скидка на 25% означает, что прежняя цена уменьшилась на 25%. И если первоначальная цена была x, то новая цена составит $x - 0{,}25x = 0{,}75x$.

1. За год население города увеличилось на 1,3 процента. Во сколько раз выросло население города?

Пусть население города — x жителей. За год оно увеличилось на 1,3% и стало равно

$$x + 0{,}013x = 1{,}013x.$$

Это значит, что население выросло в 1,013 раза.

Запомним важное правило:

за 100% принимается та величина, с которой сравниваем.

2. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Цена повышена на 16% по сравнению с чем? — с прежней ценой. Значит, прежняя цена — это 100%, новая цена — 116%.

Получаем, что

116% — 3480 рублей
100% — x рублей.

Во сколько раз 3480 рублей больше, чем x рублей? — Во столько же, во сколько раз 116% больше, чем 100%, то есть

$$\frac{3480}{x} = \frac{116}{100}.$$

Выразим x из пропорции:

$$x = \frac{3480 \cdot 100}{116}.$$

Ответ: 3000.

3. Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

Мы хотим узнать, на сколько снизилась цена по сравнению с первоначальной, поэтому первоначальную цену принимаем за 100%. Найдем, какой процент новая цена составляет от первоначальной. Обозначим его за x.

Получаем, что

3500 рублей — это 100%,
2800 рублей — это x%.

Составляем пропорцию:

$$\frac{3500}{2800} = \frac{100}{x}$$

и решаем ее:

$$x = \frac{2800 \cdot 100}{3500}, \ x = 80.$$

Новая цена телефона составляет 80% от первоначальной. Значит, цена была снижена на 20%.

Ответ: 20.

Еще одна задача на проценты. Обратите внимание — она не так проста, как может показаться.

4. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Марья Ивановна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марьи Ивановны?

Итак, Марья Ивановна получила 9570 рублей после удержания налога. Значит, 13% заработной платы у нее вычли, а выдали 87%. Дальше все просто: вам нужно составить пропорцию и решить ее.

Ответ: зарплата Марьи Ивановны составляет 11000 рублей.

5. В городе N живет 200 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

В чем сложность задачи и почему ее редко решают правильно? Дело в том, что «15 процентов» или «45 процентов» — понятия относительные. Каждый раз за сто процентов могут приниматься разные величины. Помните правило? В каждом случае за сто процентов принимается то, с чем мы сравниваем.

Найдем сначала, сколько в городе взрослых. По условию, дети и подростки составляют 15% от 200 000 жителей. Значит, их число — это 15% от 200 000, то есть $\frac{15}{100}$ надо умножить на 200 000.

$$\frac{15}{100}\cdot 200\ 000 = 30\ 000.$$

Получим, что в городе N живет 30 000 детей и подростков. Следовательно, взрослых 170 000. Среди взрослых 45% не работает. Теперь за 100% мы принимаем число взрослых. Получается, что число работающих взрослых жителей равно 55% от 170 000, то есть 93 500.

Ответ: 93 500.

Соберем вместе правила и формулы, которые мы применяем в задачах на проценты.

За 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

Если величину x увеличить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Если величину x уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

Если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right).$$

Если величину x дважды увеличить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2.$$

Все эти соотношения выводятся элементарно. Например, если величина x увеличилась на $p\%$ — это значит, что к x прибавили $\frac{p}{100}\cdot x$. Вынесем x за скобки:

$$x+\frac{p}{100}x=x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Остальные формулы получаются аналогично. Запомните их. Они пригодятся нам и сейчас, и позже, когда мы будем решать задачи с экономическим содержанием.

6. В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

По условию, в 2009 году число жителей выросло на 8%, то есть стало равно $40\,000 \cdot 1{,}08 = 43\,200$ человек.

А в 2010 году число жителей выросло на 9%, теперь уже по сравнению с 2009 годом. Получаем, что в 2010 году в квартале стало проживать $40\,000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}09 = 47\,088$ жителей.

Ответ: 47 088.

7. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

На первый взгляд кажется, что в условии ошибка и цена акций вообще не должна измениться. Ведь они подорожали и подешевели на одно и то же число процентов! Но не будем спешить.

Пусть при открытии торгов в понедельник акции стоили x рублей. К вечеру понедельника они подорожали на p% и стали стоить $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. Теперь уже эта величина принимается за 100%, и к вечеру вторника акции подешевели на p% по сравнению с этой величиной.

Соберем данные в таблицу:

	В понедельник утром	**В понедельник вечером**	**Во вторник вечером**
Стоимость акций	x	$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

По условию, акции в итоге подешевели на 4%.

Получается, что

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)=x\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right).$$

Поделим обе части уравнения на x (ведь он не равен нулю, значит, делить на него можно) и вспомним, что $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Применим эту формулу в левой части уравнения:

$$1-\frac{p^2}{100^2}=1-\frac{4}{100};$$

$$\frac{p^2}{100^2}=\frac{4}{100}.$$

По смыслу задачи, $p>0$.

Получаем, что $p=20$.

Ответ: 20.

8. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

Эта задача тоже решается по одной из формул, приведенных в начале главы. Холодильник стоил 20 000 рублей. Его цена два раза уменьшилась на p %, и теперь она равна

$$2000\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=15\ 842;$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{15\ 842}{20\ 000};$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{7921}{10\ 000}.$$

Извлечем корень из обеих частей уравнения:

$$1-\frac{p}{100}=\frac{89}{100};$$

$$p=11.$$

Ответ: 11.

9. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

Пусть стоимость рубашки равна x, стоимость куртки y. Как всегда, принимаем за сто процентов ту величину, с которой сравниваем. В данном случае это цена куртки. Тогда стоимость четырех рубашек составляет 92% от цены куртки, то есть $4x = 0{,}92y$. Стоимость одной рубашки — в 4 раза меньше: $x = 0{,}23y$, а стоимость пяти рубашек:

$$5x = 1{,}15y = \frac{115}{100}y = 115\% y.$$

Получили, что пять рубашек на 15% дороже куртки.
Ответ: 15.

10. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Нарисуем таблицу. Ситуации, о которых говорится в задаче («если бы зарплата мужа увеличилась, если бы стипендия дочки уменьшилась...»), назовем «ситуация A» и «ситуация B».

	Муж	Жена	Дочь	Общий доход
В реальности	x	y	z	$x + y + z$
Ситуация A	$2x$	y	z	$1{,}67(x + y + z)$
Ситуация B	x	y	$\frac{z}{3}$	$0{,}96(x + y + z)$

Остается записать систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1{,}67(x + y + z), \\ x + y + \frac{1}{3}z = 0{,}96(x + y + z). \end{cases}$$

Но что мы видим? Два уравнения и три неизвестных! Мы не сможем найти x, y и z по отдельности. Да это и не нужно. Ведь в ответе нам нужно записать отношение зарплаты жены к общему доходу семьи, то есть

$$\frac{y}{(x+y+z)}.$$

Поэтому возьмем первое уравнение и из обеих его частей вычтем сумму $(x + y + z)$. Получим:

$$x = 0{,}67\,(x + y + z).$$

Это значит, что зарплата мужа составляет 67% от общего дохода семьи.

Во втором уравнении мы тоже вычтем из обеих частей выражение $x + y + z$, упростим и получим, что $z = 0{,}06\,(x + y + z)$.

Значит, стипендия дочки составляет 6% от общего дохода семьи. Тогда зарплата жены составляет 27% общего дохода.

Ответ: 27.

Трудно ли сдать ЕГЭ по математике на высокие баллы?

Есть экзамены, где для успешной сдачи необходимо выучить колоссальный объем фактического материала. История, химия, биология. В этом отношении математика намного проще!

Меньше зубрежки. Больше понимания. Четкая структура, логичная взаимосвязь разделов. Даже если вы забыли формулу, у вас есть шанс ее вывести.

Здесь важно осознанное выполнение каждого действия. Решая задачу, я задаю себе вопросы: «Что я сейчас делаю? И почему именно так?» Например: «В левой и правой частях этого уравнения находятся функции разных типов, поэтому я применяю метод оценки». Математика понятна, когда вы знаете, что делаете.

Как только смысл действий теряется — начинаются сложности. «Убрать x» (куда убрать-то?). «Избавиться от корня» (как именно избавиться?) Появляются какие-то магические заклинания с туманным смыслом. Изучение точной науки превращается в шаманскую пляску с бубном.

В этой книге «шаманских заклинаний» вы не встретите. Все будет для вас просто и понятно. Если я ввожу новое понятие или действие — обязательно даю определение, объясняю, что оно значит, зачем нужно и как связано с другими темами.

Вы можете заметить, что к некоторым темам я возвращаюсь неоднократно, причем на новом уровне. Почему?

Чтобы хорошо запомнить что-то новое, надо услышать и увидеть это 5–7 раз, а также применить на практике. Изучение новой для вас науки — не линейный процесс, а скорее построение системы ассоциативных связей. Лучший способ запомнить — это сделать. Поэтому в книге я даю список наиболее полезных сайтов для подготовки к ЕГЭ. На них вы найдете задачи для тренировки.

Математическая грамотность

1. Договоримся грамотно называть числа. 2,3 — это две целых три десятых, а вовсе не «две третьих». 0,5 — это ноль целых пять десятых, а не «ноль пятых».

2. В этой книге даны приемы быстрого счета. Считайте без калькулятора. Всегда. По крайней мере, пока не сдали ЕГЭ. Каждую задачу, которую вы решаете, на контрольной в классе или в домашней работе, рассматривайте как тренировку приемов быстрого счета.

3. Считаем без ошибок! Чтобы не жаловаться после экзамена, что потеряли баллы из-за ошибок, разберем, откуда ошибки берутся.

1) Верный путь к потере драгоценных баллов — грязь в вычислениях. Что-то исправлено, что-то зачеркнуто, одна цифра «корябается» поверх другой. Взгляните на свои черновики.

Пишите разборчиво. Нам бумаги не жалко. Если что-то неправильно — лучше всю строчку напишите заново, только не исправляйте одно на другое!

2) Второй источник ошибок — столбик. Почему-то многие, считая в столбик, стараются сделать это

– очень быстро,
– очень мелкими циферками, в уголке тетради,
– карандашом.

Вы что, стесняетесь считать в столбик?! Ну и зря! Все считают в столбик, и я тоже. В этом нет ничего особенного.

3) Полезно знать, что скобки в выражении ставятся не просто так!

Запись $5 \cdot (3 + 100)$ означает, что число 5 умножается на 3 (будет 15), число 5 умножается на 100 (получается 500), результаты складываются и получается 515.

$$5 \cdot (3 + 100) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 100 = 15 + 500 = 515.$$

Если скобки убрать, получится совсем другое число, проверьте, $5 \cdot 3 + 100 = 115$. А многие учащиеся игнорируют скобки в математических выражениях, мол, «для себя пишу».

4) Больше всего арифметических ошибок связано с дробями. Если вы делите дробь на дробь — пользуйтесь тем, что $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Помните, что дробную черту всегда можно заменить знаком деления «:»! И никаких многоэтажных дробей!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Видите четырехэтажную дробь? Этот «гамбургер» к математике отношения не имеет!

4. Помните, что ответ в первой части ЕГЭ по математике должен быть целым числом или конечной десятичной дробью. Если в заданиях, где ответ надо записывать в клеточки, вы получили π, или $\sqrt{2}$, или $2x$ — ответ неверный.

5. И главное правило. Оно относится не только к математике!

Фиксируйте для себя любой, даже незначительный, успех. Хвалите себя! Поняли, как работают формулы приведения, — круто! Освоили задачи с экономическим содержанием — победа! Даже так, большими буквами: ПОБЕДА! Знайте, что я, автор этой книги, вместе с вами радуюсь вашим успехам.

Текстовые задачи на движение. Скорость, время, расстояние

Полезно помнить, что задачи на движение и работу решаются по единому алгоритму. О нем мы подробно расскажем. Но сначала — несколько вопросов по программе младшей школы.

Запишите в виде математического выражения:

1) x на 5 больше y;
2) x в пять раз больше y;
3) z на 8 меньше, чем x;
4) z меньше x в 3,5 раза;
5) t_1 на 1 меньше, чем t_2;
6) частное от деления a на b в полтора раза больше b;
7) квадрат суммы x и y равен 7;
8) x составляет 60 процентов от y;
9) m больше n на 15 процентов.

Пока не напишете — в ответы не подглядывайте!

Иногда выпускник долго думает, как же это «x на 5 больше y». А в школе в этот момент «проходят» первообразные и интегралы. Итак, правильные ответы:

1) $x = y + 5$.

x больше, чем y. Разница между ними равна пяти. Значит, чтобы получить бóльшую величину, надо к меньшей прибавить разницу.

2) $x = 5y$.

x больше, чем y, в пять раз. Значит, если y умножить на 5, получим x.

3) $z = x - 8$.

z меньше, чем x. Разница между ними равна 8. Чтобы получить меньшую величину, надо из большей вычесть разницу.

4) $z = x : 3{,}5$.

5) $t_1 = t_2 - 1$.

t_1 меньше, чем t_2. Значит, если из большей величины вычтем разницу, получим меньшую.

6) $a : b = 1{,}5b$.

7) $(x + y)^2 = 7$.

Напомним, что

- сумма — это результат сложения двух или нескольких слагаемых;
- разность — это результат вычитания;
- произведение — результат умножения двух или нескольких множителей;
- частное — результат деления чисел.

8) $x = 0{,}6y$.

Мы говорили, что $60\% y = \frac{60}{100} \cdot y = 0{,}6y$.

9) $m = 1{,}15n$.

Если n принять за 100%, а m на 15 процентов больше, то $m = 115\%$, то есть $m = 1{,}15n$.

Чаще всего в вариантах ЕГЭ встречаются **задачи на движение**.

Два автомобиля едут по дороге, лодка плывет по течению, а затем против течения, велосипедист обгоняет пешехода. Общая формула:

$$\boldsymbol{S = v \cdot t},$$

то есть

расстояние = скорость · время.

Из этой формулы можно выразить скорость $v = \frac{S}{t}$ или время $t = \frac{S}{v}$.

Запомните, что **в качестве переменной *x* удобнее всего выбирать скорость**. Тогда задача точно решится!

Внимательно читаем условие. В нем уже все есть. Да и вообще в любом вопросе всегда содержится ответ.

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Что обозначить за x? Очевидно, скорость велосипедиста — ведь ее и надо найти. Автомобилист проезжает на 40 километров в час больше. Значит, скорость автомобилиста равна $x + 40$.

Нарисуем таблицу. Сразу внесем в нее расстояние. Из условия задачи известно, что и велосипедист, и автомобилист проехали по 50 км. Можно внести в таблицу скорость — она равна x и $x + 40$ для велосипедиста и автомобилиста соответственно. Теперь заполним графу «время».

Найдем его по формуле: $t = \frac{S}{v}$. Для велосипедиста получим $t_1 = \frac{50}{x}$, для автомобилиста $t_2 = \frac{50}{x+40}$ и тоже запишем в таблицу.

Вот что получается:

	v	t	S
Велосипедист	x	$t_1 = \frac{50}{x}$	50
Автомобилист	$x + 40$	$t_2 = \frac{50}{x+40}$	50

Остается записать, что велосипедист прибыл в конечный пункт на 4 часа позже автомобилиста. Позже — значит, времени он затратил больше. Это значит, что t_1 на четыре больше, чем t_2, то есть

$$t_2 + 4 = t_1;$$

$$\frac{50}{x+40} + 4 = \frac{50}{x}.$$

Смотрите, как легко решается это уравнение:

$$\frac{50}{x} - \frac{50}{x+40} = 4.$$

В левой части уравнения приводим дроби к одному знаменателю. Правую часть пока не трогаем. Общий знаменатель равен $x(x + 40)$.

Первая дробь: и числитель, и знаменатель умножим на $(x + 40)$, вторая — на x (и числитель, и знаменатель).

Получим:

$$\frac{50(x+40) - 50x}{x(x+40)} = 4;$$

$$\frac{50x + 2000 - 50x}{x(x+40)} = 4;$$

$$\frac{2000}{x(x+40)} = 4.$$

Разделим обе части нашего уравнения на 4 (или умножим на $\frac{1}{4}$). Очевидно, оно станет проще. Но почему-то многие учащиеся забывают это делать, и в результате получаются сложные уравнения и шестизначные числа в качестве дискриминанта.

$$\frac{500}{x(x+40)}=1.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x + 40)$. Получим:

$$x(x + 40) = 500.$$

Раскроем скобки и перенесем все в левую часть:

$$x^2 + 40x - 500 = 0.$$

Получили квадратное уравнение.

Напомним, что квадратным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Решается оно стандартно.

Сначала находим дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, а затем корни по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

В нашем уравнении $a = 1$, $b = 40$, $c = -500$. Найдем дискриминант $D = 1600 + 2000 = 3600$ и корни:

$$x_1 = 10,\ x_2 = -50.$$

Ясно, что x_2 не подходит по смыслу задачи, так как скорость велосипедиста не может быть отрицательной.

Ответ: 10.

Если вы забыли, что значит «возвести в квадрат», «возвести в куб» или «извлечь корень» — давайте вспомним. Ведь мы договорились, что в этой книге непонятных слов и символов не будет.

Возвести число в квадрат — означает умножить его само на себя.

$$a^2 = a \cdot a.$$

Например, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$.

Обратите внимание, что и $(-8)^2 = 64$, то есть уравнение $x^2 = 64$ имеет два решения: 8 и -8.

Квадрат любого числа всегда неотрицателен. Это очевидно — ведь если умножить положительное число на положительное, в результате получится число положительное. Как говорится, «плюс» умножить на «плюс» — получится «плюс». Если умножить «минус» на «минус» — тоже получится «плюс». А ноль в квадрате равен нолю.

Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Например, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $(-3)^3 = -27$.

Куб числа может быть отрицательным.

Арифметический квадратный корень из числа *a* — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Он обозначается $\sqrt{a}$.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;$

$\sqrt{a} \geq 0,\ a \geq 0.$

Например,

$\sqrt{9} = 3;$

$\sqrt{0} = 0;$

$\sqrt{49} = 7;$

$\sqrt{169} = 13.$

Обратите внимание:

1) Квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел.

2) Выражение $\sqrt{a}$ всегда неотрицательно. Например, $\sqrt{25} = 5$. А вот $-5 = -\sqrt{25}$.

Таблицу квадратов чисел от 10 до 30 лучше знать наизусть. Она приведена в конце этой книги, в справочных материалах.

Нам понадобятся также формулы сокращенного умножения:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Выучите их наизусть.

Еще одна задача про велосипедиста.

2. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость велосипедиста на пути из A в B равна x. Тогда его скорость на обратном пути равна $x + 3$. По условию задачи, расстояние между городами A и B равно 70 км, значит, в графе «расстояние» в обеих строчках пишем одно и то же: 70 км. Осталось записать время.

Поскольку $t = \dfrac{S}{v}$, то на путь из A в B велосипедист затратит время $t_1 = \dfrac{70}{x}$, а на обратный путь — время $t_2 = \dfrac{70}{x+3}$.

	v	t	S
Туда	x	$t_1 = \dfrac{70}{x}$	70
Обратно	$x + 3$	$t_2 = \dfrac{70}{x+3}$	70

На обратном пути велосипедист сделал остановку на 3 часа и в результате затратил столько же времени, сколько на пути из A в B. Это значит, что на обратном пути он крутил педали на 3 часа меньше.

Значит, t_2 на три меньше, чем t_1. Получается уравнение:

$$\frac{70}{x+3} + 3 = \frac{70}{x}.$$

Группируем слагаемые. Все, что с иксом, соберем в одной части уравнения. Все, что без икса — в другой части:

$$\frac{70}{x} - \frac{70}{x+3} = 3.$$

Приводим дроби к одному знаменателю:

$$\frac{70(x+3)-70x}{x(x+3)}=3;$$

$$\frac{70\cdot 3}{x(x+3)}=3.$$

Делим обе части уравнения на 3, получаем:

$$\frac{70}{x(x+3)}=1.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x + 3)$, раскроем скобки и все соберем в левой части.

$$x^2 + 3x - 70 = 0.$$

Находим дискриминант. Он равен $9 + 4 \cdot 70 = 289$.

Найдем корни уравнения: $x_1 = 7$. Это вполне правдоподобная скорость велосипедиста. А ответ $x_2 = -10$ не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна.

Ответ: 7.

Следующий тип — задачи о движении по воде. Например, теплоход, катер или моторная лодка плывет по речке.

Обычно в условии говорится о собственной скорости плавучей посудины и скорости течения.

Собственной скоростью называется скорость в неподвижной воде.

Скорость судна при движении по течению реки равна сумме собственной скорости судна и скорости течения реки.

Это логично. Течение помогает.

А если двигаться против течения? Течение будет мешать, относить назад. В этом случае скорость течения будет вычитаться из собственной скорости судна.

Скорость при движении против течения равна разности собственной скорости судна и скорости течения.

Решая такие задачи, мы считаем, что плот, в отличие от катера, может двигаться только со скоростью течения. На плоту нет мотора, и на нем трудно грести веслами.

3. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Помните, мы говорили, что в качестве неизвестной величины лучше всего выбрать скорость?

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x.

Тогда скорость ее движения по течению равна $x + 1$, а против течения $x - 1$. Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 255 км.

Внесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». Мы знаем, как это делать. При движении по течению $t_1 = \frac{255}{x+1}$, при движении против течения $t_2 = \frac{255}{x-1}$, причем t_2 на два часа больше, чем t_1.

	v	t	S
По течению	$x + 1$	$t_1 = \frac{255}{x+1}$	255
Против течения	$x - 1$	$t_2 = \frac{255}{x-1}$	255

Условие «t_2 на два часа больше, чем t_1» можно записать в виде алгебраического выражения:

$$t_2 - 2 = t_1.$$

Составляем и решаем уравнение:

$$\frac{255}{x-1} - 2 = \frac{255}{x+1};$$

$$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2.$$

Приводим дроби в левой части уравнения к одному знаменателю:

$$\frac{255(x+1) - 255(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2.$$

Раскрываем скобки:

$$\frac{510}{x^2 - 1} = 2.$$

Делим обе части на 2, чтобы упростить уравнение:

$$\frac{255}{x^2-1}=1.$$

Умножаем обе части уравнения на x^2-1:

$$x^2-1=255;$$
$$x^2=256.$$

Вообще-то это уравнение имеет два корня: 16 и –16 (оба этих числа при возведении в квадрат дают 256). Но, конечно же, отрицательный ответ не подходит по смыслу — скорость лодки должна быть положительной.

Ответ: 16.

Мы незаметно ввели новое понятие — «корни уравнения».

Напомним, что **корень уравнения** — такое число, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет.

4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Обозначим за x скорость течения. Тогда скорость движения теплохода по течению равна $15+x$, а скорость его движения против течения равна $15-x$. Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 200 км.

Осталось заполнить графу «время».

Поскольку $t=\frac{S}{v}$, время t_1 движения теплохода по течению равно $\frac{200}{15+x}$, а время t_2, которое теплоход затратил на движение против течения, равно $\frac{200}{15-x}$.

	v	t	S
По течению	$15+x$	$\frac{200}{15+x}$	200
Против течения	$15-x$	$\frac{200}{15-x}$	200

В пункт отправления теплоход вернулся через 40 часов после отплытия. 10 часов из этого времени длилась стоянка, следовательно, 30 часов теплоход был в пути, то есть плыл сначала по течению, затем — против течения.

Значит, $t_1 + t_2 = 30$.

$$\frac{200}{15+x}+\frac{200}{15-x}=30.$$

Прежде всего, разделим обе части уравнения на 10. Оно станет проще!

$$\frac{20}{15+x}+\frac{20}{15-x}=3.$$

Мы не будем подробно останавливаться на технике решения уравнения. Все уже понятно — приводим дроби в левой части уравнения к одному знаменателю, затем умножаем обе части уравнения на $225 - x^2$, получаем квадратное уравнение $x^2 = 25$. Поскольку скорость течения положительна, получаем: $x = 5$.

Ответ: 5.

Вы, наверное, заметили, как все эти задачи похожи. Текстовые задачи хороши еще и тем, что ответ легко проверить с точки зрения здравого смысла. Ясно, что расстояние, которое пройдет пешеход за три часа, никак не может быть равно тысяче километров, а скорость теплохода, идущего вверх по реке, не должна быть меньше скорости течения.

5. Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Пусть скорость течения равна x. Тогда по течению баржа плывет со скоростью $7 + x$, а против течения — со скоростью $7 - x$.

Сколько времени баржа плыла? Ясно, что надо от 16 отнять 10, а затем вычесть время стоянки. Обратите внимание, что 1 час 20 минут придется перевести в часы: 1 час 20 минут равно $1\frac{1}{3}$ часа. Получаем, что суммарное время движения баржи (по течению и против) равно $4\frac{2}{3}$ часа.

	v	t	S
По течению	$7+x$	t_1	15
Против течения	$7-x$	t_2	15

$$t_1 + t_2 = 4\frac{2}{3}.$$

Возникает вопрос: какой из пунктов, A или B, расположен выше по течению? А какая разница? В данной задаче это неважно. Ведь в уравнение входит сумма $t_1 + t_2$, равная

$$\frac{15}{7+x}+\frac{15}{7-x}.$$

Итак,

$$\frac{15}{7+x}+\frac{15}{7-x}=4\frac{2}{3}.$$

Решим это уравнение. Число $4\frac{2}{3}$ в правой части уравнения представим в виде неправильной дроби:

$$4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$$

Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, раскроем скобки и упростим. Получим:

$$30\cdot 7=\frac{14}{3}\cdot\left(49-x^2\right).$$

Работать с дробными коэффициентами неудобно! Если разделить обе части уравнения на 14 и умножить на 3, оно станет значительно проще:

$$45 = 49 - x^2;$$
$$x^2 = 4.$$

Поскольку скорость течения положительна, $x = 2$.

Ответ: 2.

Текстовые задачи на работу. Два тракториста, два программиста...

Следующий тип заданий, часто встречающийся в вариантах ЕГЭ по математике, — задачи на работу. Они тоже решаются по одной-единственной формуле: $A = p \cdot t$.

Здесь A — работа, t — время, а величина p — **производительность** (по смыслу является скоростью работы). Она показывает, сколько работы сделано в единицу времени.

Мини-пекарня печет булочки. Количество булочек, испеченных за день, — это производительность пекарни.

Художник в мастерской расписывает елочные шарики. Его производительность — количество расписанных шариков в день.

Бригада строит тоннель метро. Производительность бригады — сколько метров тоннеля построено за месяц.

Труба наполняет бассейн. Количество литров воды в минуту также можно назвать производительностью трубы.

Правила решения таких задач очень просты.

1. $A = p \cdot t$, то есть работа = производительность · время. Из этой формулы легко найти t или p.
2. Если объем работы не важен и в задаче нет данных, позволяющих его найти, то работа принимается за единицу. Например, построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, булочек, страниц или построенных домов — работа как раз и равна этому количеству.
3. В качестве переменной удобно взять именно производительность.
4. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода...) — их производительности складываются.

Посмотрим, как это применяется на практике.

1. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

Так же, как в задачах на движение, заполним таблицу.

В колонке «работа» и для первого, и для второго рабочего запишем: 110. В задаче спрашивается, сколько деталей в час делает второй рабочий, то есть чему равна его производительность. Примем ее за x. Тогда производительность первого рабочего равна $x + 1$ (он делает на одну деталь в час больше). Поскольку $t = \frac{A}{p}$, время работы первого рабочего равно $t_1 = \frac{110}{x+1}$, время работы второго равно $t_2 = \frac{110}{x}$.

	p	t	A
Первый рабочий	$x + 1$	$t_1 = \frac{110}{x+1}$	110
Второй рабочий	x	$t_2 = \frac{110}{x}$	110

Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее. Следовательно, t_1 на 1 меньше, чем t_2, то есть

$$t_1 = t_2 - 1;$$

$$\frac{110}{x+1} = \frac{110}{x} - 1.$$

Мы уже решали такие уравнения. Оно сводится к квадратному:

$$x^2 + x - 110 = 0.$$

Дискриминант равен 441. Корни уравнения: $x_1 = 10$, $x_2 = -11$.

Очевидно, производительность рабочего не может быть отрицательной — ведь он производит детали, а не уничтожает их. Значит, отрицательный корень уравнения не подходит по смыслу.

Ответ: 10.

2. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

В этой задаче (в отличие от предыдущей) ничего не сказано о том, какая это работа, чему равен ее объем. Значит, работу можем принять за единицу.

А что же обозначить за переменные?

Мы уже говорили, что за переменную удобно обозначить производительность. Пусть x — производительность первого рабочего. Производительность второго тоже нужна, и ее мы обозначим за y.

По условию, первый рабочий за два дня делает такую же часть работы, какую второй — за три дня. Значит, $2x = 3y$. Отсюда $y = \frac{2x}{3}$.

Трудясь вместе, эти двое сделали всю работу за 12 дней. При совместной работе производительности складываются, значит,

$$(x + y) \cdot 12 = 1;$$

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) \cdot 12 = 1;$$

$$\frac{5}{3}x \cdot 12 = 1;$$

$$20x = 1;$$

$$x = \frac{1}{20}.$$

Итак, первый рабочий за день выполняет $\frac{1}{20}$ всей работы. Значит, на всю работу ему понадобится 20 дней.

Ответ: 20.

Всевозможные задачи про две трубы, наполняющие какой-либо резервуар для воды, — это тоже задачи на работу. В них также фигурируют знакомые вам величины — производительность, время и работа.

3. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

Примем производительность первой трубы за x. Именно эту величину и требуется найти в задаче. Тогда производительность второй трубы равна $x + 1$, поскольку вторая пропускает на один литр в минуту больше, чем первая. Заполним таблицу.

	p	t	A
Первая труба	x	$t_1 = \frac{110}{x}$	110
Вторая труба	$x + 1$	$t_2 = \frac{99}{x+1}$	99

Первая труба заполняет резервуар на две минуты дольше, чем вторая. Значит, $t_1 - t_2 = 2$. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

и решим его.

Ответ: 10.

Покажу эффектный прием, помогающий быстро решить систему уравнений в задаче.

4. Андрей и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Андрей — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Мы уже решали задачи на работу и производительность. Правила те же. Отличие лишь в том, что здесь работают трое, и переменных будет тоже три. Пусть x — производительность Андрея, y — производительность Паши, а z — производительность Володи.

Забор, то есть величину работы, примем за 1 — ведь мы ничего не можем сказать о его размере.

	Производительность	**Работа**
Андрей	x	1
Паша	y	1
Володя	z	1
Вместе	$x+y+z$	1

Андрей и Паша покрасили забор за 9 часов. При совместной работе производительности складываются. Запишем уравнение:

$$(x+y)\cdot 9=1.$$

Аналогично

$$(y+z)\cdot 12=1;$$
$$(x+z)\cdot 18=1.$$

Тогда

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{9}; \\ y+z=\dfrac{1}{12}; \\ x+z=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Можно искать z, y и z по отдельности, но лучше просто сложить все три уравнения. Получим, что

$$2(x+y+z)=\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18};$$

$$(x+y+z)=\frac{1}{8}.$$

Значит, работая втроем, Андрей, Паша и Володя красят за час одну восьмую часть забора. Весь забор они покрасят за 8 часов.

Ответ: 8.

Что делать, если при чтении этой книги вам что-то непонятно?

1. Возможно, у вас есть пробелы в школьной математике 5–7 классов. На сайте http://ege-study.ru/ вы найдете видеокурсы для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по математике. Видеокурсы получили сотни отличных отзывов от выпускников и учителей.

2. Обратитесь к вашей школьной учительнице. Однако, если вы подойдете и скажете: «Я не понимаю математику!» — результата не будет. Такая фраза слишком абстрактна и не располагает к ответу. Как получить ответ? Здесь есть свои правила.

— Задавайте очень конкретные вопросы. Попросите объяснить, как приводить дроби к общему знаменателю, как раскрывать скобки или как решать именно это уравнение.

— Обращаясь к своей школьной учительнице, называйте ее по имени-отчеству: «Анна Георгиевна, расскажите, пожалуйста, как складывать дроби». Вот увидите — это подействует!

— Обращайтесь за помощью в подходящий момент, когда ваша учительница действительно может вам ответить. Если педагог занят, договоритесь об удобном времени консультации. Добивайтесь своего. Помните: у вас есть право на получение образования.

3. Напишите мне. Мой адрес в конце книги. Я отвечаю на все письма читателей.

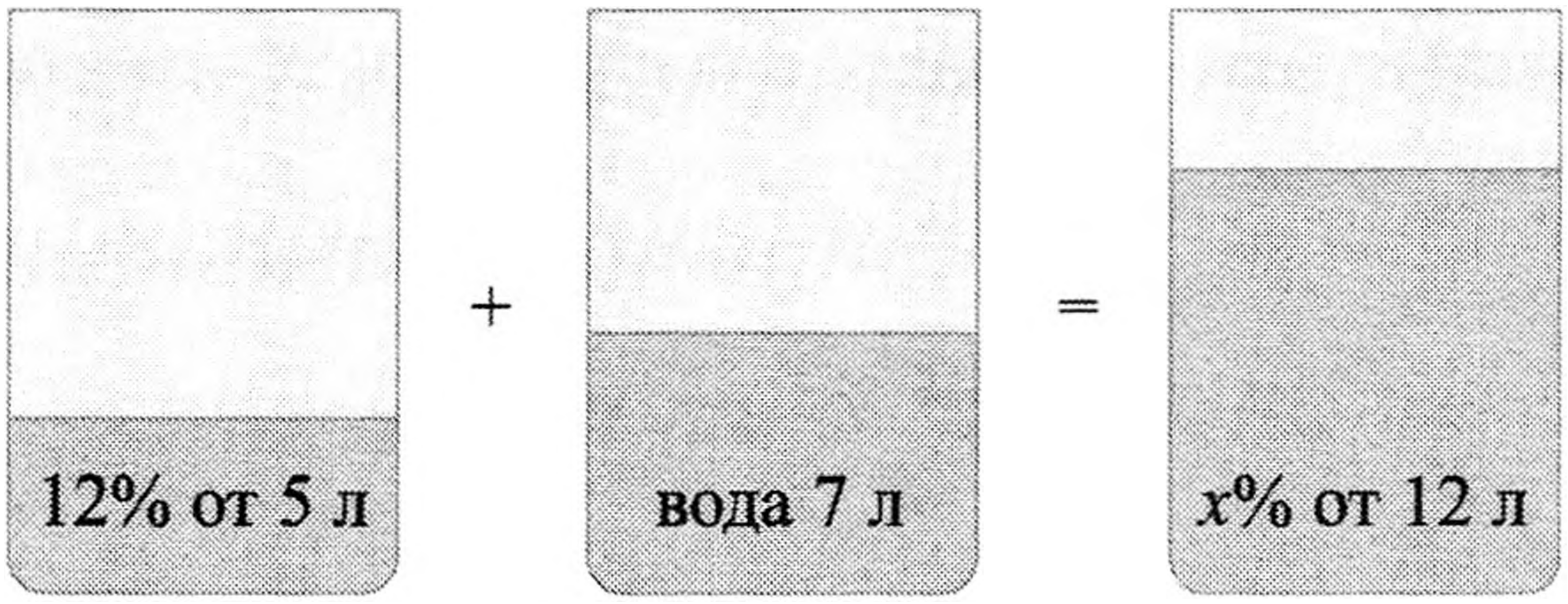
Задачи на сплавы, смеси и растворы

Следующий тип — задачи на растворы, смеси и сплавы. Они встречаются не только в математике, но и в химии. Я покажу самый простой способ их решения.

1. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

В решении подобных задач помогает картинка. Изобразим сосуд с раствором схематично — так, как будто вещество и вода в нем не перемешаны между собой, а разделены, как в коктейле. И подпишем, сколько литров содержат сосуды и сколько в них процентов вещества. Концентрацию[1] получившегося раствора обозначим x.

Первый сосуд содержал $0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ литра вещества. Во втором сосуде была только вода. Значит, в третьем сосуде столько же литров вещества, сколько и в первом:



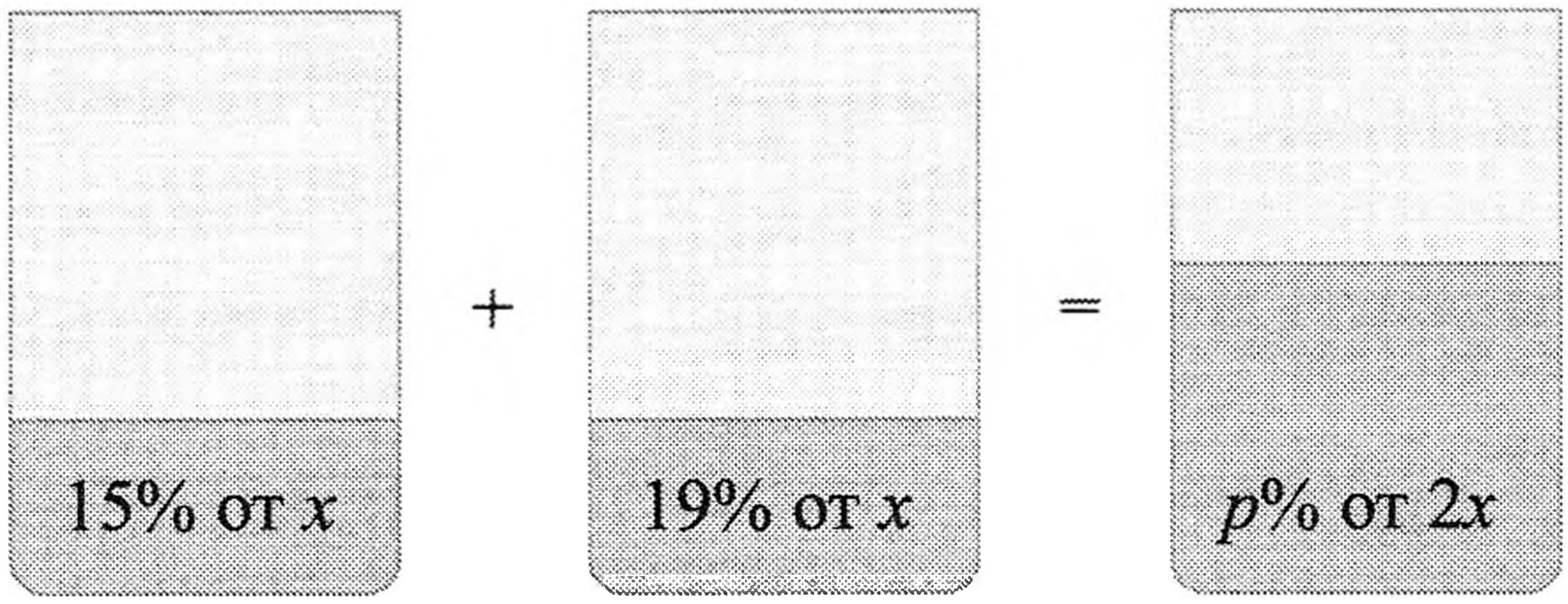
$$0{,}12 \cdot 5 = \frac{x}{100} \cdot 12;$$

$$x = 5.$$

[1] Напомним, что **концентрацией** называется отношение объема вещества к объему раствора. Или — отношение массы вещества к массе раствора.

2. Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Пусть масса первого раствора равна x. Масса второго — тоже x. В результате получили раствор массой $2x$. Рисуем картинку.



Масса вещества в первом растворе равна 15% от x, то есть $0{,}15x$. Масса вещества во втором растворе $0{,}19x$.

Получаем:

$$0{,}15x + 0{,}19x = 0{,}34x.$$

Масса вещества в третьем растворе составляет $p\%$ от $2x$, то есть равна $\frac{p}{100} \cdot 2x$.

Получим:

$$0{,}34x = \frac{p}{100} \cdot 2x.$$

Отсюда $p = 17$.

Ответ: 17.

3. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

Внимание! Если вам встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов — курага, из хлеба — сухари или из молока — творог, знайте, что на самом деле это задача на растворы.

Виноград тоже можно условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху можно понять, что это именно виноград, а не картошка.

Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме 5% воды и 95% «сухого вещества». Пусть из x кг винограда получилось 20 кг изюма. Тогда 10% от x = 95% от 20.

Составим уравнение:

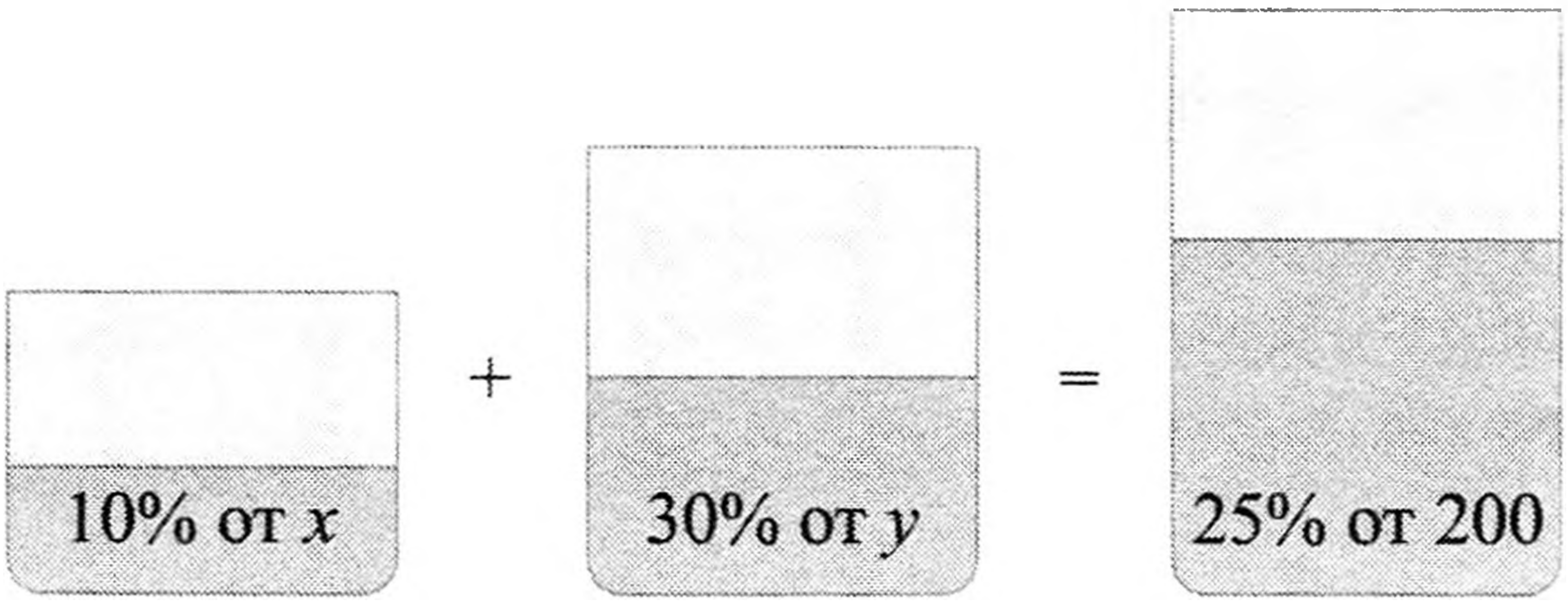
$$0{,}1x = 0{,}95 \cdot 20$$

и найдем x.

Ответ: 190.

4. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Пусть масса первого сплава равна x, а масса второго равна y. В результате получили сплав массой $x + y = 200$ кг.



Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200; \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}25 \cdot 200. \end{cases}$$

Первое уравнение — масса получившегося сплава, второе — масса никеля.

Нам нужно найти такие x и y, чтобы при подстановке в оба уравнения они давали верные равенства.

Как решить эту систему?

Прежде всего, упростим второе уравнение. Умножим обе его части на 10, чтобы коэффициенты стали целыми. Ведь с целыми коэффициентами проще работать, чем с дробными.

$$\begin{cases} x+y=200; \\ x+3y=500. \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения: $x = 200 - y$.

Во второе уравнение вместо x подставим выражение $200 - y$

$$200 - y + 3y = 500.$$

Получили уравнение с одной переменной. Решая его, получим, что $y = 150$.

Подставив в первое уравнение $y = 150$, получаем, что $x = 50$.

По условию, надо найти, на сколько килограмм масса второго сплава больше массы первого.

Ответ: 100.

5. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Пусть масса первого раствора x, масса второго равна y.

Масса получившегося раствора равна $x + y + 10$. Запишем два уравнения для количества кислоты.

$$\begin{cases} 0,3x+0,6y=0,36(x+y+10); \\ 0,3x+0,6y+0,5\cdot 10=0,41(x+y+10). \end{cases}$$

Решаем получившуюся систему. Сразу умножим обе части уравнений на 100, поскольку с целыми коэффициентами удобнее работать, чем с дробными.

Раскроем скобки

$$\begin{cases} 30x+60y=36x+36y+360; \\ 30x+60y+500=41x+41y+410. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y - x = 60; \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения: $x = 4y - 60$.

Подставим во второе уравнение вместо x выражение $4y - 60$. Получим уравнение с одной переменной:

$$11(4y - 60) - 19y = 90.$$

Решив его, найдем $y = 30$.

Подставим $y = 30$ в первое уравнение. Тогда $x = 60$.

Ответ: 60.

Задачи на движение по окружности. Задачи на нахождение средней скорости

В задачах на движение по окружности, которые встречаются на ЕГЭ и вступительных экзаменах по математике, тоже применяется формула $S = v \cdot t$. Правда, есть одна хитрость. О ней я расскажу по ходу дела.

> **1.** Из пункта *A* круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Во-первых, переведем минуты в часы, поскольку скорость надо найти в км/ч. Скорости участников обозначим за x и y. В первый раз мотоциклист обогнал велосипедиста через 10 минут, то есть через $\frac{1}{6}$ часа после старта. До этого момента велосипедист был в пути 40 минут, то есть $\frac{2}{3}$ часа.

Запишем эти данные в таблицу:

	v	t	S
Велосипедист	x	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}x$
Мотоциклист	y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}y$

Оба проехали одинаковые расстояния, то есть $\frac{1}{6}y = \frac{2}{3}x$.

Затем мотоциклист второй раз обогнал велосипедиста. Произошло это через 30 минут, то есть через полчаса после первого обгона.

Нарисуем вторую таблицу.

	v	t	S
Велосипедист	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x$
Мотоциклист	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}y$

А что можно сказать о расстояниях, которые они проехали? Мотоциклист обогнал велосипедиста. Значит, он проехал на один круг больше. Это и есть секрет данной задачи. Один круг — это длина трассы, она равна 30 км. Вот и второе уравнение:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30.$$

Решим получившуюся систему.

$$\begin{cases} \frac{1}{6}y = \frac{2}{3}x; \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x; \\ y - x = 60. \end{cases}$$

Получим, что $x = 20$, $y = 80$. В ответ запишем скорость мотоциклиста.

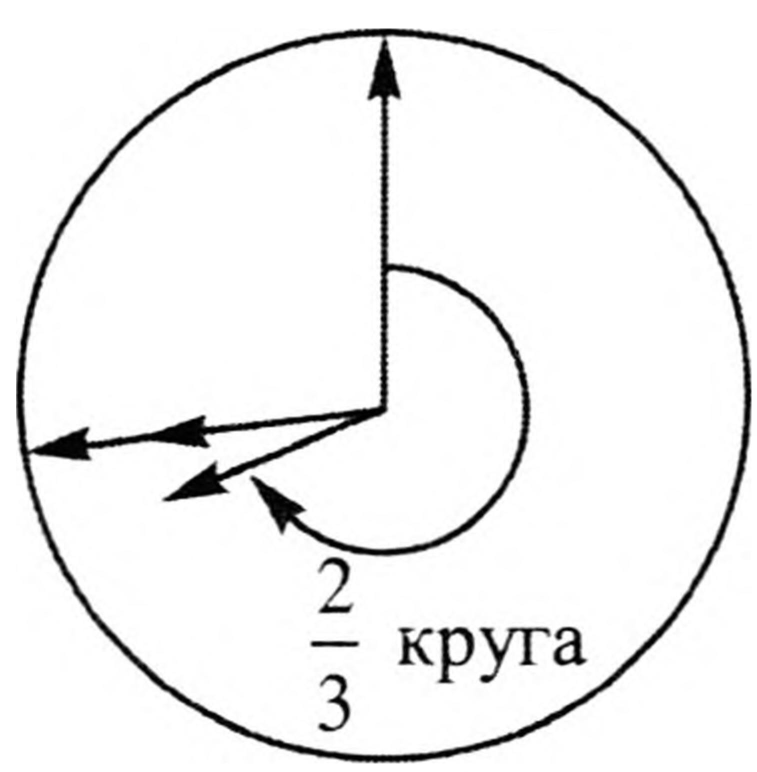
Ответ: 80.

2. Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Это, пожалуй, самая трудная из текстовых задач ЕГЭ. Конечно, есть легкий путь — берем часы, крутим стрелки и видим, что в четвертый раз стрелки поравняются через 4 часа, ровно в 12.00.

А если у вас часы электронные? Или данные подобраны так, что ответ не угадать?

За один час минутная стрелка проходит один круг, а часовая $\frac{1}{12}$ часть круга. Пусть их скорости равны 1 (круг в час) и $\frac{1}{12}$ (круга в час). Старт — в 8.00. Найдем время, за которое минутная стрелка в первый раз догонит часовую.



Минутная стрелка пройдет на $\frac{2}{3}$ круга больше, поэтому уравнение будет таким:

$$1 \cdot t - \frac{1}{12}t = \frac{2}{3}.$$

Решив его, получим, что $t = \frac{8}{11}$ часа.

Итак, в первый раз стрелки поравняются через $\frac{8}{11}$ часа.

Пусть во второй раз они поравняются через время z. Минутная стрелка пройдет расстояние $1 \cdot z$, а часовая — $\frac{1}{12}z$, причем минутная стрелка пройдет на один круг больше.

Запишем уравнение:

$$1 \cdot z - \frac{1}{12} z = 1.$$

Решив его, получим, что $z = \frac{12}{11}$ часа. Итак, через $\frac{12}{11}$ часа стрелки поравняются во второй раз, еще через $\frac{12}{11}$ часа — в третий, и еще через $\frac{12}{11}$ часа — в четвертый.

Старт был в 8.00. Найдем, через какое время стрелки поравняются в четвертый раз: $\frac{8}{11} + 3 \cdot \frac{12}{11} = \frac{44}{11} = 4$. Стрелки поравняются через 4 часа, то есть 240 минут.

Ответ полностью согласуется с «экспериментальным» решением!

На экзамене по математике вам может встретиться задача о нахождении средней скорости.

Запомним, что средняя скорость **не равна** среднему арифметическому скоростей. Она находится по специальной формуле:

$$\boldsymbol{V\ \text{средняя} = \frac{S\ \text{общее}}{t\ \text{общее}}}.$$

Если участков пути было два, то

$$V\ \text{средняя} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}.$$

3. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Мы не знаем, каким было расстояние, которое преодолел путешественник. Знаем только, что оно было одинаковым в обе стороны, туда и обратно.

Для простоты примем это расстояние за 1 (одно море). Тогда время, которое путешественник плыл на яхте, равно $\frac{1}{20}$, а время, затраченное на полет, равно $\frac{1}{480}$. Общее время равно $\frac{1}{20}+\frac{1}{480}=\frac{25}{480}=\frac{5}{96}$.

Средняя скорость равна $2:\ \frac{5}{96}=38{,}4$ км/ч.

Ответ: 38,4.

Приемы быстрого счета и принцип KISS

Вы знаете, что правила проведения ЕГЭ не разрешают пользоваться калькулятором на экзамене по математике. На самом деле калькулятор там и не нужен. Все задачи решаются без него. Главное — внимание, аккуратность и некоторые секретные приемы.

1. Начнем с главного правила.

Если какое-то вычисление можно упростить — упростите его.

Например, такое уравнение с «дьявольскими» коэффициентами:

$$666x^2+999x-666=0.$$

Семьдесят процентов выпускников решают его «в лоб». Считают дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$, после чего говорят, что корень невозможно извлечь без калькулятора.

Но ведь можно разделить левую и правую части уравнения на 333. Получится

$$2x^2+3x-2=0.$$

Какой способ проще?

2. Скорее всего, вы не любите умножение в столбик. Да, никому не нравилось в четвертом классе решать скучные «примеры». Однако перемножить числа во многих случаях можно и без столбика, в строчку. Это намного быстрее.

$$385\cdot7=300\cdot7+80\cdot7+5\cdot7=$$
$$=2100+560+35=2660+35=2695.$$

$$18 \cdot 17 = 18 \cdot 10 + 18 \cdot 7 =$$
$$=180 + 10 \cdot 7 + 8 \cdot 7 = 180 + 70 + 56 = 250 + 56 = 306.$$

Обратите внимание, что мы начинаем не с меньших разрядов, а с бо́льших. Это удобно.

3. Теперь — деление. Нелегко в столбик разделить 9450 на 2100. Но вспомним, что знак деления «:» и дробная черта — одно и то же. Запишем 9450 : 2100 в виде дроби и сократим эту дробь:

$$\frac{9450}{2100} = \frac{945}{210} = \frac{315}{70} = \frac{63}{14} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Другой пример.

$$364:1040 = \frac{364}{1040} = \frac{182}{520} = \frac{91}{260} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

4. Как быстро и без всяких столбиков возвести в квадрат двузначное число? Применяем одну из формул сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$$
$$39^2 = (30 + 9)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 9 + 9^2 = 900 + 540 + 81 = 1521.$$
$$44^2 = (40 + 4)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 4 + 4^2 = 1600 + 320 + 16 = 1936.$$

Иногда удобно использовать и другую формулу:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$78^2 = (80 - 2)^2 = 6400^2 - 320 + 4 = 6084.$$
$$89^2 = (90 - 1)^2 = 8100 - 180 + 1 = 7921.$$

5. Числа, оканчивающиеся на 5, в квадрат возводятся моментально.

Допустим, надо найти квадрат числа $A5$ (A — не обязательно цифра, любое натуральное число). Умножаем A на $A + 1$ и к результату приписываем 25. Все!

Например: $45^2 = 2025$, то есть $4 \cdot 5 = 20$ и приписали 25.

$65^2 = 4225$, то есть $6 \cdot 7 = 42$ и приписали 25.

$125^2 = 15625$, то есть $12 \cdot 13 = 156$ и приписали 25.

Этот способ полезен не только для возведения в квадрат, но и для извлечения квадратного корня из чисел, оканчивающихся на 25.

6. А как вообще извлечь квадратный корень без калькулятора? Покажем два способа.

Первый способ — разложение подкоренного выражения на множители.

Например, найдем $\sqrt{6561}$.

Число 6561 делится на 3 (так как сумма его цифр делится на 3). Разложим 6561 на множители:

$$6561 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 81 = 81 \cdot 81.$$

$$\sqrt{6561} = 81.$$

Найдем $\sqrt{2916}$. Это число делится на 2. На 3 оно тоже делится. Раскладываем 2916 на множители.

$$\sqrt{2916} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 27} = 2 \cdot 27 = 54.$$

Еще пример.

$$\sqrt{4356} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11} = 66.$$

Есть и второй способ. Он удобен, если число, из которого надо извлечь корень, никак не получается разложить на множители.

Например, надо найти $\sqrt{5041}$. Число под корнем — нечетное, оно не делится на 3, не делится на 5, не делится на 7... Можно и дальше искать, на что же оно все-таки делится, а можно поступить проще — найти этот корень подбором.

Очевидно, что в квадрат возводили двузначное число, которое находится между числами 70 и 80, поскольку $70^2 = 4900$, $80^2 = 6400$, а число 5041 находится между ними. Первую цифру в ответе мы уже знаем, это 7.

Последняя цифра в числе 5041 равна 1. Поскольку $1^2 = 1$, $9^2 = 81$, последняя цифра в ответе — либо 1, либо 9. Проверим:

$71^2 = (70 + 1)^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$. Получилось!

Найдем $\sqrt{2809}$.

$50^2 = 2500$, $60^2 = 3600$. Значит, первая цифра в ответе — это 5.

В числе 2809 последняя цифра — девятка. $3^2 = 9$, $7^2 = 49$. Значит, последняя цифра в ответе — либо 3, либо 7.

Проверим:

$53^2 = (50 + 3)^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$.

Если число, из которого надо извлечь квадратный корень, заканчивается на 2, 3, 7 или 8 — значит, квадратный корень из него будет числом иррациональным. Потому что ни один квадрат целого числа не заканчивается на 2, 3, 7 или 8.

Помните, что в задачах части 1 на ЕГЭ ответ должен быть записан в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Это значит, что ответ — рациональное число[1].

7. Квадратные уравнения часто встречаются нам в задачах ЕГЭ. В них нужно считать дискриминант, а затем извлекать из него корень. И совсем не обязательно искать корни из пятизначных чисел. Во многих случаях дискриминант удается разложить на множители.

Например, в уравнении

$$2x^2+90x-8100=0;$$

$$D=8100+8\cdot 8100=8100(1+8)=8100\cdot 9;$$

$$\sqrt{D}=90\cdot 3=270.$$

8. Иногда дискриминант удается посчитать по известной формуле сокращенного умножения: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Вот такое уравнение вполне может получиться при решении текстовой задачи:

$$9x^2-37x+4=0;$$

$$D=b^2-4ac=37^2-4\cdot 9\cdot 4=(37-12)(37+12)=25\cdot 49;$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{25\cdot 49}=5\cdot 7=35.$$

9. Еще одна ситуация, в которой выражение под корнем можно разложить на множители, взята из задачи по геометрии.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 39, один из катетов равен 36. Найти второй катет.

По теореме Пифагора, он равен $\sqrt{39^2-36^2}$. Можно долго считать в столбик, но проще применить формулу сокращенного умножения.

$$39^2-36^2=(39-36)(39+36)=3\cdot 75=3\cdot 3\cdot 25;$$

$$\sqrt{3\cdot 3\cdot 25}=3\cdot 5=15.$$

Главная мысль — ваши вычисления должны быть максимально простыми. Есть известный принцип, применяемый в программировании и дизайне. По-английски он звучит так: «*Keep it simple, stupid!*»[2] — и легко запоминается как KISS.

---

[1] Позже мы расскажем о том, что такое натуральные, целые, рациональные, действительные числа.

[2] «Не усложняй, чудило!»

Теория вероятностей на ЕГЭ по математике

Случайным называется событие, которое нельзя точно предсказать заранее. Оно может либо произойти, либо нет.

Вы выиграли в лотерею — случайное событие. Пригласили друзей отпраздновать выигрыш, а они по дороге к вам застряли в лифте — тоже случайное событие. Правда, мастер оказался поблизости и освободил всю компанию через десять минут — и это тоже можно считать счастливой случайностью...

Наша жизнь полна случайных событий. О каждом из них можно сказать, что оно произойдет с некоторой **вероятностью**. Скорее всего, вы интуитивно знакомы с этим понятием. Теперь мы дадим математическое определение вероятности.

Начнем с простых примеров. Вы бросаете монетку. Орел или решка?

Действие, которое может привести к одному из нескольких результатов, в теории вероятностей называют **испытанием**.

Орел и решка — два возможных **исхода** испытания.

Орел выпадет в одном случае из двух возможных. Говорят, что **вероятность** того, что монетка упадет орлом, равна $\frac{1}{2}$.

Бросим игральную кость. У кубика шесть граней, поэтому возможных исходов тоже шесть. Например, вы загадали, что выпадет три очка. Это один исход из шести возможных. В теории вероятностей он будет называться **благоприятным исходом**.

Вероятность выпадения тройки равна $\frac{1}{6}$ (один благоприятный исход из шести возможных).

Вероятность четверки — тоже $\frac{1}{6}$.

А вот вероятность появления семерки равна нулю. Ведь грани с семью точками на кубике нет.

Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

Очевидно, что вероятность не может быть больше единицы.

Вот другой пример. В пакете 25 яблок (и ничего больше). Из них 8 — красные, остальные — зеленые. Ни формой, ни размером яблоки не отличаются. Вы запускаете в пакет руку и наугад вынимаете яблоко. Вероятность вытащить красное яблоко равна $\frac{8}{25}$, а зеленое — $\frac{17}{25}$.

Вероятность достать красное или зеленое яблоко равна $\frac{8}{25}+\frac{17}{25}=1$.

Вероятность вытащить из этого пакета банан равна нулю.

Разберем простые задачи по теории вероятностей из сборников для подготовки к ЕГЭ.

1. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достается один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Очевидно, вероятность вытащить билет без грибов равна $\frac{23}{25}$, то есть 0,92.

2. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Роман Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Роман Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Всего в чемпионате участвуют 26 бадминтонистов, один из которых — сам Роман. Значит, у него 25 возможных партнеров, с которыми он может сыграть в первом туре. И 9 из этих партнеров — из России. Находим вероятность, о которой говорится в условии, поделив число благоприятных исходов (партнеров из России) на общее число исходов.

Получим: $\frac{9}{25}=0,36$.

Ответ: 0,36.

Если вы получили $\dfrac{10}{26}$ — значит, у вас Роман Орлов играет в бадминтон сам с собой.

3. Ученика попросили назвать натуральное число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число, кратное пяти?

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 8, 9, **10**, 11... **100**

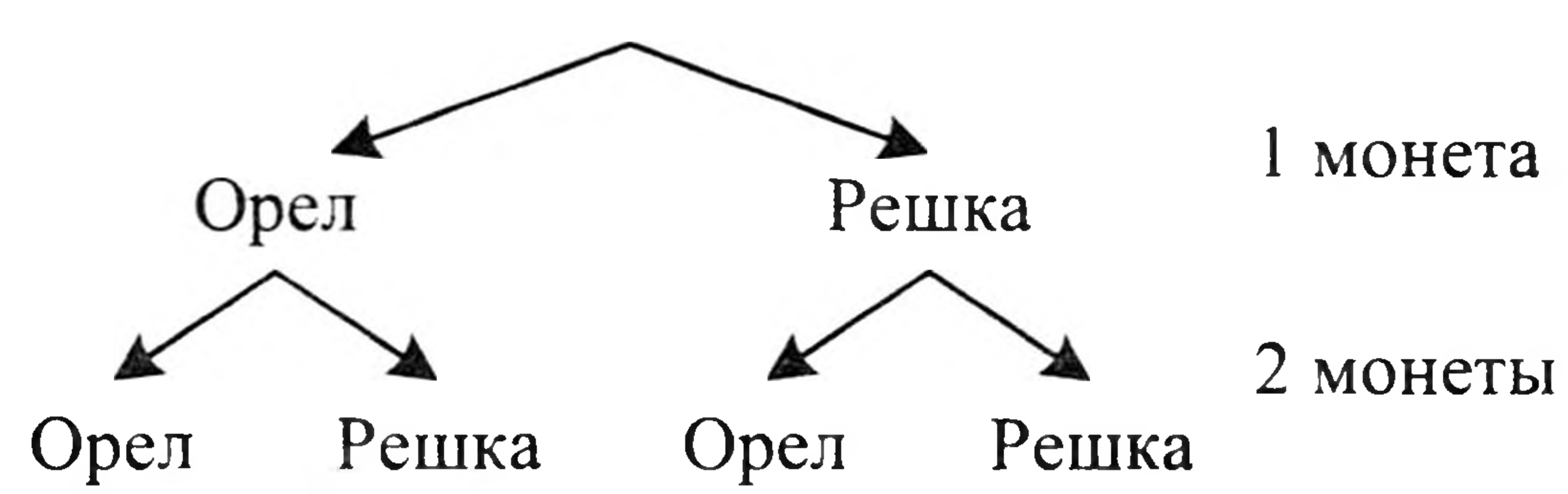
Каждое пятое число из данного множества делится на 5. Значит, вероятность равна $\dfrac{1}{5}$.

4. Монета брошена три раза. Какова вероятность двух «орлов» и одной «решки»?

Заметим, что задачу можно сформулировать по-другому: бросили три монеты одновременно. На решение это не повлияет.

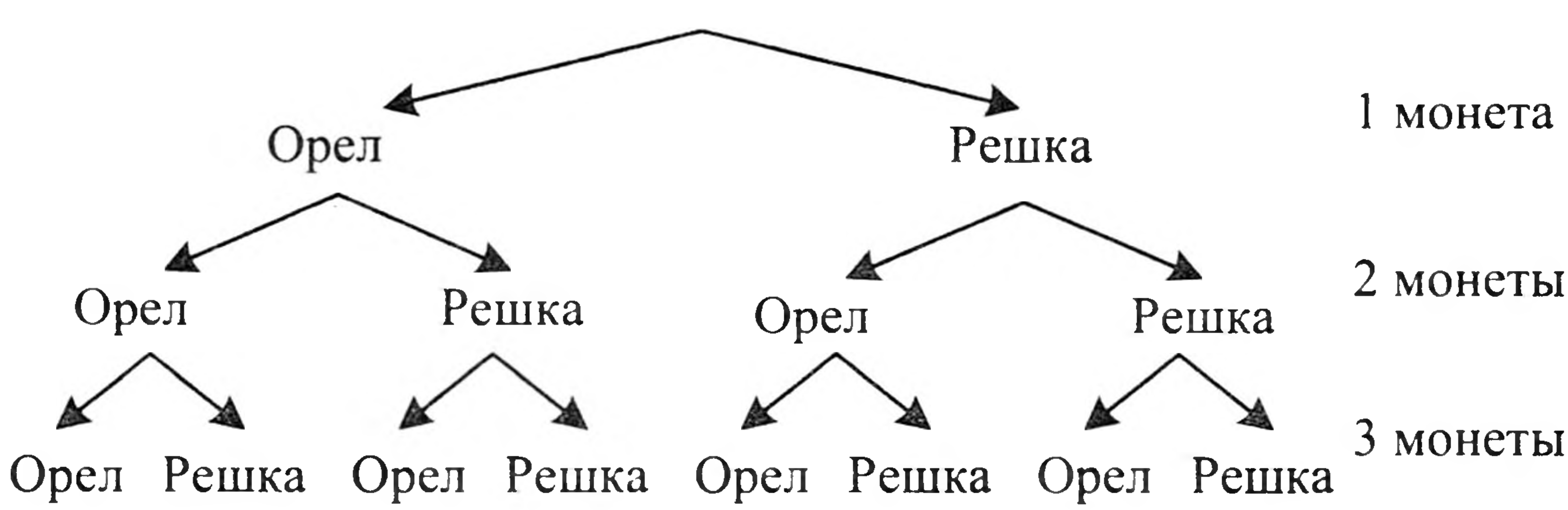
Как вы думаете, сколько здесь возможных исходов?

Бросаем монету. У этого действия два возможных исхода: орел и решка. Две монеты — уже четыре исхода.



Три монеты? Правильно, 8 исходов, так как $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Вот они:



Два орла и одна решка выпадают в трех случаях из восьми.

Ответ: $\frac{3}{8}$.

5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Бросаем первую кость — шесть исходов. И для каждого из них возможны еще шесть — когда мы бросаем вторую кость. Получаем, что у данного действия — бросания двух игральных костей — всего 36 возможных исходов, так как $6^2 = 36$.

А теперь — благоприятные исходы:

2	6
3	5
4	4
5	3
6	2

Вероятность выпадения восьми очков равна $\frac{5}{36} \approx 0{,}14$.

Ответ: 0,14.

6. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что он попадет в цель четыре выстрела подряд.

Если вероятность попадания равна 0,9 — следовательно, вероятность промаха 0,1. Рассуждаем так же, как и в предыдущей задаче. Вероятность двух попаданий подряд равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$. А вероятность четырех попаданий подряд равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}6561$.

События *A* и *B* называют *независимыми*, если вероятность появления события *A* не меняет вероятности появления события *B*. В нашей задаче так и есть: результат каждого выстрела не зависит от предыдущих.

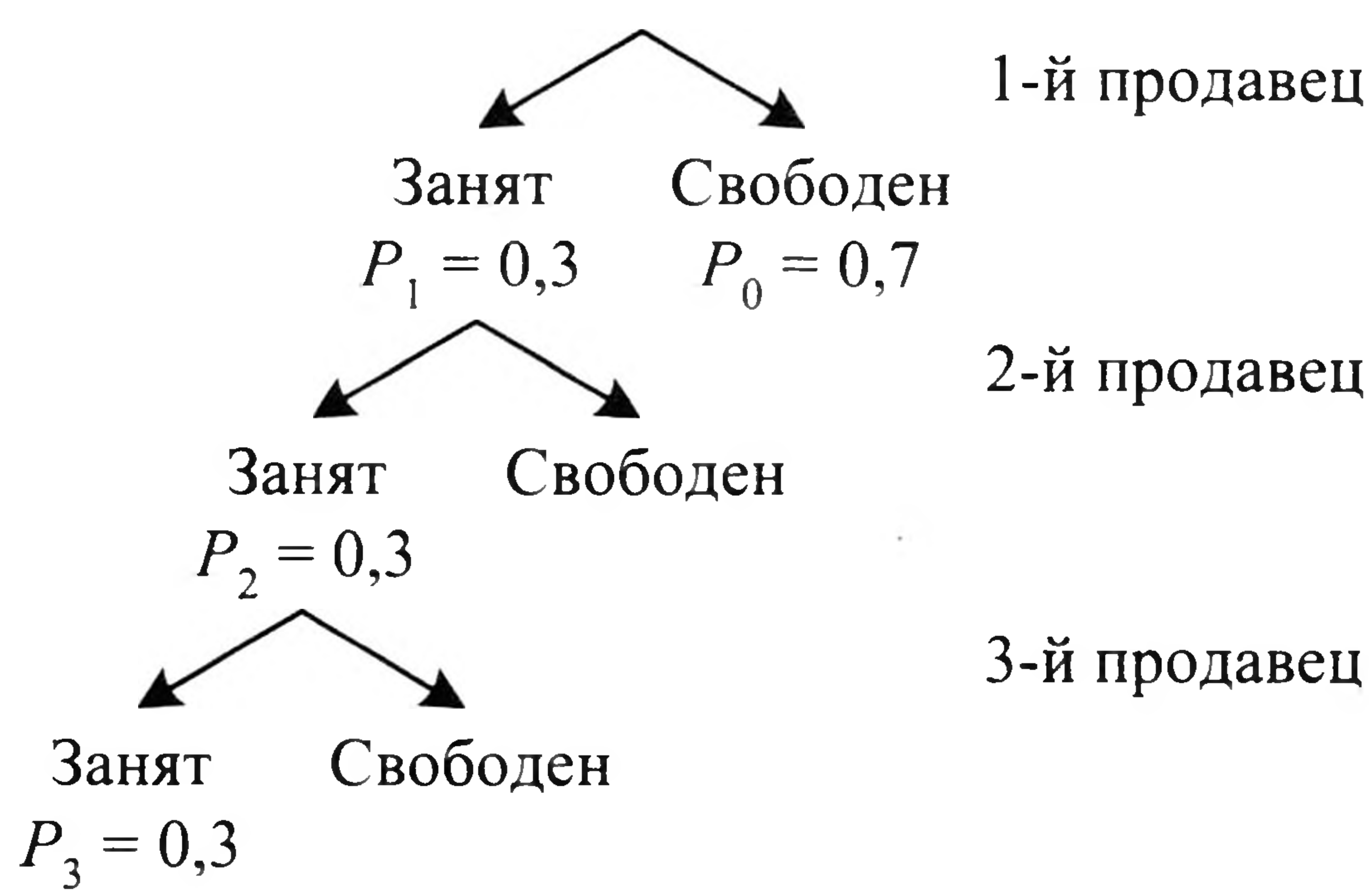
Для нескольких независимых событий вероятность того, что все они произойдут, равна произведению вероятностей.

Значит, вероятность четырех попаданий подряд равна $0{,}9^4 = 0{,}6561$.

А если изменить условие? Что, если надо найти вероятность трех попаданий и одного промаха? Вероятность промаха равна 0,1. Значит, вероятность трех попаданий и одного промаха $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729$.

7. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Рисуем «дерево» возможных исходов.



Итак, вы зашли в магазин и идете к первому продавцу. С вероятностью $P_1 = 0{,}3$ продавец занят. Значит, с вероятностью 0,7 продавец свободен.

Увидев, что первый занят, вы идете ко второму продавцу. Пусть он тоже занят с вероятностью $P_2 = 0{,}3$. Что делать, вы идете к третьему продавцу. Вероятность P_3 того, что он занят, также равна 0,3.

По условию, клиенты заходят в магазин независимо друг от друга. Значит, события «первый продавец занят», «второй продавец занят» и «третий занят» — независимые события, и вероятность одновременного наступления трех этих событий равна произведению их вероятностей.

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027.$$

Ответ: 0,027.

В следующей задаче применяется понятие суммы вероятностей несовместных событий.

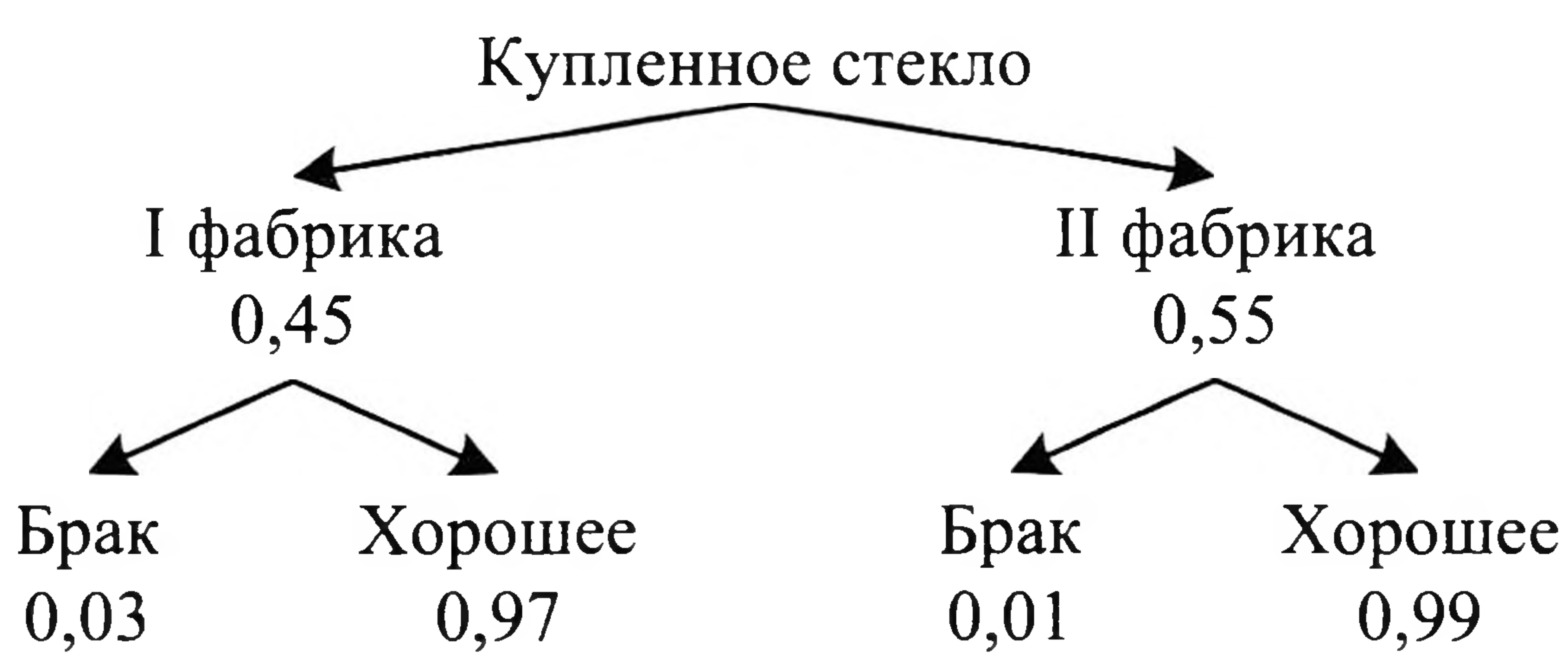
События, взаимоисключающие друг друга в рамках данной задачи, называются *несовместными*. Появление одного из несовместных событий исключает появление других.

Сумма двух событий — термин, означающий, что произошло или первое событие, или второе, или оба сразу.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

8. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Нарисуем все возможные исходы.



Человек пришел в магазин, купил стекло для автомобильной фары, и оно оказалось бракованным. Как это получилось?

Стекло было сделано либо на первой фабрике, либо на второй. Эти события несовместны.

Вероятность того, что стекло с первой фабрики, равна 0,45 — то есть 45%. Вероятность того, что стекло со второй фабрики, равна 0,55 — то есть 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а остальные хорошие. Значит, с вероятностью 0,03 стекло, произведенное на первой фабрике, бракованное, а с вероятностью 0,97 — хорошее. Вторая фабрика выпускает 1% бракованных стекол. Значит, с вероятностью 0,01 сделанное на ней стекло бракованное, а с вероятностью 0,99 — стекло хорошее.

Покупатель купил бракованное стекло. Оно могло быть сделано на первой фабрике и оказалось бракованным. Это означает одновременное наступление, или произведение, двух случайных событий — «стекло сделано на первой фабрике» и «стекло бракованное». Вероятность произведения этих двух событий равна $0{,}45 \cdot 0{,}03$.

Или стекло могло быть со второй фабрики и также бракованное. Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0{,}55 \cdot 0{,}01$. События «стекло с первой фабрики» и «стекло со второй фабрики» несовместны — они не могут случиться одновременно. Тогда вероятность купить бракованное стекло равна:

$$0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}019.$$

Ответ: 0,019.

9. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что он верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что учащийся верно решит ровно 11 задач.

Посмотрим возможные исходы этой ситуации.

Пусть n — число правильно решенных задач.

Пусть вероятность того, что $n > 10$, равна $P = 0{,}74$.

При этом возможны два случая: число решенных задач равно 11 ($n = 11$) с вероятностью $P_1 = x$ или число решенных задач больше 11 ($n > 11$) с вероятностью $P_2 = 0{,}67$. Эти два события — «число решенных задач равно 11» и «число решенных задач больше 11» — несовместны. Одно из них исключает другое. Поэтому вероятность суммы этих событий как раз и равна вероятности того, что правильно решено больше 10 задач.

$$0{,}74 = 0{,}67 + x;$$
$$x = 0{,}07.$$

Ответ: 0,07.

10. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Пусть n — число пассажиров в автобусе. По условию, нам интересны случаи, когда число пассажиров n меньше 20. Причем $n < 20$ с вероятностью $P = 0,94$.

Возможны случаи: число пассажиров от 15 до 19 ($15 \leq n \leq 19$) с вероятностью $P_1 = x$ или число пассажиров меньше 15 ($n < 15$) с вероятностью $P_2 = 0,56$. Эти два события несовместны, значит, их вероятности будут складываться. Вероятность суммы этих событий как раз и равна вероятности того, что $n < 20$.

$$P = P_1 + P_2;$$
$$0,94 = 0,56 + x;$$
$$x = 0,38.$$

Ответ: 0,38.

11. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

В этой задаче я покажу интересный прием. Итак, нам надо найти вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Изобразим все возможные исходы. Плюсом обозначим исправность автомата, а минусом — неисправность.

I автомат	II автомат
+	–
–	+
+	+
–	–

Нам подходят три ситуации:

— Когда первый автомат исправен, а второй нет.

— Второй исправен, а первый нет:

— Когда исправны оба.

И не подходит только четвертая ситуация — когда оба автомата неисправны.

Поэтому мы можем из единицы вычесть вероятность этого последнего случая, потому что все остальные три случая нам подходят. То есть из единицы вычитаем вероятность того, что оба автомата неисправны.

Вероятность того, что оба автомата неисправны:

$$P_1 = 0,05 \cdot 0,05 = 0,0025.$$

Теперь из единицы мы вычитаем это число и получаем ответ:

$$P = 1 - 0,0025 = 0,9975.$$

Ответ: 0,9975.

12. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Нарисуем все возможные исходы этой ситуации. Плюсом обозначим, что лампа работает. Минус — лампа перегорела.

I лампа	II лампа
+	+
+	–
–	+
–	–

По условию, в течение года хотя бы одна лампа осталась светить. Значит, подходят случаи, когда светит первая лампа, или вторая, или обе сразу, и не подходит случай, когда обе лампы перегорели. Поэтому из единицы мы вычтем вероятность того, что перегорели обе лампы.

События «перегорела первая лампа» и «перегорела вторая лампа» независимы. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$0,3 \cdot 0,3 = 0,09.$$

Вероятность того, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное событию «обе лампы перегорели». Чтобы найти его вероятность, из единицы вычтем вероятность того, что обе лампы перегорели:

$$1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

Ответ: 0,91.

Следующая задача только на первый взгляд похожа на две предыдущие. На самом деле — принципиально отличается от них.

13. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Так же, как и в предыдущих задачах, нарисуем схему. Вероятность того, что кофе в автомате остался к концу дня — плюс, кофе в автомате закончился — минус.

Вероятность того, что кофе закончился, равна 0,3 и для одного, и для другого автомата.

	+	–
I автомат	0,7	0,3
II автомат	0,7	0,3

Но что мы видим? Вероятность того, что кофе закончился в обоих автоматах, равна не 0,09, как мы могли бы предположить, а 0,12 — по условию задачи.

В чем же дело? Во всех предыдущих задачах вероятность наступления и одного, и другого события одновременно была равна произведению вероятностей. А здесь не так! Почему?

Дело в том, что в предыдущих задачах мы говорили о независимых событиях. Вспомним задачу с лампочками. Перегорела одна лампочка, а вторая осталась светить независимо от первой.

Или вот задача с платежными автоматами. Два автомата стоят в торговом центре, люди подходят к ним, опускают деньги, автомат выдает им чеки. И даже если один из автоматов сломался, второй продолжает работать независимо от него.

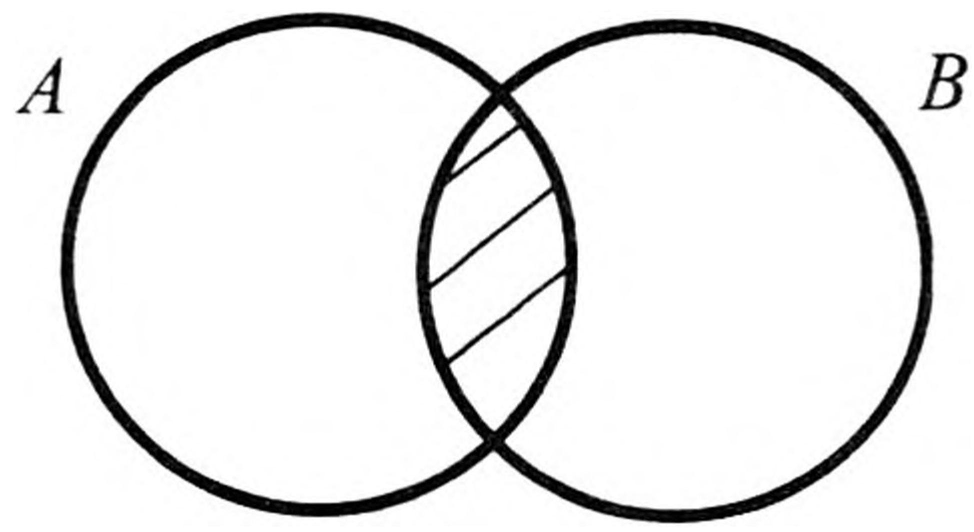
Посмотрим, какая ситуация здесь.

Если кофе закончился в одном автомате, значит, все, кто хотят кофе, пойдут ко второму, и в нем кофе выпьют уже быстрее. Получается, что события «кофе закончился в первом автомате» и «кофе закончился во втором» являются ***зависимыми***, и вероятность произведения этих событий считается уже по-другому.

Как эту сложность обойти?

Давайте найдем вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном из автоматов. Он может закончиться в первом, во втором или в обоих сразу, и тогда, чтобы найти вероятность того, что кофе останется в обоих, мы из единицы вычтем вероятность того, что кофе закончился хотя бы в одном из автоматов.

Нарисуем диаграмму. Событие A — кофе закончился в первом автомате, событие B — кофе закончился во втором автомате. Кофе закончился в обоих автоматах — это пересечение двух множеств.



Мы не даем здесь строгого математического объяснения. На интуитивном уровне можно говорить об объединении множеств $A \cup B$, то есть о тех элементах, которые входят или в первое множество, или во второе множество, или в то и другое сразу.

Вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате, равна сумме вероятностей того, что кофе закончится в первом автомате, плюс вероятность того, что кофе закончился во втором, минус вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах сразу. Ведь область пересечения множеств A и B посчитана дважды.

Так же мы считали бы площадь фигуры на данном рисунке. Мы бы сложили площадь первого круга и площадь второго, а затем вычли площадь их пересечения, поскольку она посчитана дважды.

Итак, вероятность суммы событий в общем случае считается по формуле:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ранее мы пользовались такой формулой для несовместных событий — таких, которые не могут наступить одновременно. Вероятность их пересечения равна нулю.

Вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате

$$P_1 = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48.$$

Тогда вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах

$$P_2 = 1 - 0,48 = 0,52.$$

Ответ: 0,52.

Обратите внимание на символы, которыми мы пользуемся.

Значком $\cup$ обозначается ***сумма*** событий (или одно, или другое, или оба сразу). Аналогом в алгебре является знак совокупности: [.

Знаком $\cap$ обозначается ***произведение*** событий (и одно, и другое сразу). Аналогом в алгебре является знак системы: {.

Запомним:

$\cup$ объединение множеств, логическая ***сумма***, **ИЛИ**, совокупность условий, [,

$\cap$ пересечение множеств, ***произведение*** событий, **И**, система условий, {.

Вы уже встречались с такими логическими символами — когда записывали «пересечение множеств» или «объединение интервалов».

14. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что абитуриент сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Разберемся, о чем идет речь в этой задаче. Абитуриент поступает или на специальность «Лингвистика», или на специальность «Коммерция», или на обе сразу. Здесь не говорится о том, что он будет учиться на двух специальностях сразу, а лишь о том, что он наберет необходимые проходные баллы на обе специальности, сдав все четыре предмета и получив возможность выбирать, куда пойти учиться.

Экзамены по математике и русскому он сдает на обе специальности сразу, поэтому вероятность сдать хорошо оба предмета равна $0{,}6 \cdot 0{,}8$. Теперь абитуриенту надо хорошо сдать что-либо из обществознания и иностранного языка, или то и другое сразу. Нарисуем таблицу вероятностей для обществознания и иностранного языка.

	Сдал	Не сдал
Обществознание	0,5	0,5
Иностранный	0,7	0,3

Нам подходят три исхода: сдал только обществознание, сдал только иностранный язык или сдал оба предмета сразу. Так же, как в задаче с лампочками, мы можем из единицы вычесть ненужный нам случай — когда абитуриент завалил и иностранный, и обществознание.

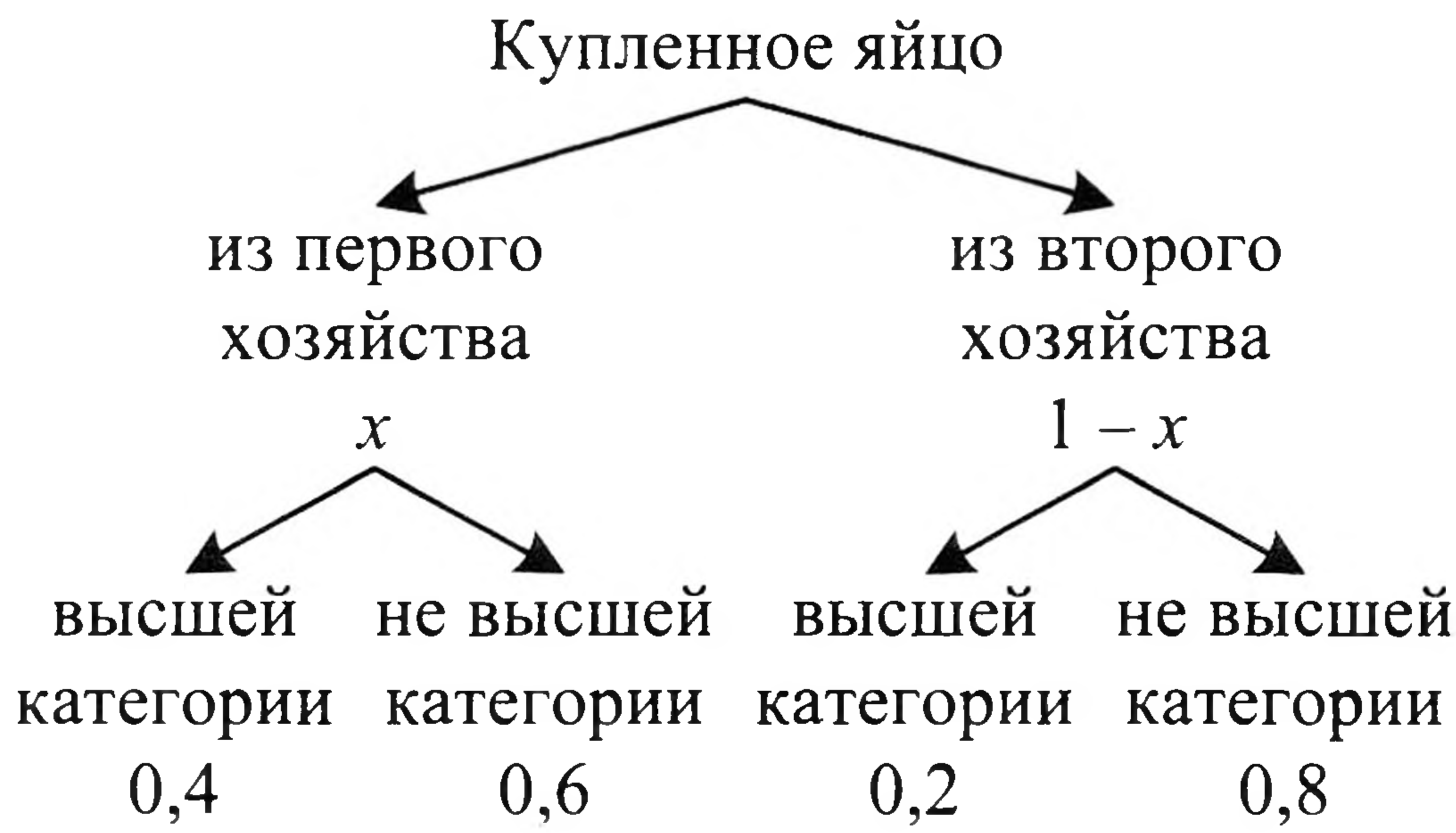
И тогда вероятность поступить хотя бы на одну специальность:

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 0{,}3) = 0{,}408.$$

Ответ: 0,408.

15. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Как обычно, нарисуем все возможные исходы ситуации. Покупатель пришел в магазин, который принадлежит агрофирме, и купил яйцо. Надо найти вероятность того, что это яйцо из первого хозяйства.



Яйца могут быть только или из первого домашнего хозяйства, или из второго, причем эти два события несовместны. Других яиц в этот магазин не поступает.

Пусть вероятность того, что купленное яйцо из первого хозяйства, равна x. Тогда вероятность того, что это яйцо из второго хозяйства (противоположного события), равна $1-x$.

Яйца могут быть высшей категории и не высшей.

В первом хозяйстве 40% яиц имеют высшую категорию, а 60% — не высшую. Это значит, что случайно выбранное яйцо из первого хозяйства с вероятностью 40% будет высшей категории.

Во втором хозяйстве 20% яиц высшей категории, а 80% — не высшей.

Пусть случайно выбранное в магазине яйцо — из первого хозяйства и высшей категории. Вероятность этого события равна произведению вероятностей: $0{,}4x$.

Вероятность того, что яйцо из второго хозяйства и высшей категории, равна $0{,}2(1-x)$.

Если мы сложим эти две вероятности, мы получим вероятность того, что яйцо имеет высшую категорию. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, значит, эта вероятность равна 0,35.

Мы получили уравнение:

$$0{,}4x+0{,}2(1-x)=0{,}35.$$

На что похожа такая задача? Вспомним задачи на растворы, сплавы и смеси, где фигурировало процентное содержание.

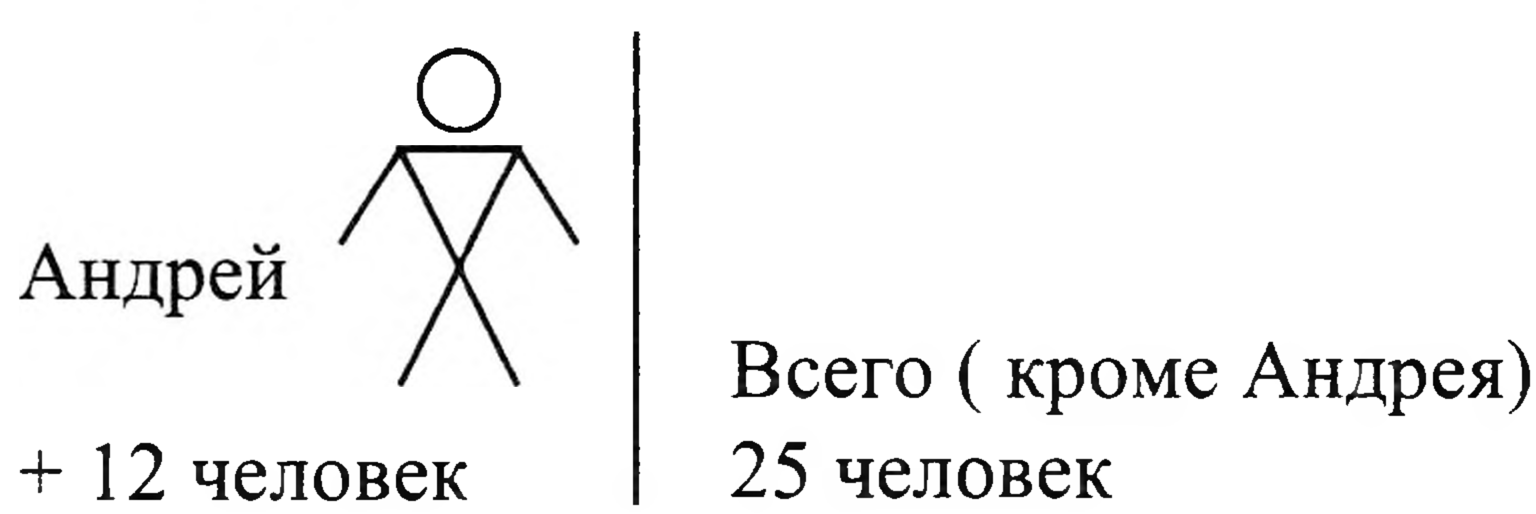
Решаем это уравнение и находим, что $x = 0{,}75$ — вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, оказалось из первого хозяйства.

Вот задача, которую можно решать с помощью формул комбинаторики. А можно решить легко и без всяких формул.

16. В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

На что похожа эта задача? Вспомните задачу 2 из этой главы — про бадминтониста Романа Орлова. Будем рассуждать аналогично.

Нарисуем Андрея. Пусть он первым занял место в группе. И, кроме него, осталось еще 25 человек, среди которых его брат Сергей. Сколько у Сергея шансов оказаться в той же группе, что и Андрей? В группе должно быть 13 человек, то есть Андрей и еще 12. Значит, вероятность того, что Сергей окажется в той же группе, что и Андрей, равна $\frac{12}{25}$, то есть 0,48.



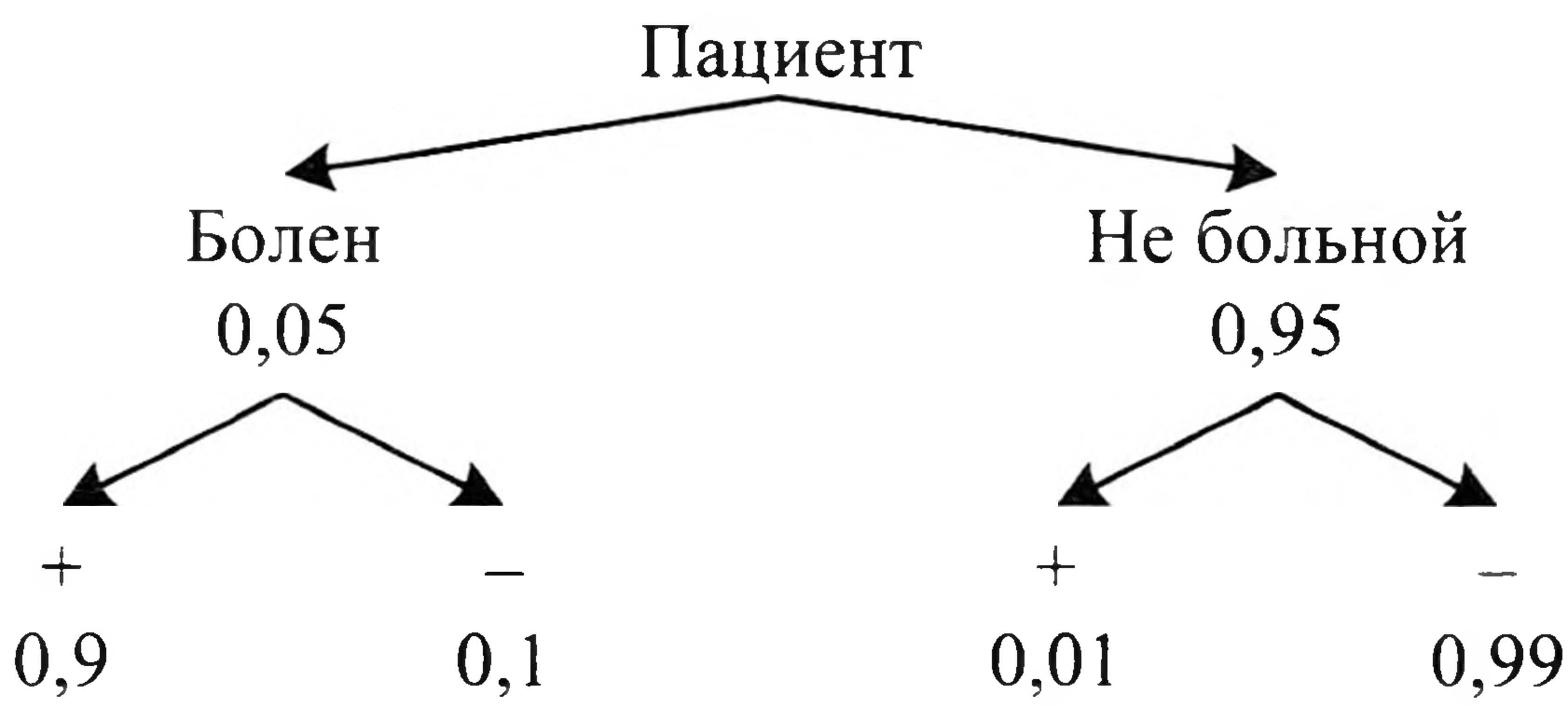
И наконец, задача с таким длинным условием, что большинство абитуриентов пугаются и не приступают к ней. Однако и в ней используется знакомая математическая модель.

17. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ

может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Разберемся в задаче. Вот в клинику приходит человек. Он еще не знает, болен он гепатитом или нет, и врачи пока тоже этого не знают.

С чем пришел пациент? — С подозрением на гепатит. Возможно, он действительно болен гепатитом, а возможно, у его плохого самочувствия другая причина. Может быть, он просто съел что-нибудь. Вероятность того, что он болен гепатитом, равна 0,05 (то есть 5%). Вероятность того, что он здоров, равна 0,95 (то есть 95%).



Если он болен гепатитом, анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. То есть анализ покажет: «есть гепатит».

Заметим, что анализ не во всех случаях выявляет гепатит у того, кто действительно им болен. С вероятностью 0,1 анализ не распознает гепатит у больного.

Более того. Анализ может ошибочно дать положительный результат у того, кто не болеет гепатитом. Вероятность такого ложного положительного результата 0,01. Тогда с вероятностью 0,99 анализ даст отрицательный результат, если человек здоров.

Найдем вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Благоприятные для этой ситуации исходы: человек болен, и анализ положительный (вероятность одновременного наступления этих двух событий равна 0,05 · 0,9) или человек здоров, и анализ ложный положительный (вероятность одновременного наступления этих двух событий равна 0,95 · 0,01). Так как события «человек болен» и «человек не болен» несовместны, то вероятность того, что результат анализа будет положительным

$$0,05 \cdot 0,9 + 0,95 \cdot 0,01 = 0,0545.$$

Ответ: 0,0545.

Заметим, как важно внимательно читать условие задачи. Каждую задачу, которую вы решаете, рассматривайте как тренировку внимания.

Я много раз наблюдала, как старшеклассники, решая задачу, забывают о том, что же они вообще ищут!

Или читают условие раз, другой и третий подряд, упорно «не замечая» какое-нибудь значимое слово.

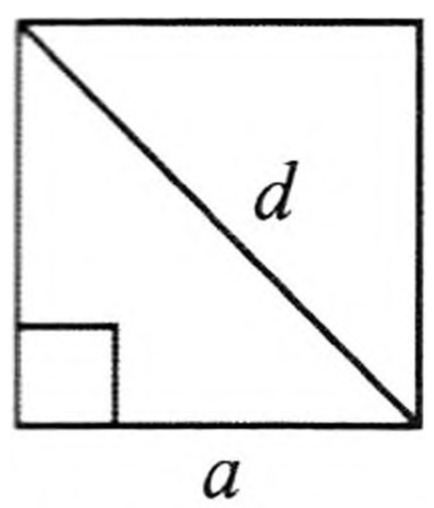
Не всегда умеют (или не хотят) говорить полными предложениями, с подлежащим, сказуемым и дополнениями, и выражают свою мысль примерно так: «Это на это плюс это на это». А с вами такое случается?

Учитесь говорить, друзья мои! Вы заметили, что в школе почти нет устных экзаменов? Подсчитано, что за весь учебный день — шесть-восемь уроков — у вас есть в среднем две минуты для устных ответов! А ведь не зря Наполеон Бонапарт сказал: «Кто не умеет говорить — карьеры не сделает».

ГЕОМЕТРИЯ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 1

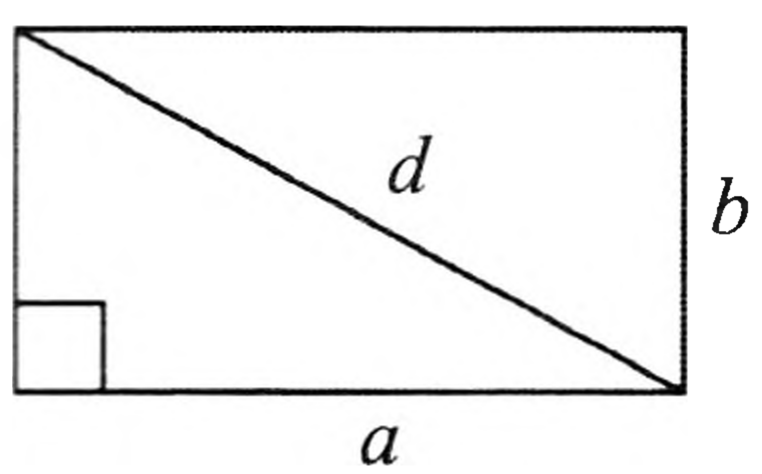
Вычисление площадей фигур

Мы начнем изучение геометрии с вычисления площадей. Прежде всего, учим формулы, без них никуда. Учите и применяйте!



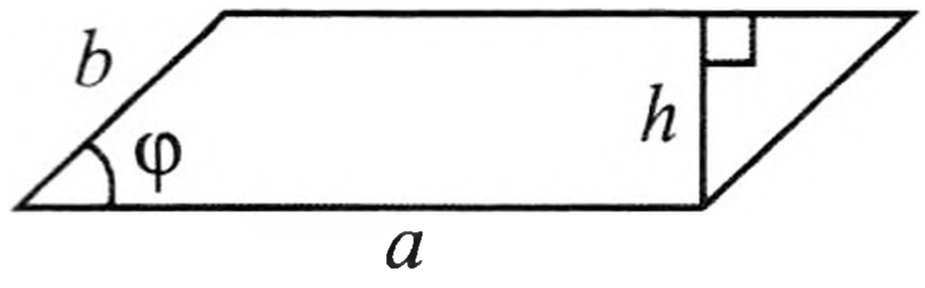
Квадрат

Площадь: $S = a^2$.
Периметр: $P = 4a$. (Периметр — это сумма всех сторон фигуры.)
Длина диагонали: $d = a \cdot \sqrt{2}$.



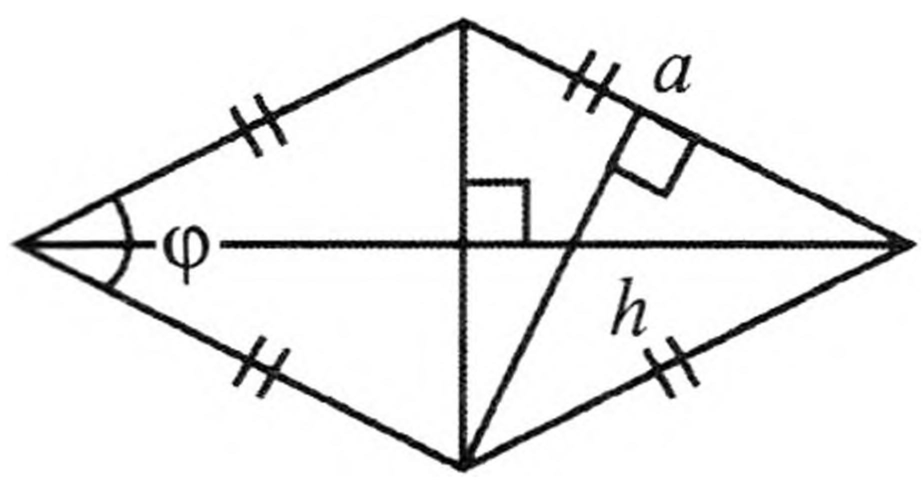
Прямоугольник

$S = a \cdot b$.
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$.



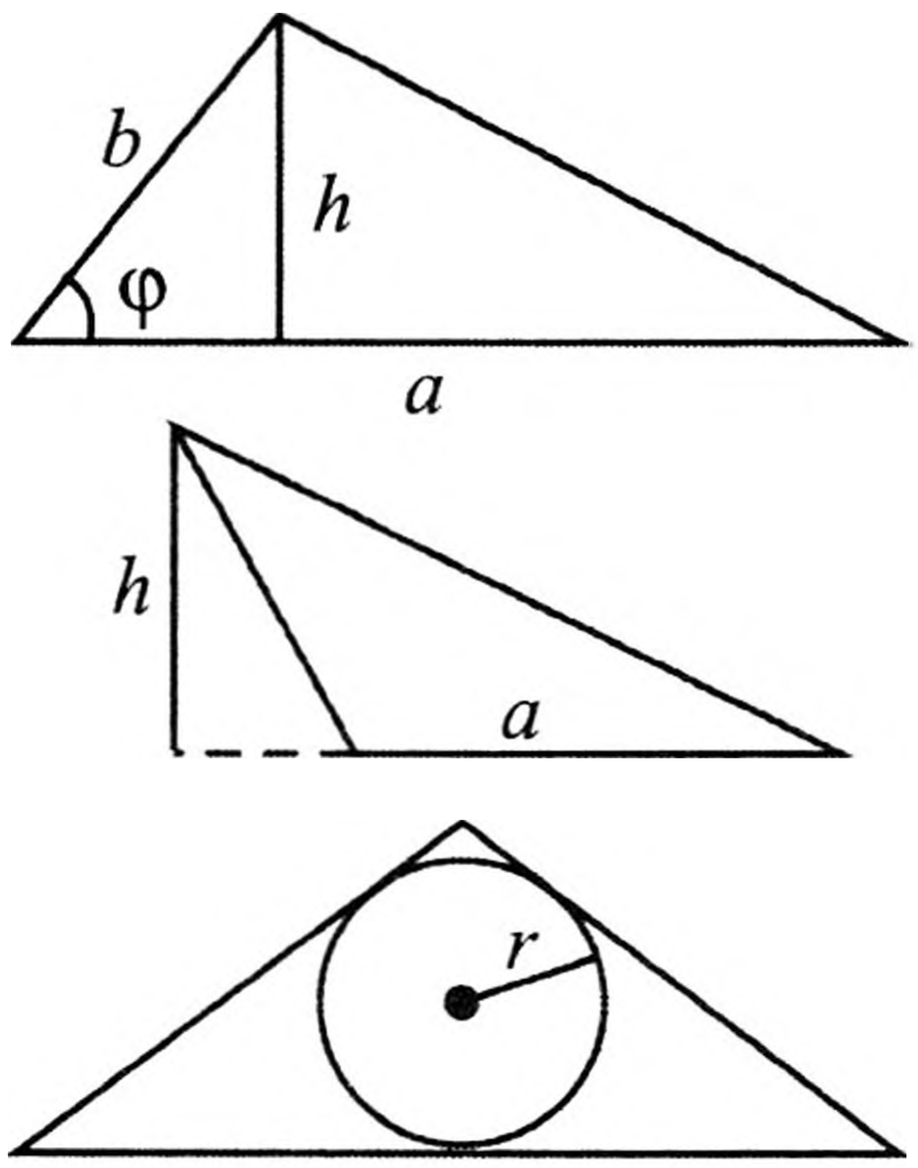
Параллелограмм

$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\varphi$.



Ромб

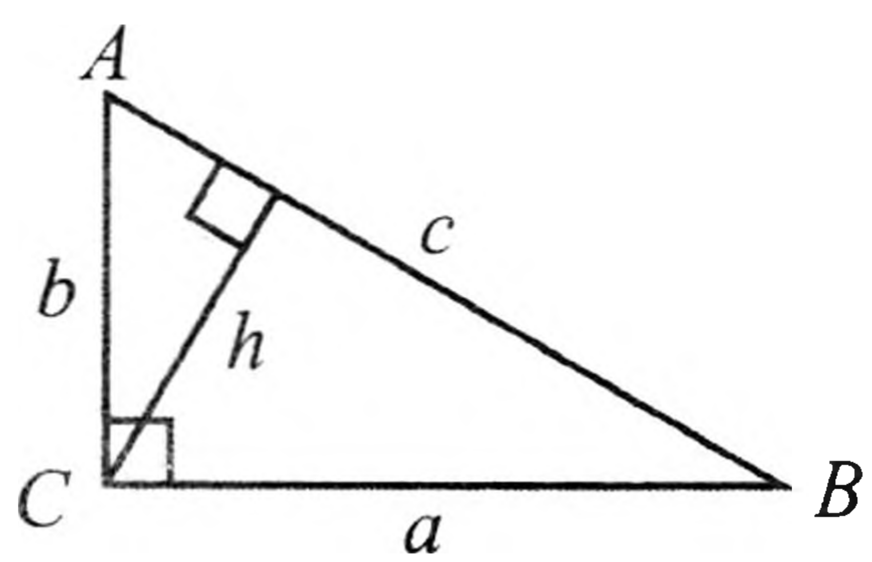
$S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
(d_1 и d_2 — диагонали ромба).



Треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi = p \cdot r$$

(p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности).



Прямоугольный треугольник

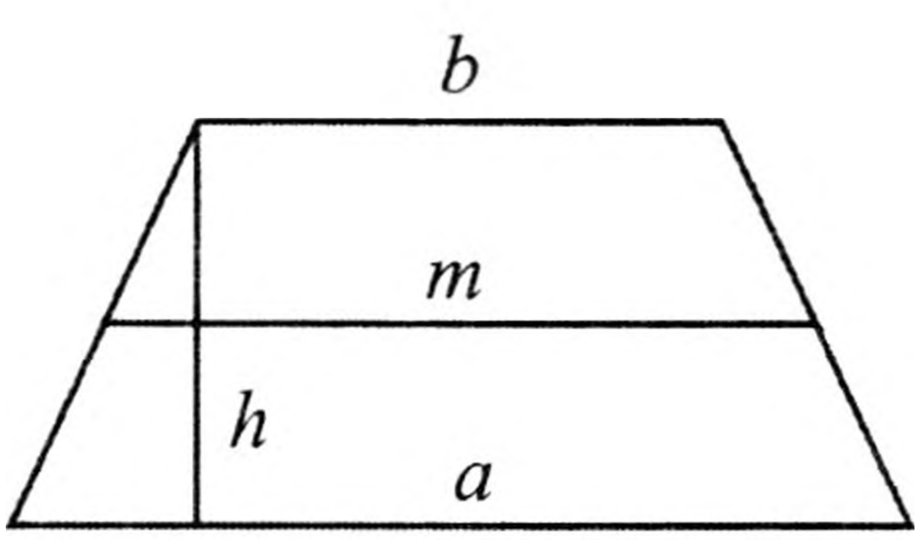
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h.$$

$c^2 = a^2 + b^2$ (терема Пифагора).

$$\sin A = \frac{a}{c};$$

$$\cos A = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

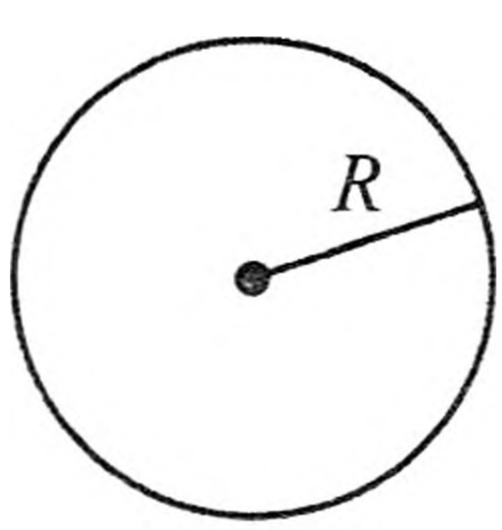


Трапеция

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h;$$

$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

(m — средняя линия, отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

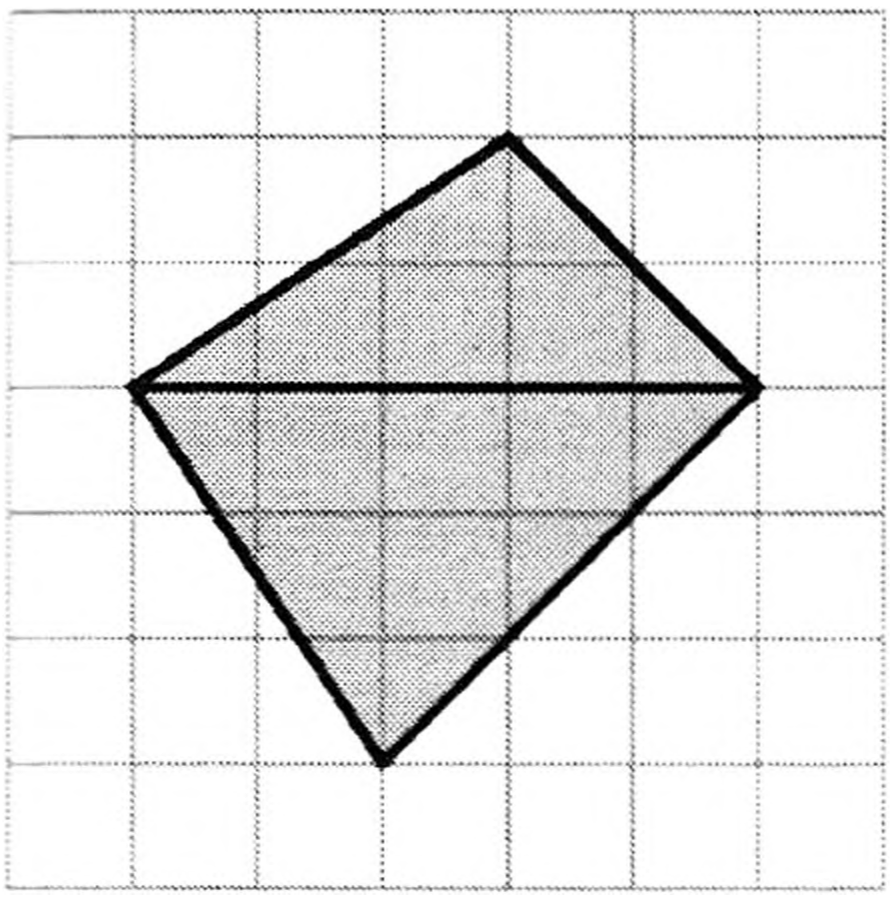


Круг

$S = \pi R^2.$
$L = 2\pi R = \pi D$ (D — диаметр)

Вот самые простые задачи по геометрии из Банка заданий ФИПИ.

1. Найти площадь фигуры.

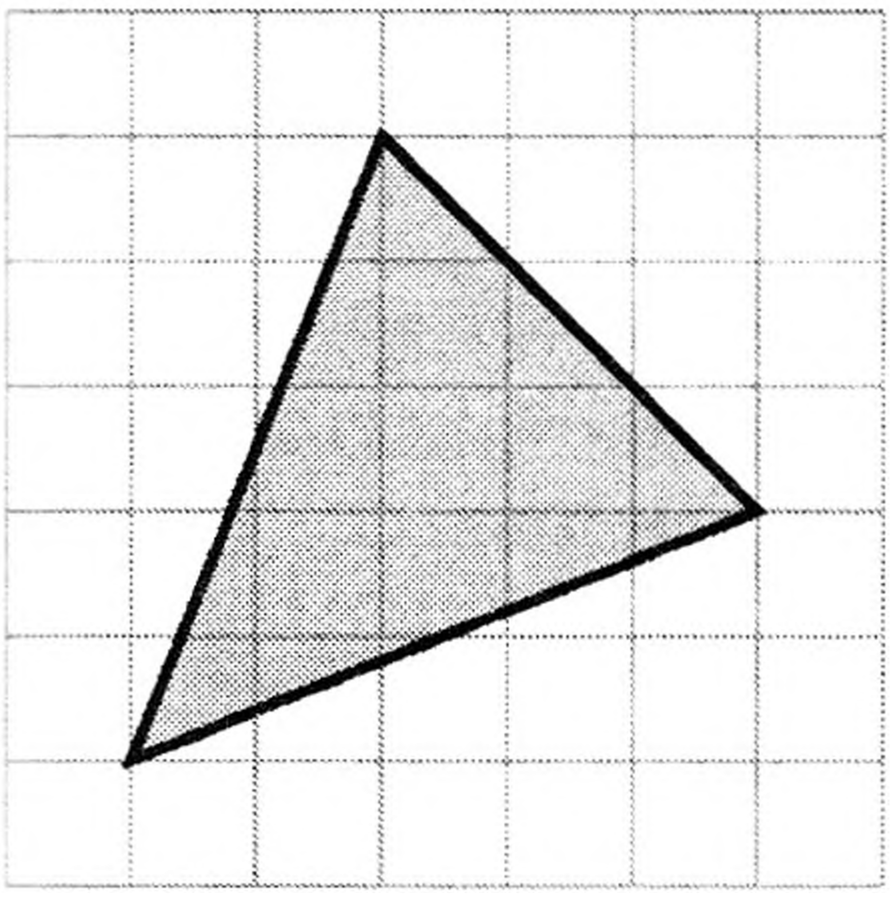


Применим простой прием. Разобьем эту фигуру на такие, площадь которых легко найти, и найдем ее площадь — как сумму площадей этих фигур.

Разделим четырехугольник горизонтальной линией на два треугольника с общим основанием, равным 5. Высоты этих треугольников равны 2 и 3. Тогда площадь четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников:

$$S = 5 + 7{,}5 = 12{,}5.$$

Ответ: 12,5.



2. В других случаях площадь фигуры можно представить как разность каких-либо площадей.

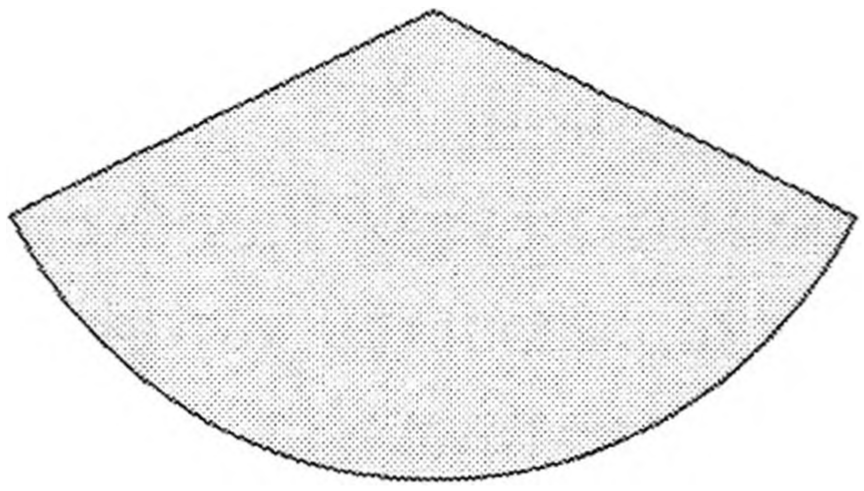
Не так-то просто посчитать, чему равны основание и высота в этом треугольнике! Зато его площадь равна разности площадей квадрата со стороной 5 и трех прямоугольных треугольников. Видите их на рисунке? Получаем:

$$S = 25 - 5 - 5 - 4{,}5 = 10{,}5.$$

Ответ: 10,5.

Иногда в задании надо найти площадь не всей фигуры, а ее части.

3. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.



На этом рисунке мы видим сектор, то есть часть круга. Очевидно, что:

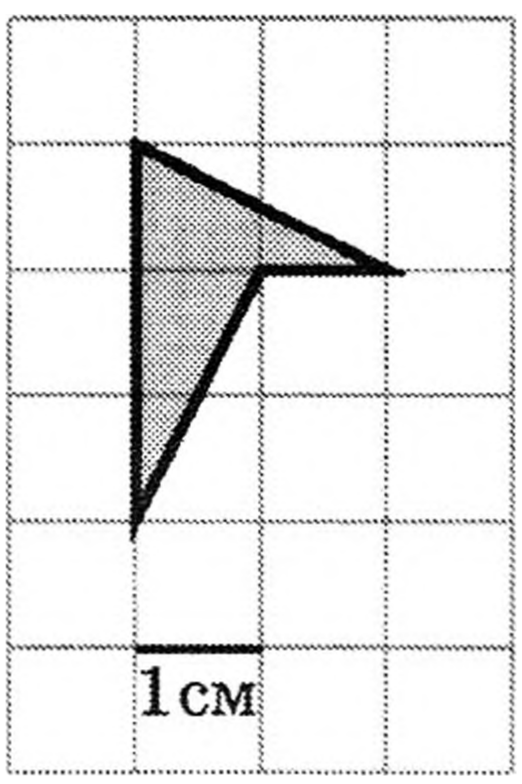
Длина дуги во столько раз меньше длины окружности, во сколько раз ее градусная мера меньше, чем полный круг, то есть 360 градусов.

Площадь сектора во столько раз меньше площади всего круга, во сколько раз его градусная мера меньше, чем полный круг, то есть 360 градусов.

Площадь всего круга равна $\pi R^2 = \pi$, так как $R = 1$. Остается узнать, какая часть круга изображена. Поскольку длина всей окружности равна $2\pi R = 2\pi$ (так как $R = 1$), а длина дуги данного сектора равна 2, следовательно, длина дуги в π раз меньше, чем длина всей окружности. Угол, на который опирается эта дуга, также в π раз меньше, чем полный круг (то есть 360 градусов). Значит, и площадь сектора будет в π раз меньше, чем площадь всего круга.

Ответ: 1.

4. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах

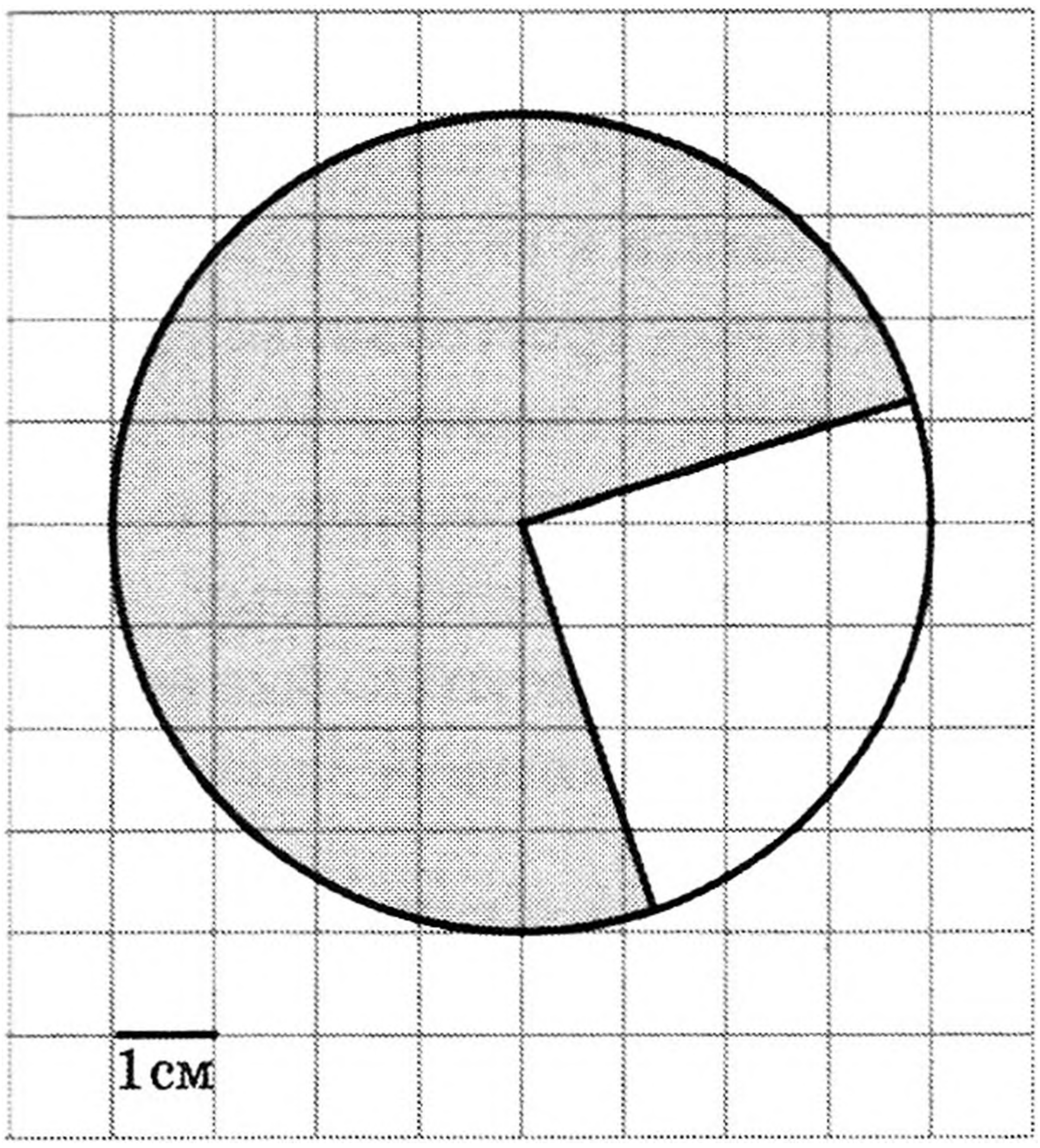


Разбейте фигуру на два равных по площади треугольника.

Ответ: 2.

5. Найдите (в см^2) площадь фигуры, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок).

В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Закрашены $\frac{3}{4}$ круга. Значит,

$$S = \frac{3}{4}\pi \cdot 4^2 = 12\pi;$$

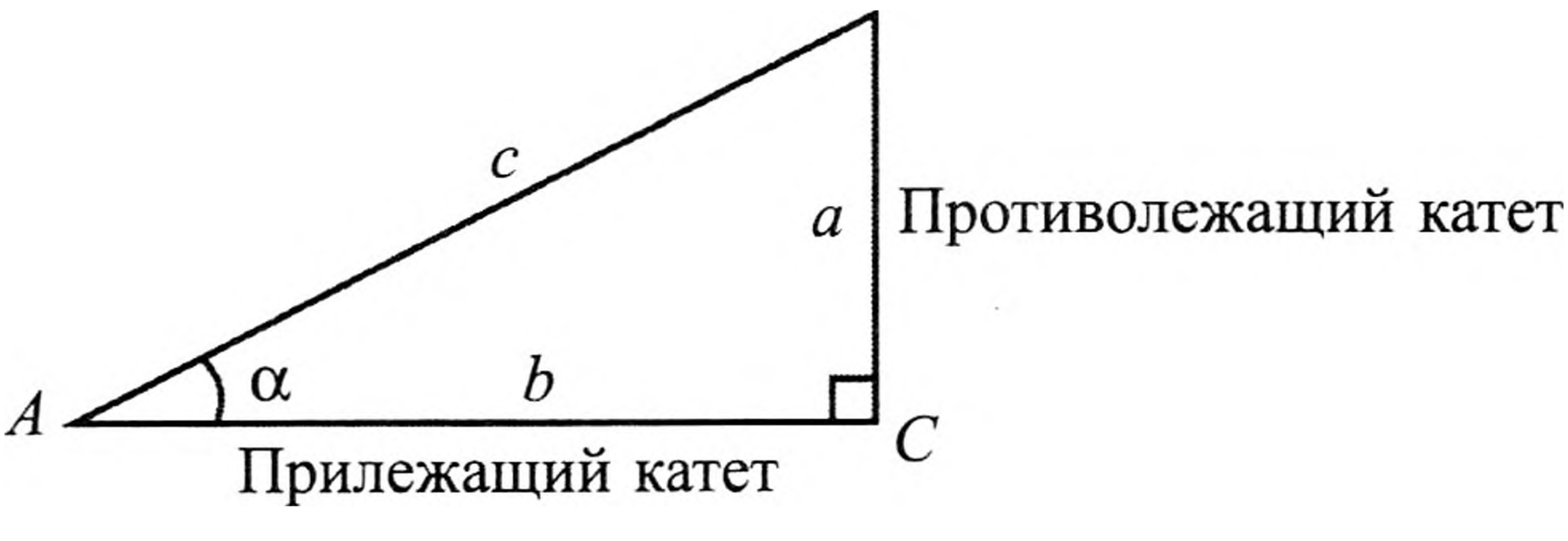
$$\frac{S}{\pi} = 12.$$

Ответ: 12.

Основы тригонометрии

Напомним, что **прямым** называется угол, равный 90°, **острым** — угол меньше 90°, **тупым** — угол, который больше 90° и меньше 180°. Применительно к такому углу слово «тупой» не оскорбление, а математический термин.

Нарисуем прямоугольный треугольник. Прямой угол обозначим C. Обратите внимание, что сторона, лежащая напротив угла, обозначается той же буквой, только маленькой. Так, сторона, лежащая напротив угла A, обозначается a.



В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая напротив прямого угла, называется **гипотенузой**.

Стороны, лежащие напротив острых углов, называются **катеты**.

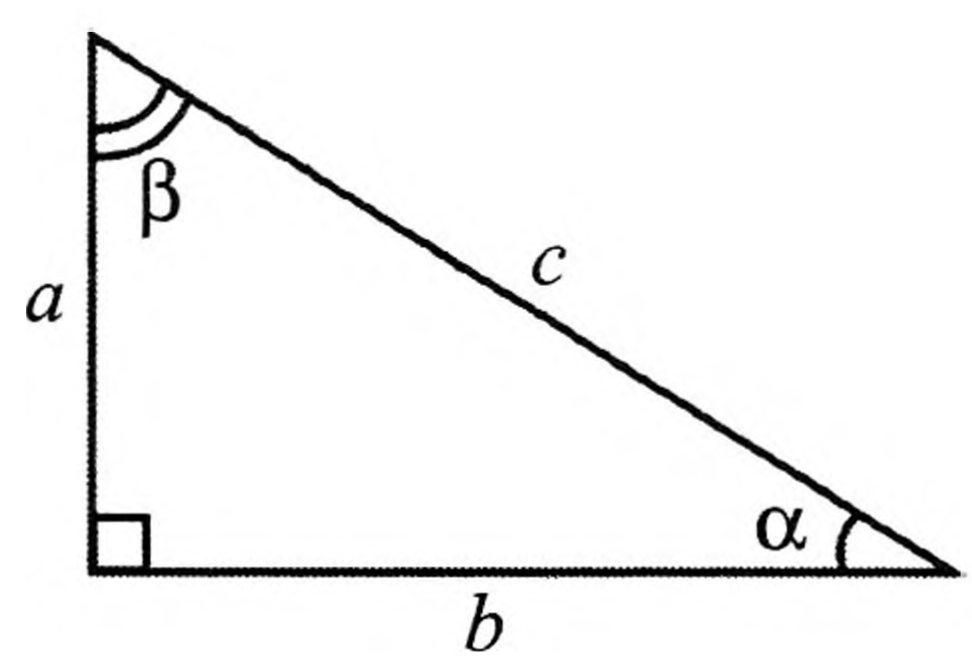
Катет, лежащий напротив угла A, называется **противолежащим**. Другой катет, который лежит на одной из сторон угла A, — **прилежащим**.

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \sin\alpha = \cos\beta;$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad \cos\alpha = \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

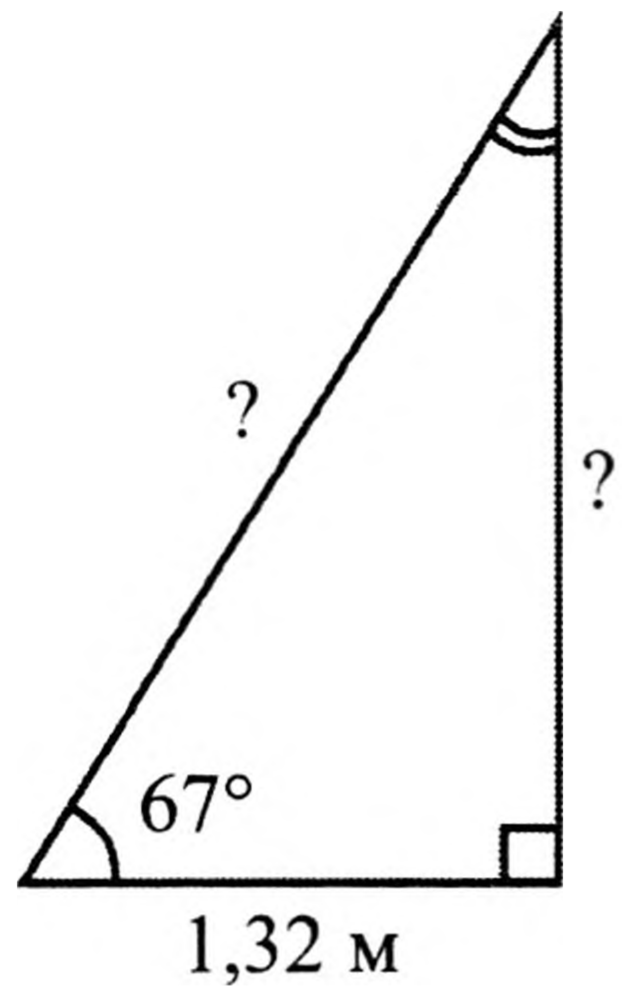
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta.$$

Это определения. А для чего все-таки нужны синус, косинус, тангенс и котангенс?

Мы знаем, что **сумма углов любого треугольника равна 180°.**

Знаем соотношение между **сторонами** прямоугольного треугольника. Это теорема Пифагора: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

То есть, зная два угла в треугольнике, можно найти третий. Зная две стороны в прямоугольном треугольнике, можно найти третью. Углы — отдельно, стороны — отдельно. А что делать, если в прямоугольном треугольнике известен один угол (кроме прямого) и одна сторона?



Вот с этим и столкнулись люди в прошлом, составляя карты местности и звездного неба. Ведь не всегда можно непосредственно измерить все стороны треугольника.

Синус, косинус и тангенс — их еще называют **тригонометрическими функциями угла** — дают соотношения между **сторонами** и **углами** треугольника. Зная угол, можно найти все его тригонометрические функции по специальным таблицам. А зная синусы, косинусы и тангенсы углов треугольника и одну из его сторон, можно найти остальные.

Мы тоже нарисуем такую таблицу для углов от 0 до 90°.

φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\varphi$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Разберем несколько задач по тригонометрии из Банка заданий ФИПИ.

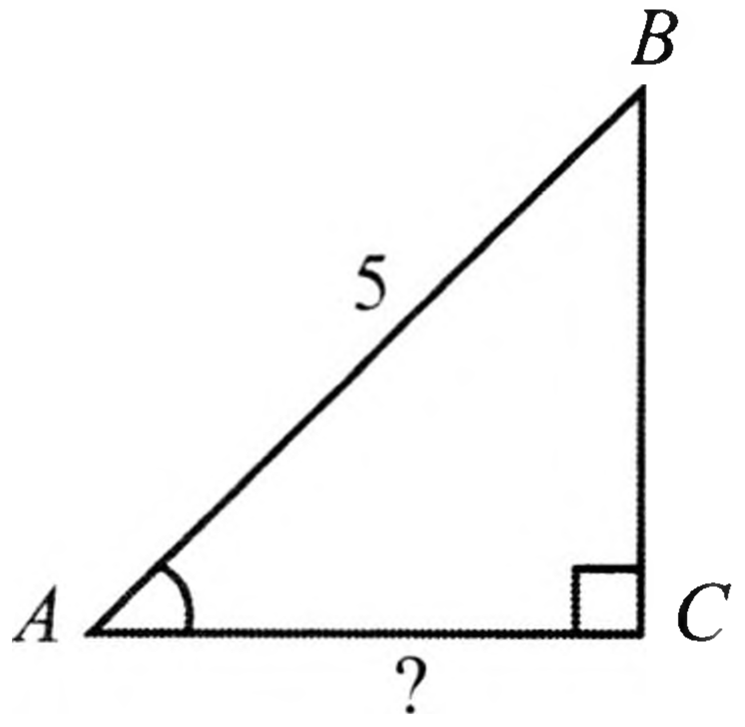
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin \angle A = 0{,}1$. Найдите $\cos \angle B$.

Задача решается за четыре секунды.

Поскольку $\angle A + \angle B = 90°$, $\sin A = \cos B = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 5$, $\sin\angle A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}.$$

Отсюда $BC = \frac{7}{25} \cdot AB = \frac{7}{5}$.

Найдем AC по теореме Пифагора.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{24}{5} = 4{,}8.$$

Ответ: 4,8.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 60°, $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB.

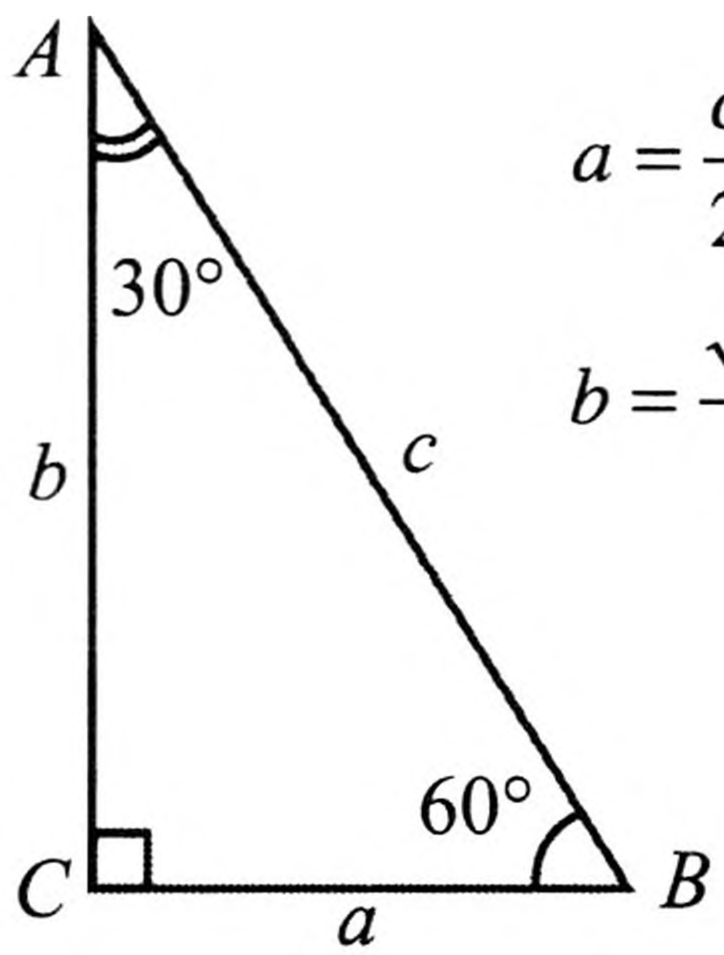
По условию, AB — гипотенуза, BC — катет, противолежащий углу A.

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, так как угол A равен 60°.

Отсюда $AB = \frac{BC}{\sin A} = 4$.

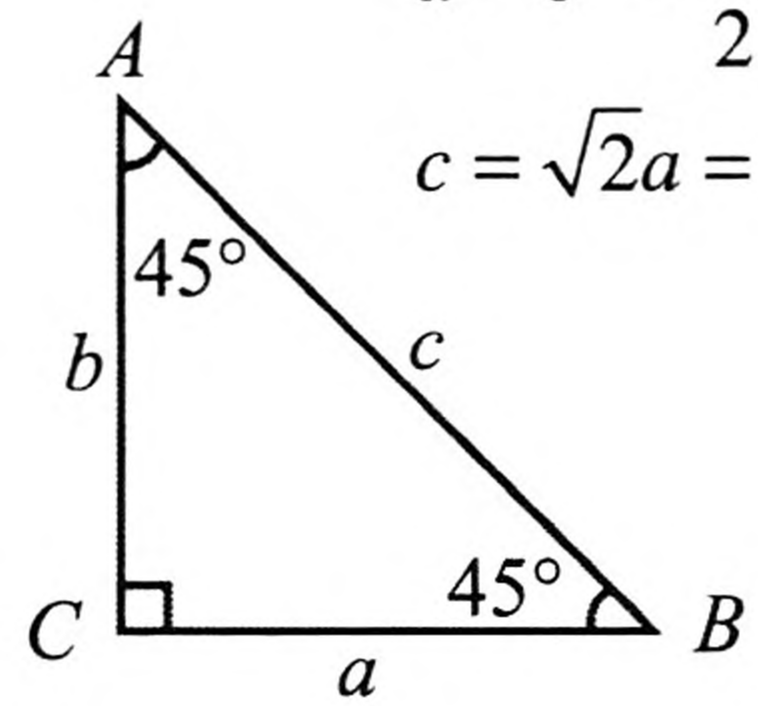
Ответ: 4.

В задачах часто встречаются треугольники с углами 90°, 30° и 60° или с углами 90°, 45° и 45°. Основные соотношения для них запомните наизусть.



$$a = \frac{c}{2},$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

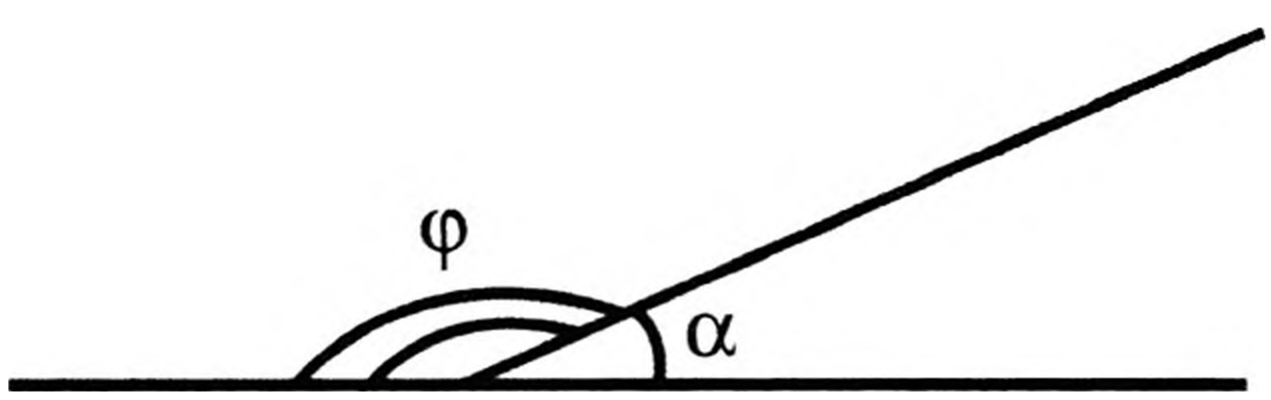


$$a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

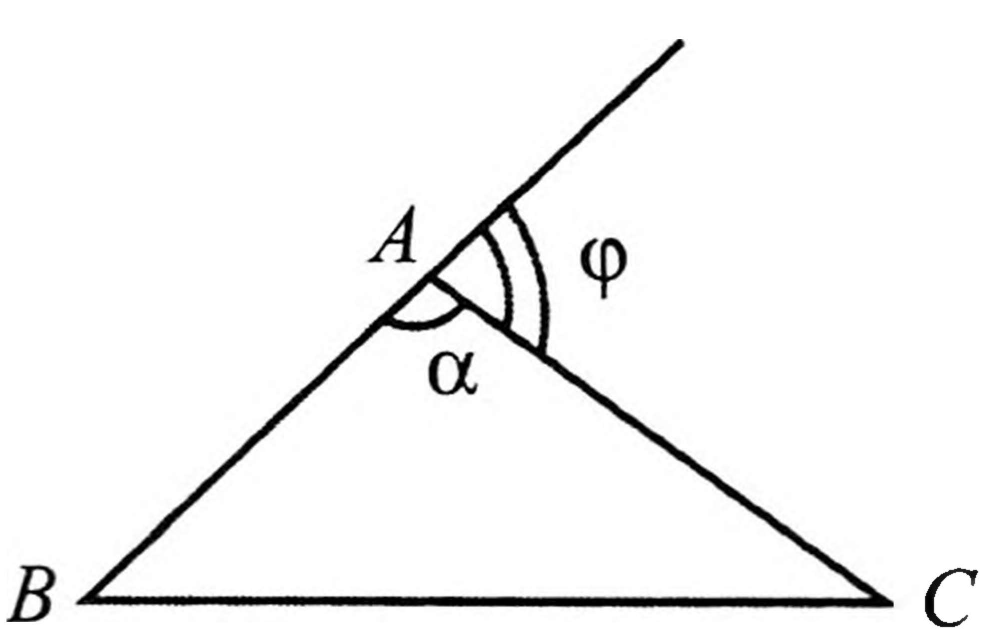
$$c = \sqrt{2}a = \sqrt{2}b.$$

В некоторых задачах требуется найти синус, косинус или тангенс внешнего угла треугольника. А что такое внешний угол треугольника?

На этом рисунке изображены смежные углы. Так называются углы, имеющие общую вершину и общую сторону и образующие в сумме развернутый угол, то есть 180°.



Продолжили одну из сторон треугольника. Внешний угол при вершине A — это угол, смежный с углом A. Если угол A острый, то смежный с ним угол — тупой, и наоборот.



$$\varphi = 180° - \alpha$$

$$\varphi = \angle B + \angle C$$

$$\sin\varphi = \sin\alpha$$

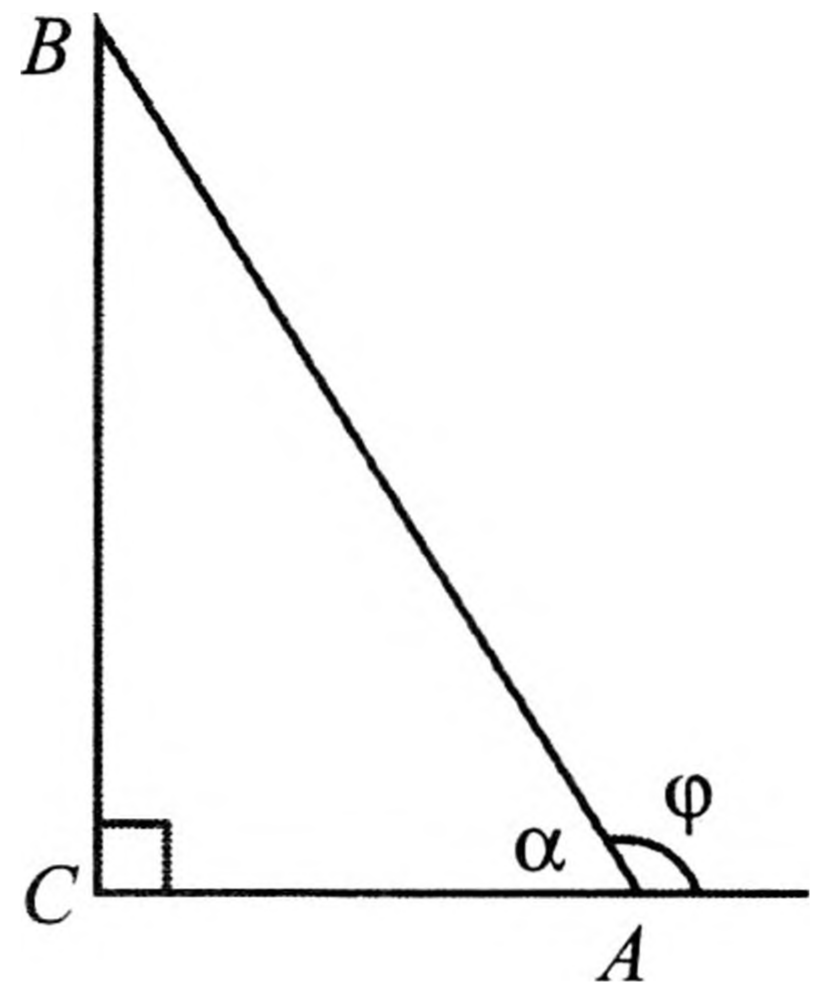
$$\cos\varphi = -\cos\alpha$$

Обратите внимание, что

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos\angle A = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.



Пусть φ — внешний угол при вершине A. $\cos\varphi = -\cos\angle A = -\frac{4}{\sqrt{17}}$. Зная $\cos\varphi$, найдем $\operatorname{tg}\varphi$ по формуле

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi.$$

Получим: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

Ответ: –0,25.

Часто для обозначения углов пользуются греческими буквами: α, β, φ и другими. Выучите их написание и название. Не называть же их всякий раз «эта штучка»!

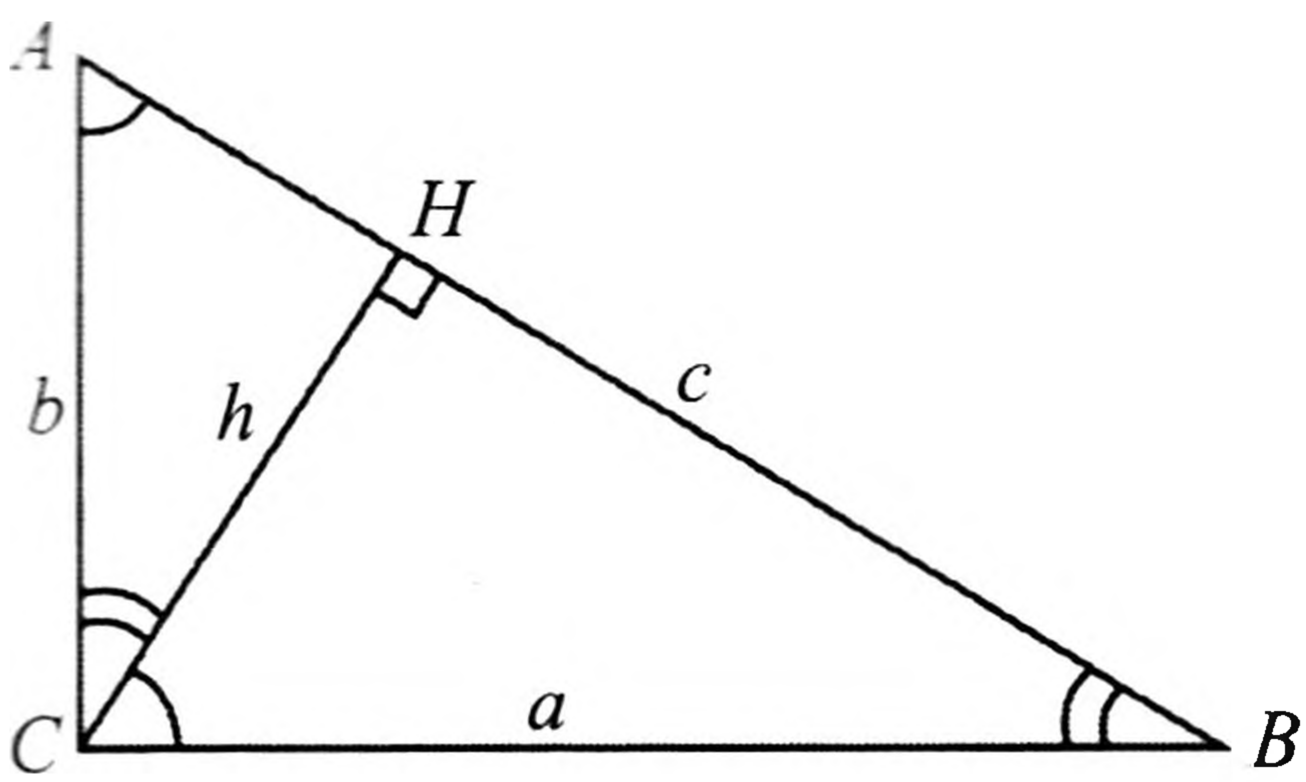
Специально для этого в конце книги приведен греческий алфавит.

Во многих задачах по геометрии рассматривается прямоугольный треугольник, в котором высота проведена из вершины прямого угла. Посмотрим, что при этом получается.

Обратите внимание на треугольники ABC, BCH и ACH. Мы видим, что угол CAB равен углу HCB, а угол ABC равен углу ACH. Иными словами, каждый из трех углов треугольника ABC равен одному из углов треугольника ACH (и треугольника BCH). Треугольники ABC, ACH и BCH называются **подобными.**

Записывается это так:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$$



$\angle BAC = \angle BCH$,

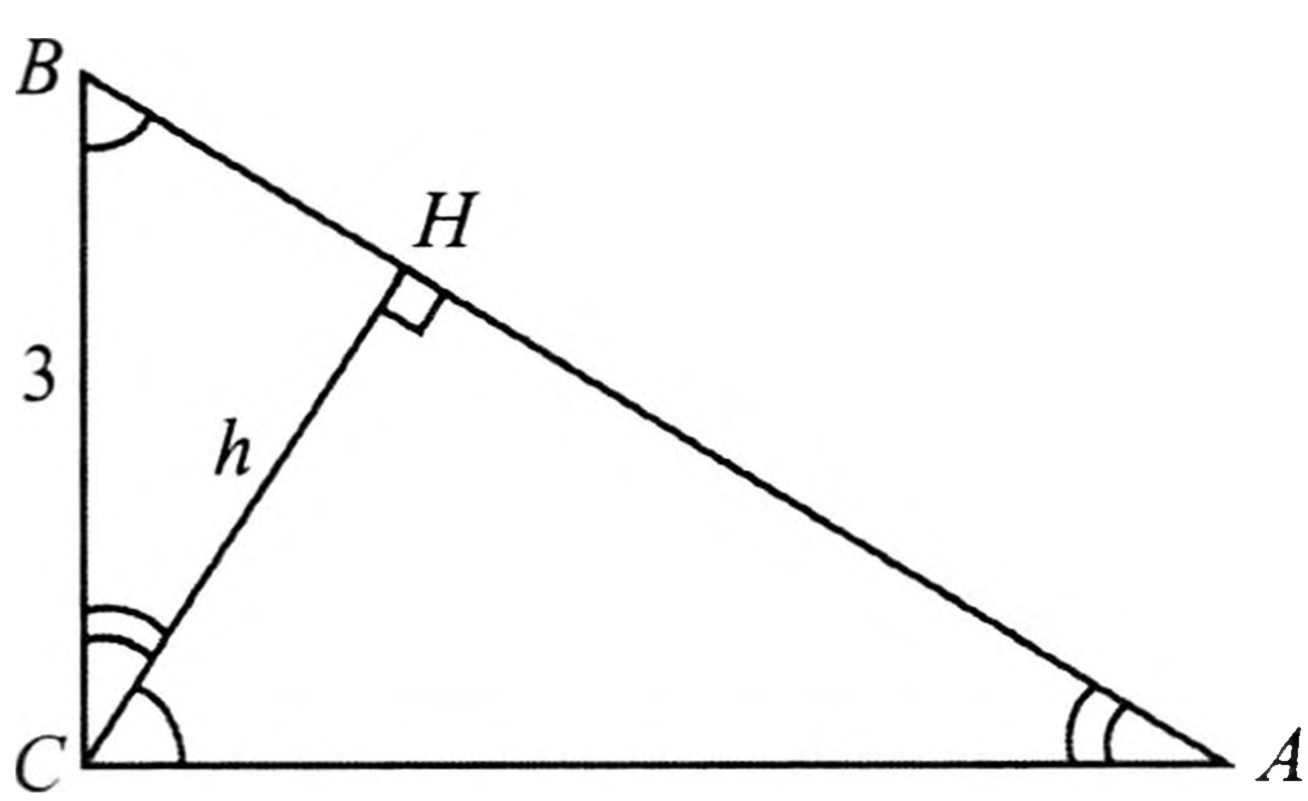
$\angle ABC = \angle ACH$,

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{BH}{a}$,

$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{AH}{b}$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 3$, $\cos\angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите AH.



Рассмотрим треугольник ABC. В нем известны косинус угла A и противолежащий катет BC. Зная синус угла A, мы могли бы найти гипотенузу AB.

Давайте найдем $\sin\angle A$:

$\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$; $\sin^2 A + \frac{35}{36} = 1$; $\sin^2 A = \frac{1}{36}$; $\sin A = \frac{1}{6}$.

Тогда $AB = BC : \sin A = 3 : \frac{1}{6} = 3 \cdot 6 = 18$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH, $\angle H = 90°$. Поскольку $\angle HCB = \angle A$, $\sin\angle HCB = HB : BC$.

Отсюда $HB = BC \cdot \sin\angle HCB = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

$AH = AB - HB = 18 - \frac{1}{2} = 17{,}5$.

Ответ: 17,5.

Формулы геометрии и свойства геометрических фигур

Вспомним основные формулы геометрии и свойства геометрических фигур. А может, впервые познакомимся с ними?

По моему опыту, у выпускника школы знания по геометрии часто близки к нулю. Геометрии в школе почти нет.

Да, в школьном расписании есть такой предмет, но экзамен по нему не обязателен, поэтому уроки геометрии заменяются подготовкой к ОГЭ по алгебре, мытьем окон, классным часом, и в результате абитуриент не знает, как вычислить площадь квадрата[1].

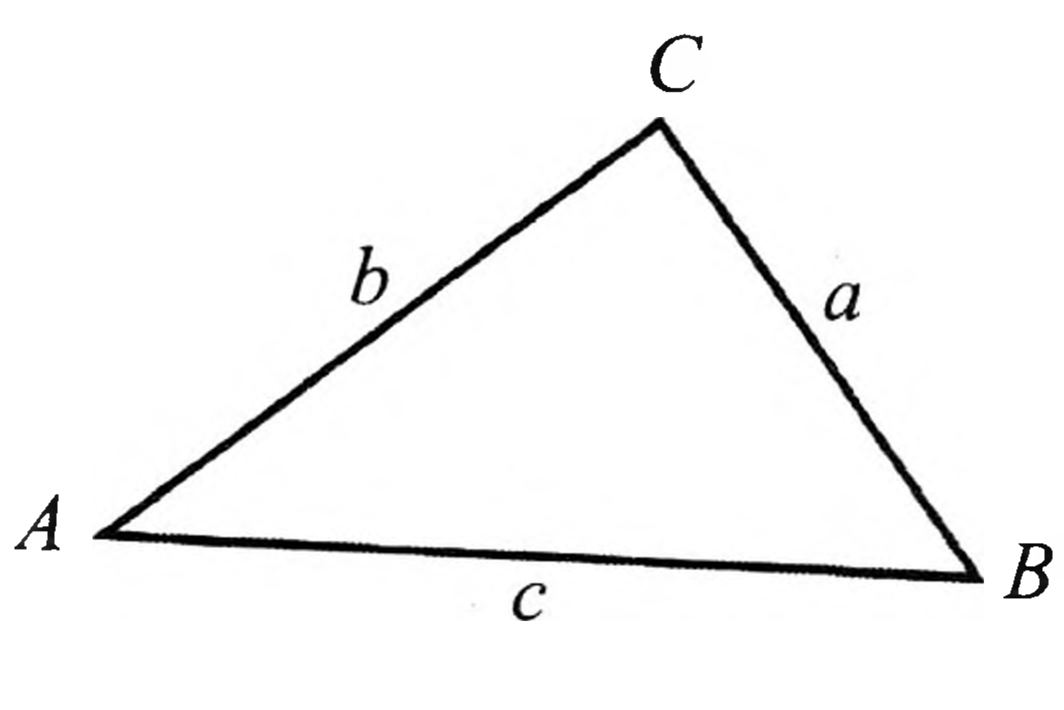
Все основные формулы, факты и соотношения в этой книге собраны в краткие таблицы. И тут же показано их практическое применение, то есть решение типовых задач из Банка заданий. Некоторые из них тривиальны — бери числа, подставляй в формулу. Более интересны те, в которых используются те или иные важные приемы или методы.

Часто нужно посмотреть на чертеж не привычным взглядом, а как-то иначе, чтобы вдруг увидеть решение, почувствовать, угадать его, а затем доказать свое предположение и найти ответ. Этим мы и займемся.

Напомню еще раз, что в бланке ответов ЕГЭ в части 1 нужно писать только число! Ни сантиметров, ни градусов мы там не пишем.

Начнем с треугольников и основных фактов, с ними связанных.

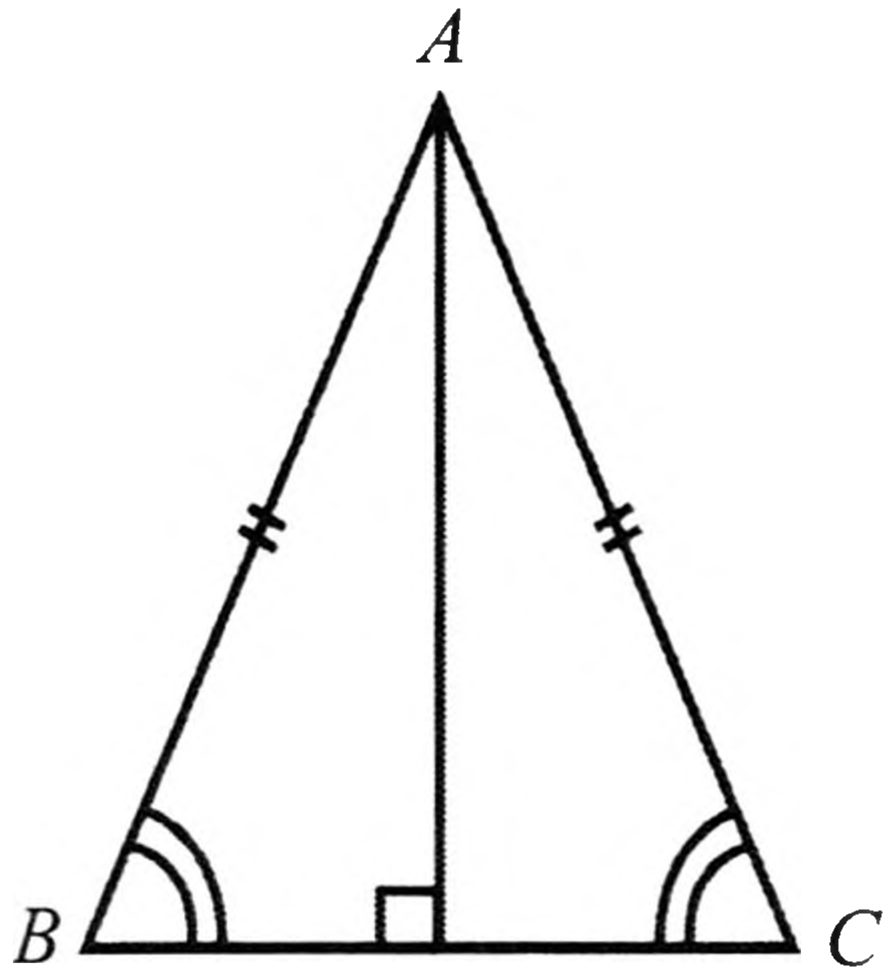
Сумма углов любого треугольника равна 180°.



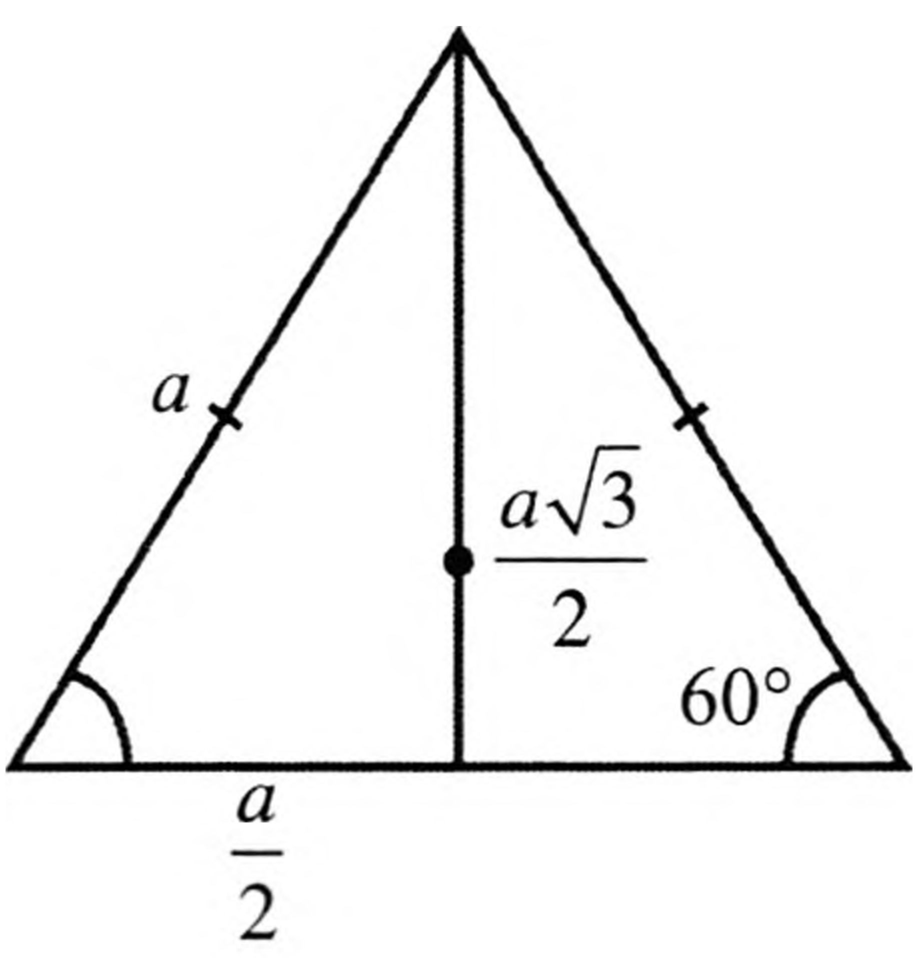
В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол. Напротив меньшей стороны — меньший угол.

Сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны: $a + c > b$ (неравенство треугольника).

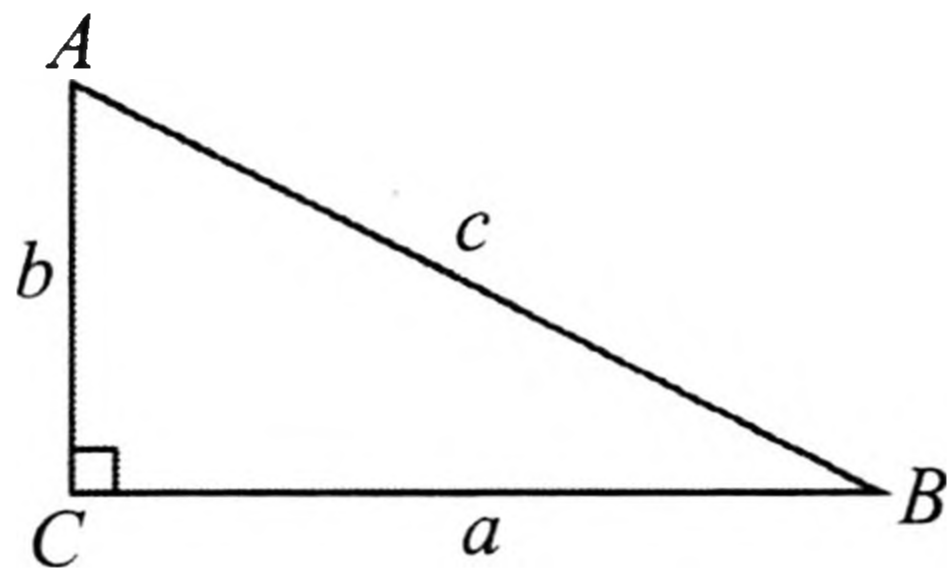
[1] Я не шучу. На собеседовании я задаю ученику два вопроса «на засыпку» — прошу посчитать площадь квадрата и нарисовать правильный шестиугольник. Вместо него мне рисуют нечто кривое и перекошенное, как будто никогда не видели ни гайку, ни снежинку!



Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным. Эти стороны называют боковыми. Напротив равных сторон лежат равные углы. Высота, проведенная к третьей стороне (основанию) равнобедренного треугольника, является также медианой и биссектрисой.

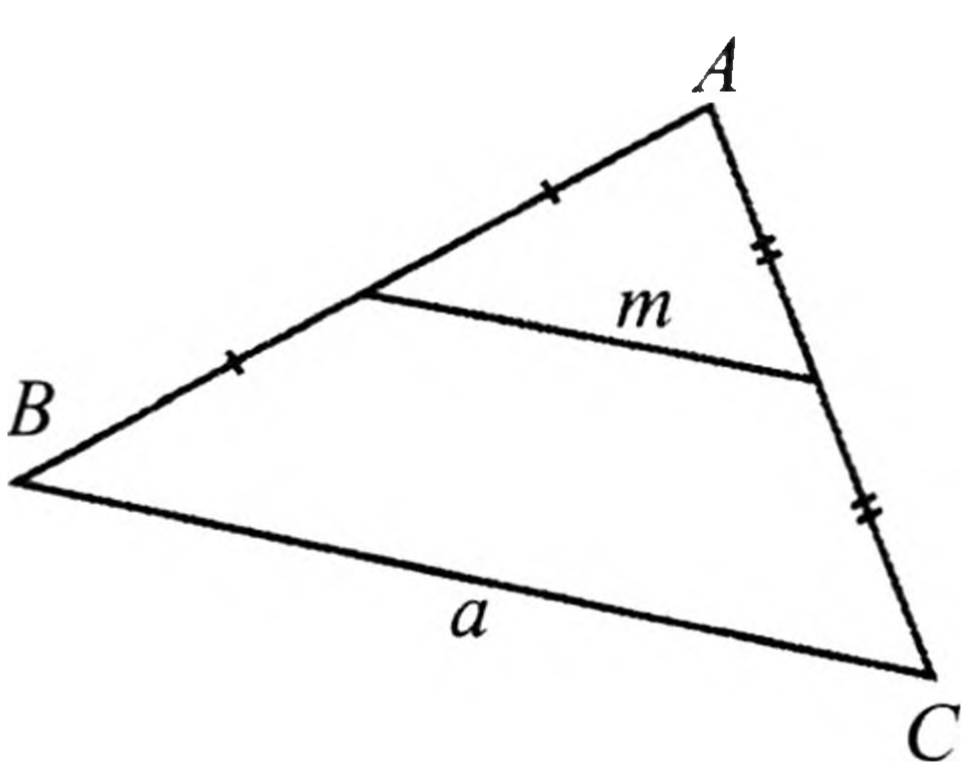


Равносторонним (или правильным) называется треугольник, у которого все стороны равны. Все его углы равны 60°.



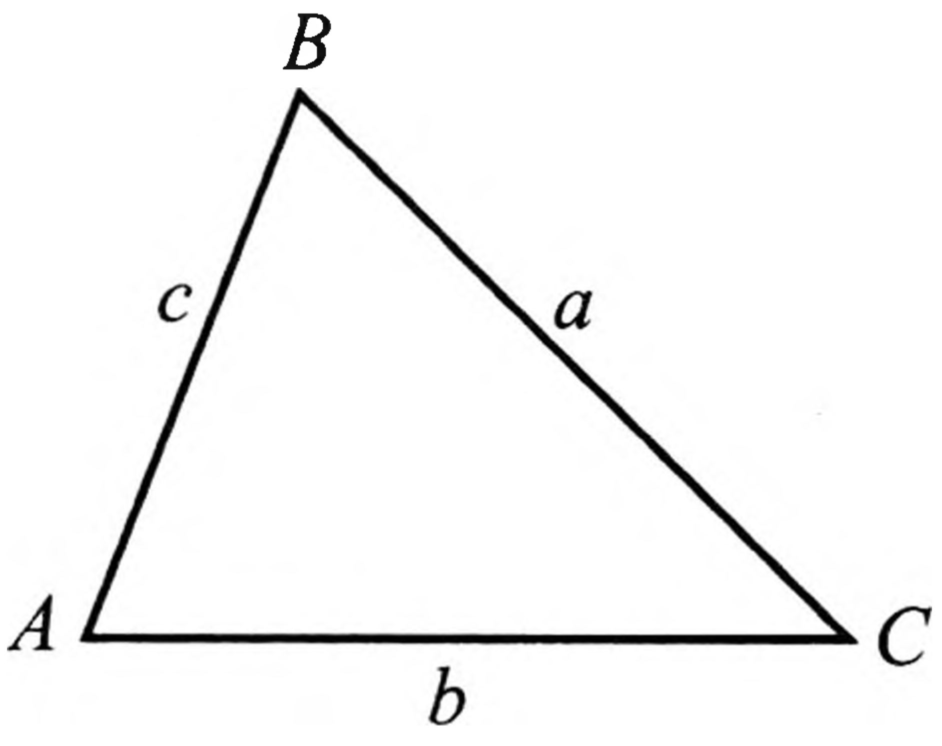
В прямоугольном треугольнике больший угол равен 90°. Сторона, лежащая напротив него, называется гипотенуза, две другие — катеты.

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине: $m = \frac{a}{2}$.

Для любого треугольника выполняются теорема синусов и теорема косинусов.



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.
Теорема косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\angle C.$$

Все формулы площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\angle C=p\cdot r=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},$$

где h — высота, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр, то есть полусумма сторон треугольника.

1. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно, сумма двух других углов треугольника равна 85°, а их отношение равно 2:3.

Пусть эти углы равны $2x$ и $3x$. Получим уравнение $2x + 3x = 85°$ и найдем $x = 17°$. Тогда $3x = 51°$.

Ответ: 51.

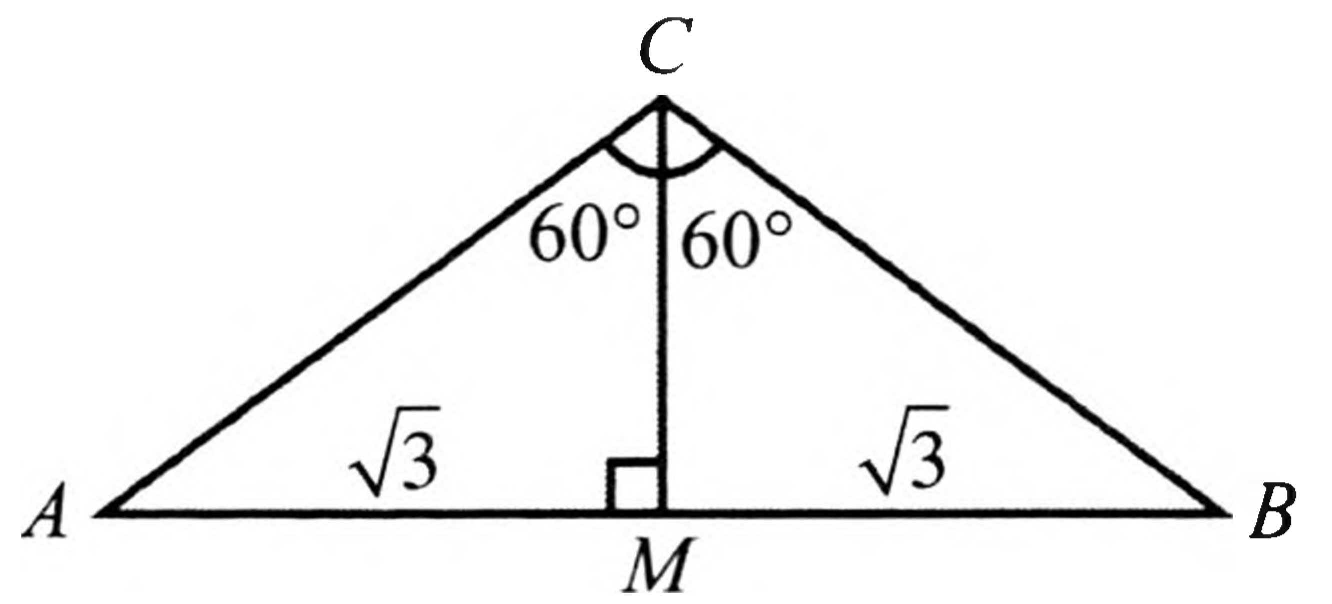
2. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

Как вы думаете, может ли равнобедренный треугольник иметь два угла по 98°?

Нет, конечно! Ведь сумма углов треугольника равна 180°. Значит, один из углов треугольника равен 98°, а два других равны $\dfrac{180^\circ - 98^\circ}{2} = 41^\circ$.

Ответ: 41.

3. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.



На рисунке уже дана подсказка. Высота CM делит равнобедренный треугольник ABC на два прямоугольных. Одновременно CM является медианой и биссектрисой треугольника ABC.

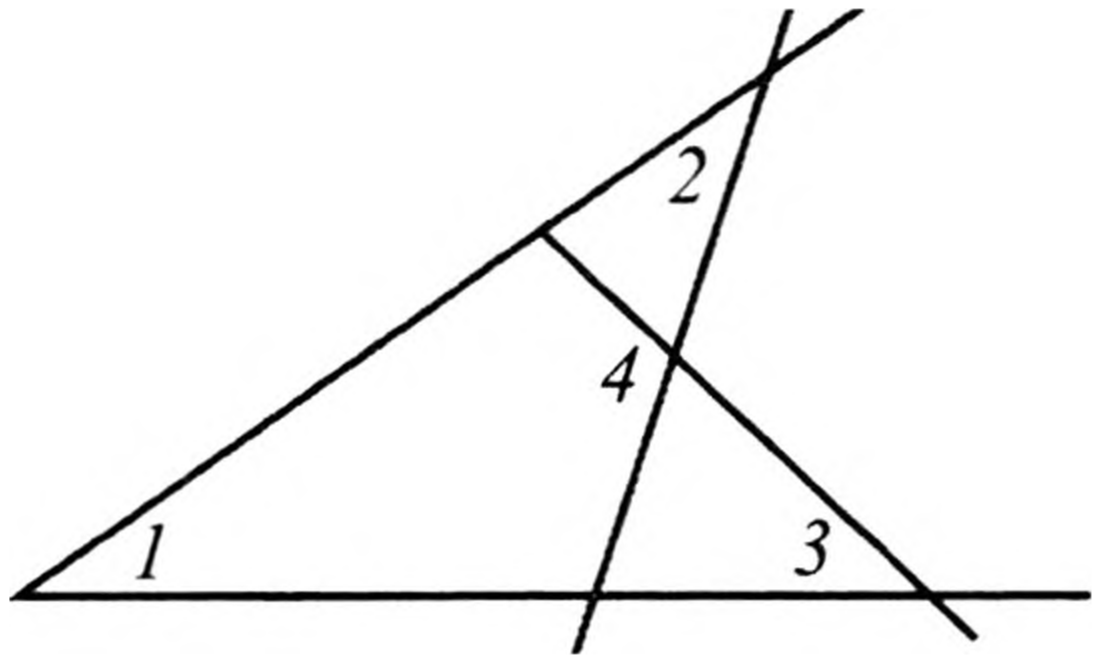
Рассмотрим треугольник ACM.

Угол AMC прямой, $AM = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, $\angle ACM = 60^\circ$.

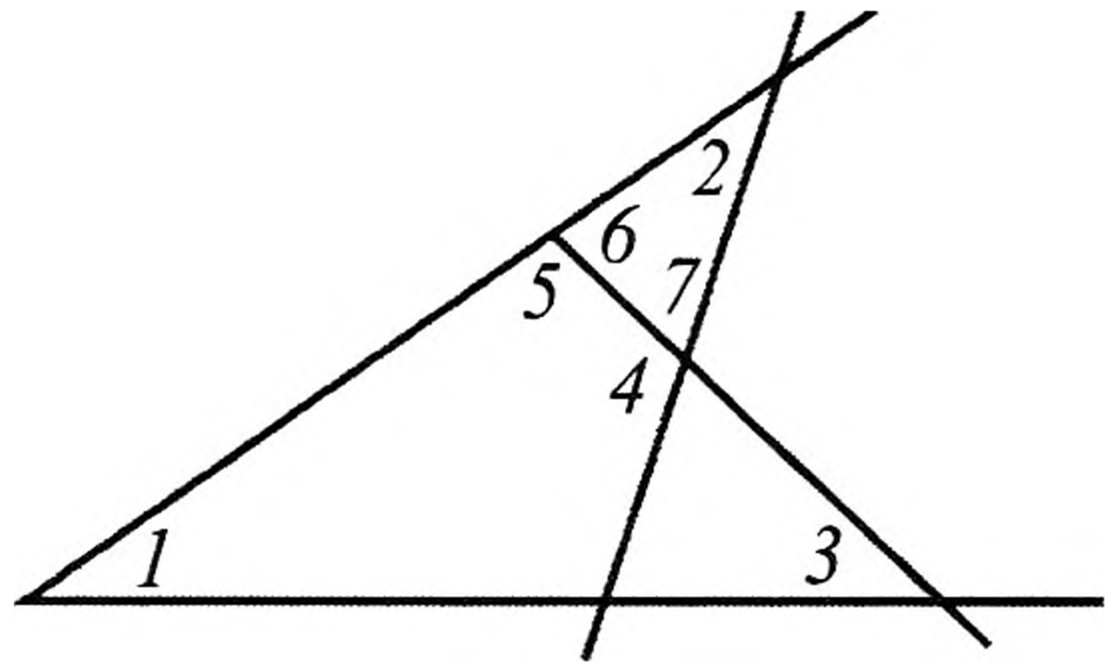
Из треугольника AMC найдем $AC = AM : \sin 60^\circ = \sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

Ответ: 2.

4. На рисунке угол *1* равен 46°, угол *2* равен 30°, угол *3* равен 44°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.



Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол *5*. Он равен $180° - \angle 1 - \angle 3 = 90°$.
Тогда $\angle 6 = 90°$, $\angle 7 = 180° - \angle 2 - \angle 6 = 60°$.
Угол *4*, смежный с углом *7*, равен 120°.
Ответ: 120.

Заметим, что такой способ решения — не единственный. Просто находите и отмечайте на чертеже все углы, которые можно найти, — и, в конце концов, получите ответ.

5. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Пусть углы треугольника равны $2x$, $3x$ и $4x$. Тогда

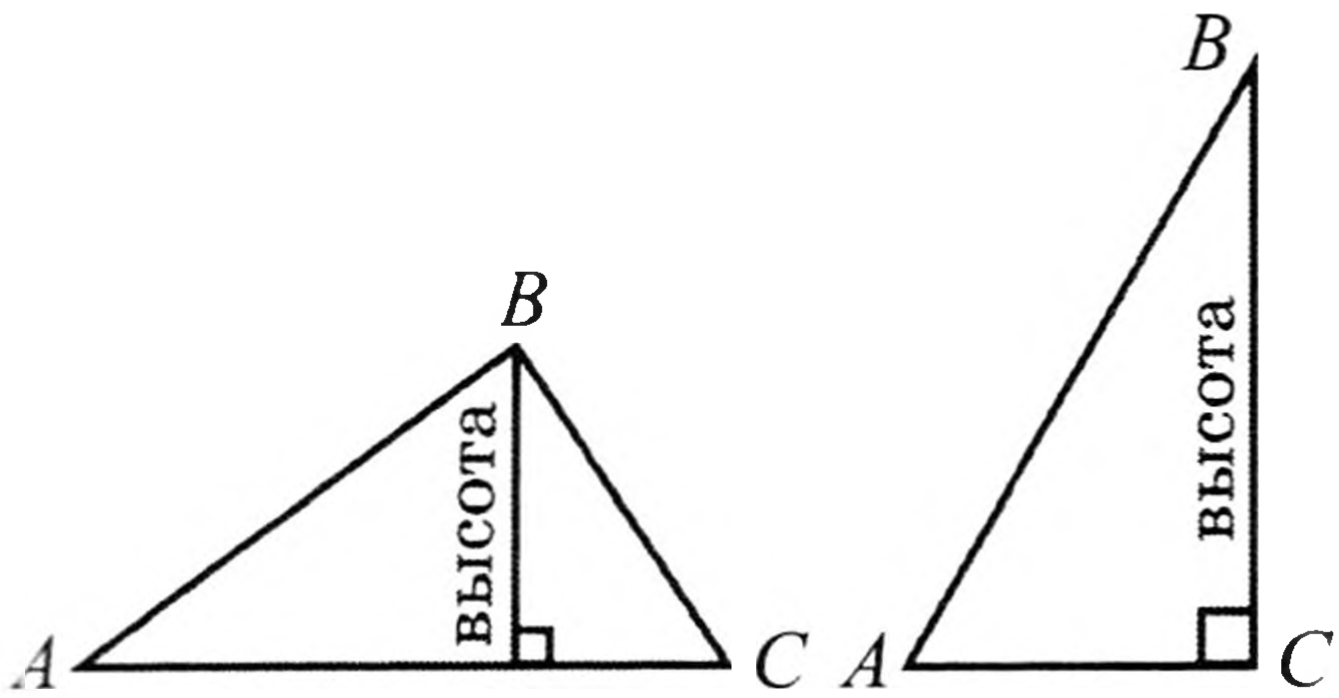
$$2x + 3x + 4x = 180°;$$
$$9x = 180°;$$
$$x = 20°.$$

Тогда

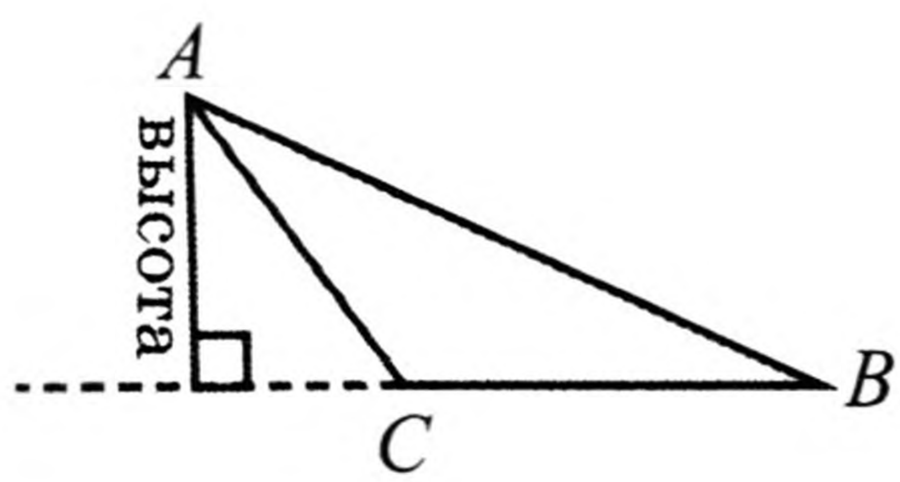
$$2x = 40°.$$

Ответ: 40.

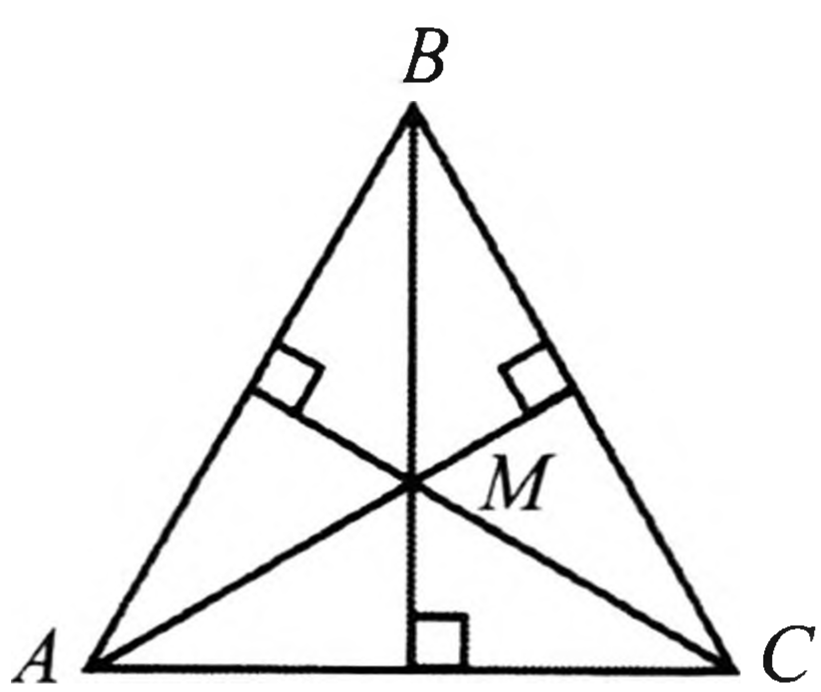
Высоты, медианы и биссектрисы треугольника



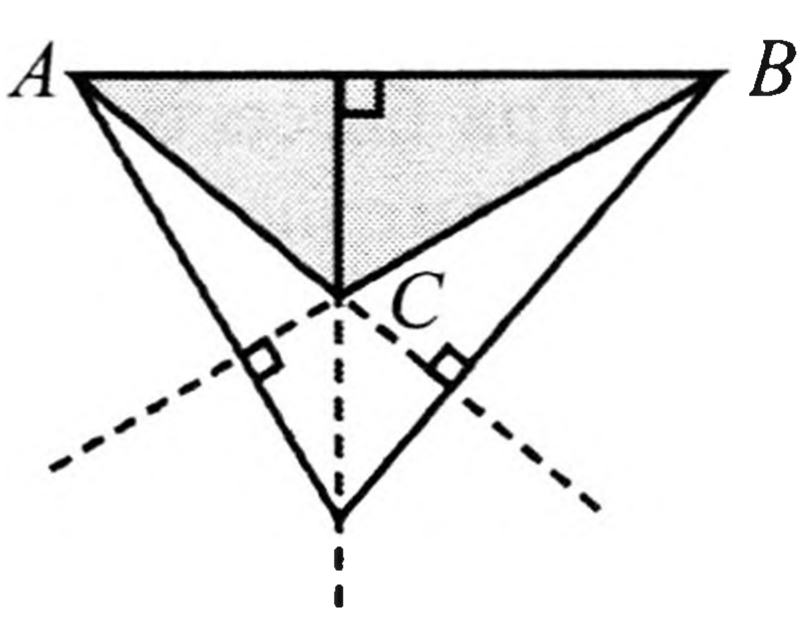
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.



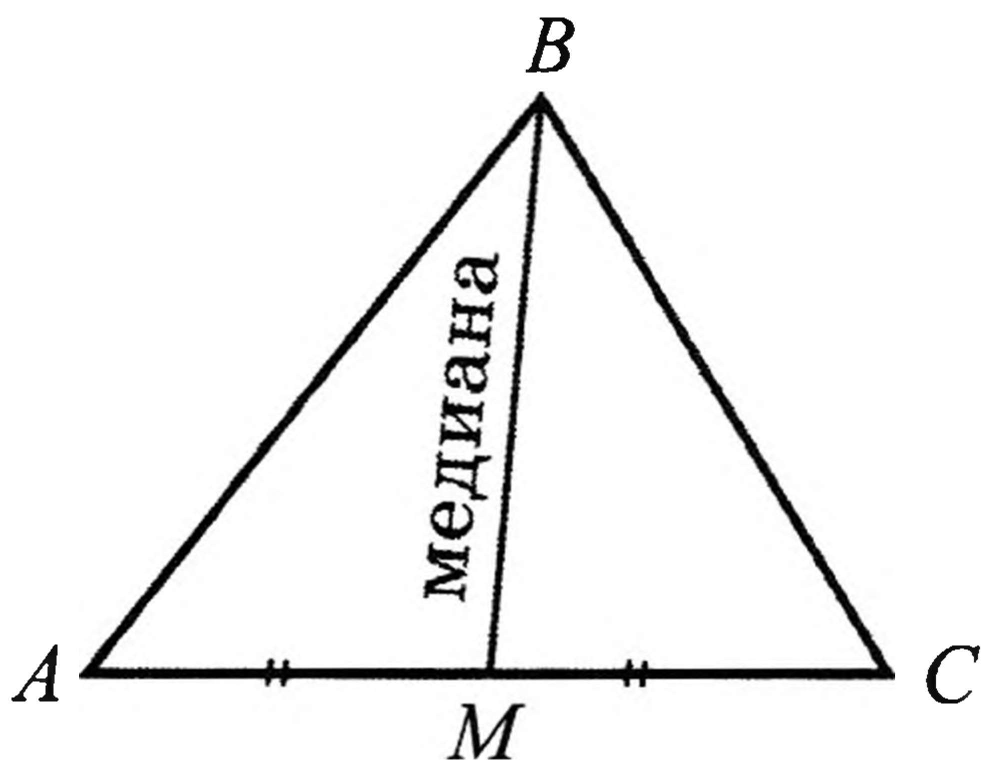
В тупоугольном треугольнике высота опускается на продолжение стороны.



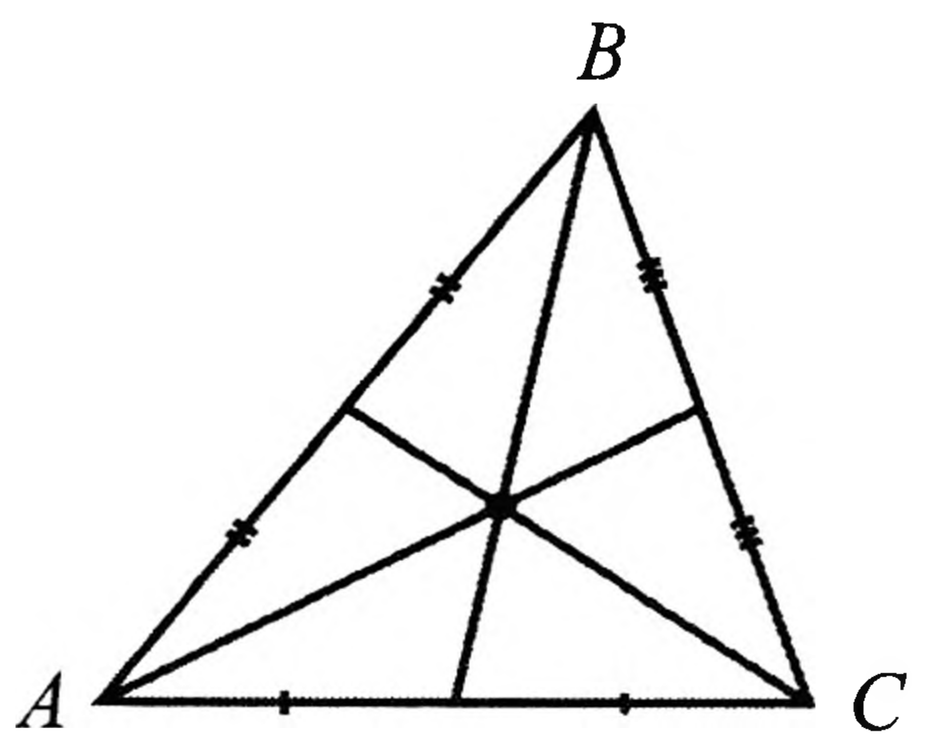
Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке.



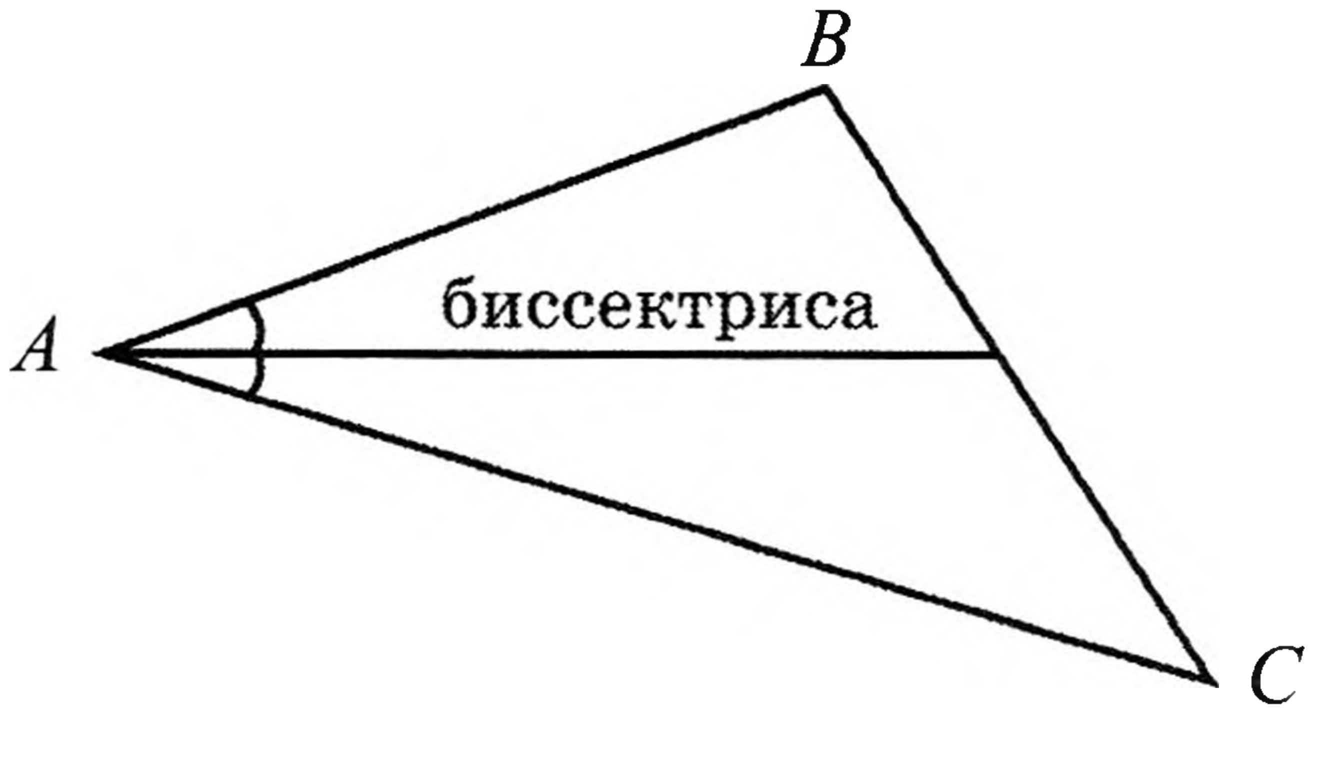
В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот.



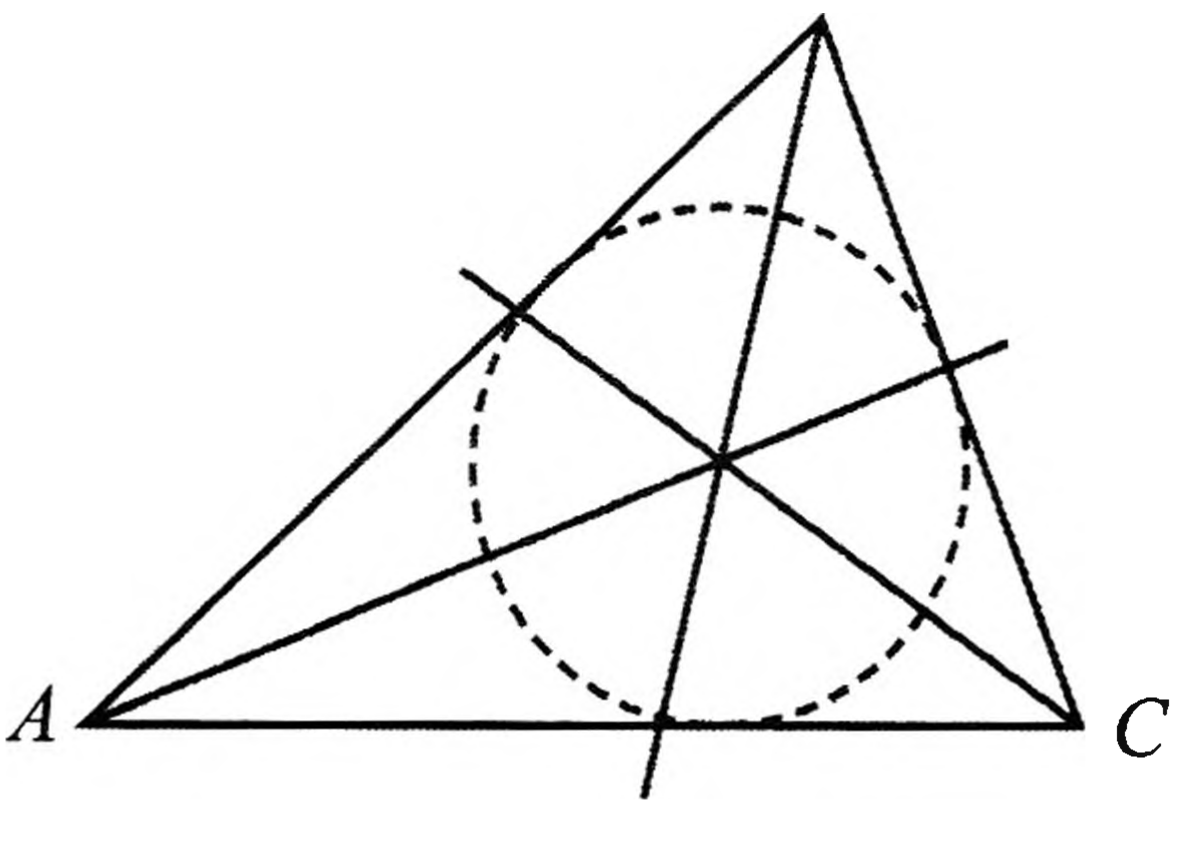
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

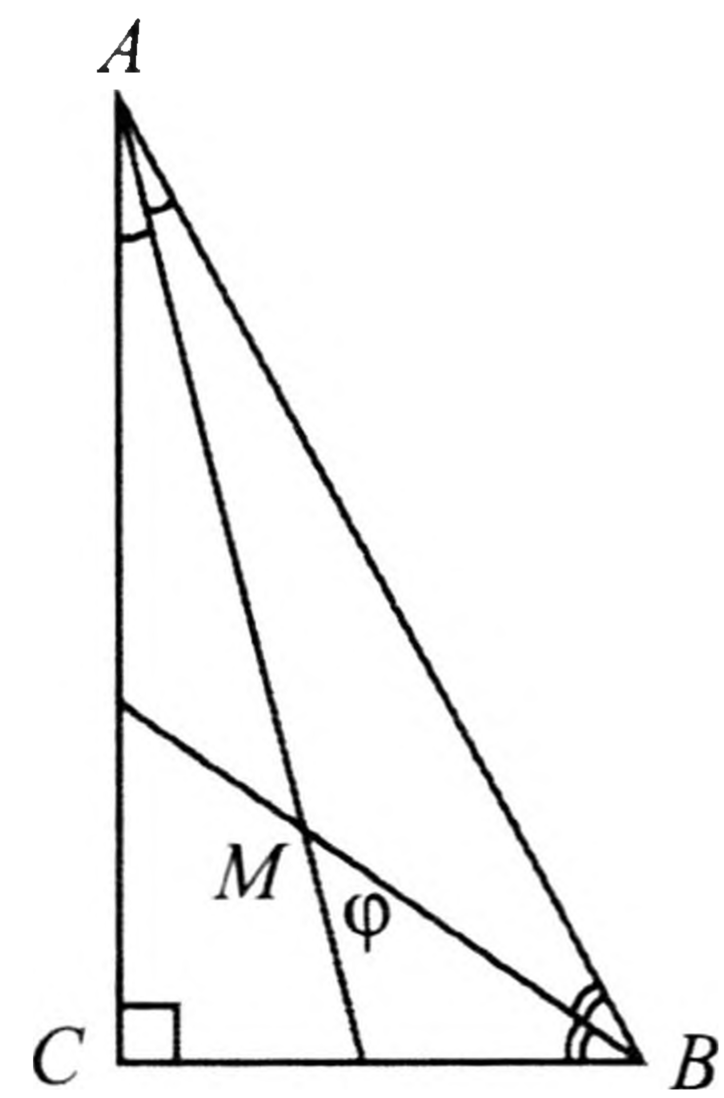


Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.



Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

6. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



Пусть биссектрисы треугольника ABC (в котором угол C равен $90°$) пересекаются в точке M.

Рассмотрим треугольник ABM.

$\angle MAB = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC$,

тогда $\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle ABM = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$.

Острый угол между биссектрисами на рисунке обозначен φ.

Угол φ смежный с углом AMB, следовательно,

$\varphi = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$.

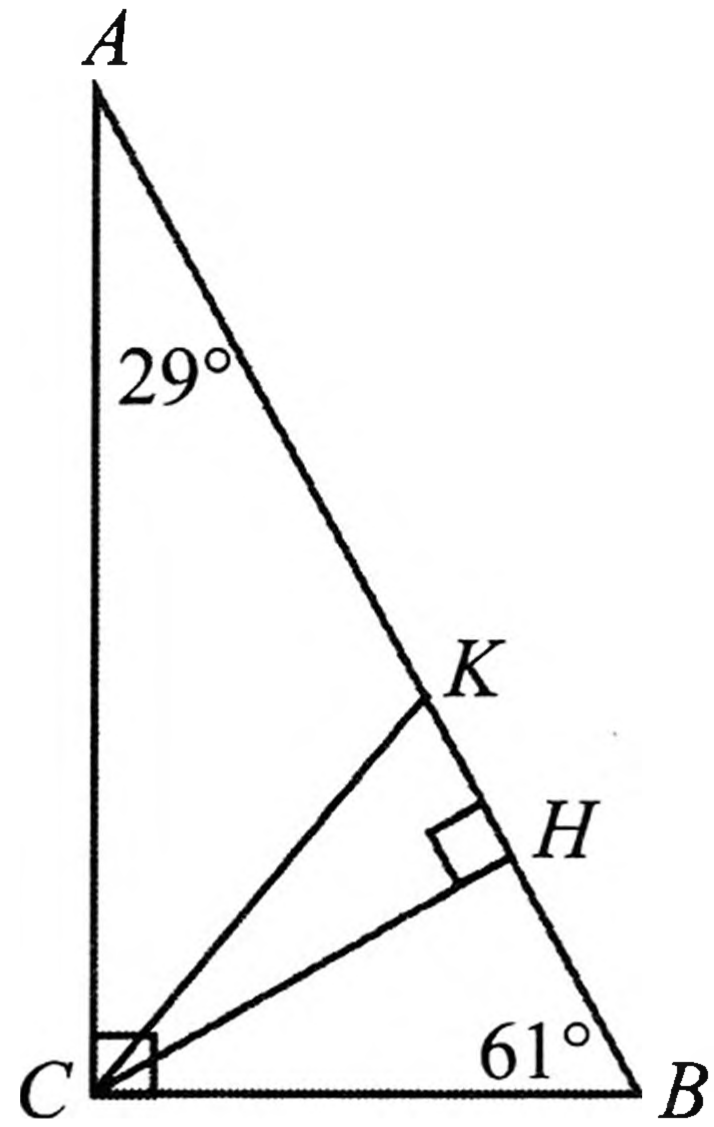
Поскольку треугольник ABC — прямоугольный,

то $\angle ABC + \angle BAC = 90°$.

Тогда $\varphi = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = 90° : 2 = 45°$.

Ответ: 45.

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Пусть CH — высота, проведенная из вершины прямого угла C, CK — биссектриса угла C.

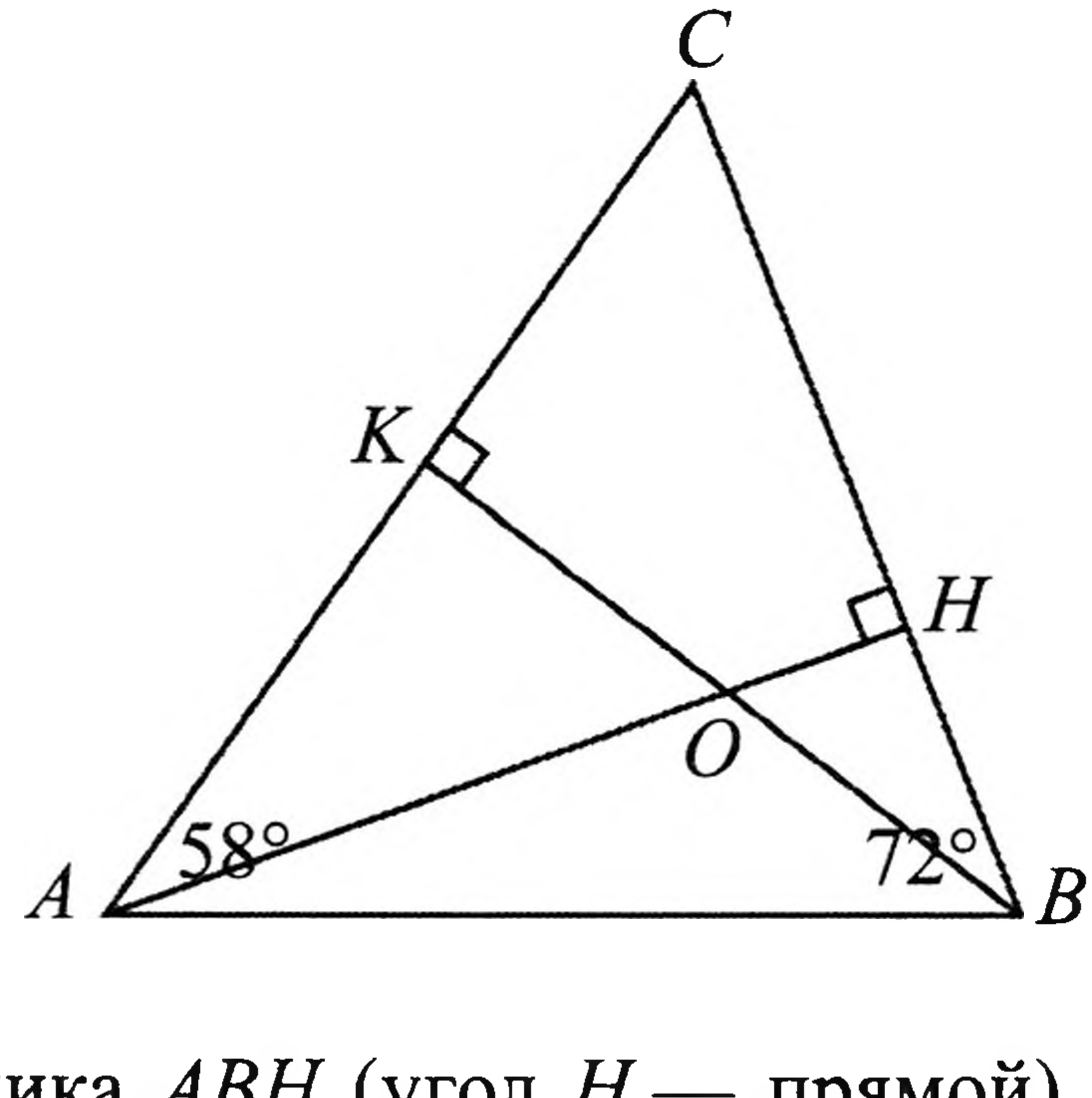
Тогда $\angle ACH = \angle ABC = 61°$, $\angle ACK = 90° : 2 = 45°$.

Угол между высотой и биссектрисой — это угол KCH.

$\angle KCH = \angle ACH - \angle ACK = 61° - 45° = 16°$.

Ответ: 16.

8. Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Из треугольника ABH (угол H — прямой) найдем угол BAH. Он равен 18°.

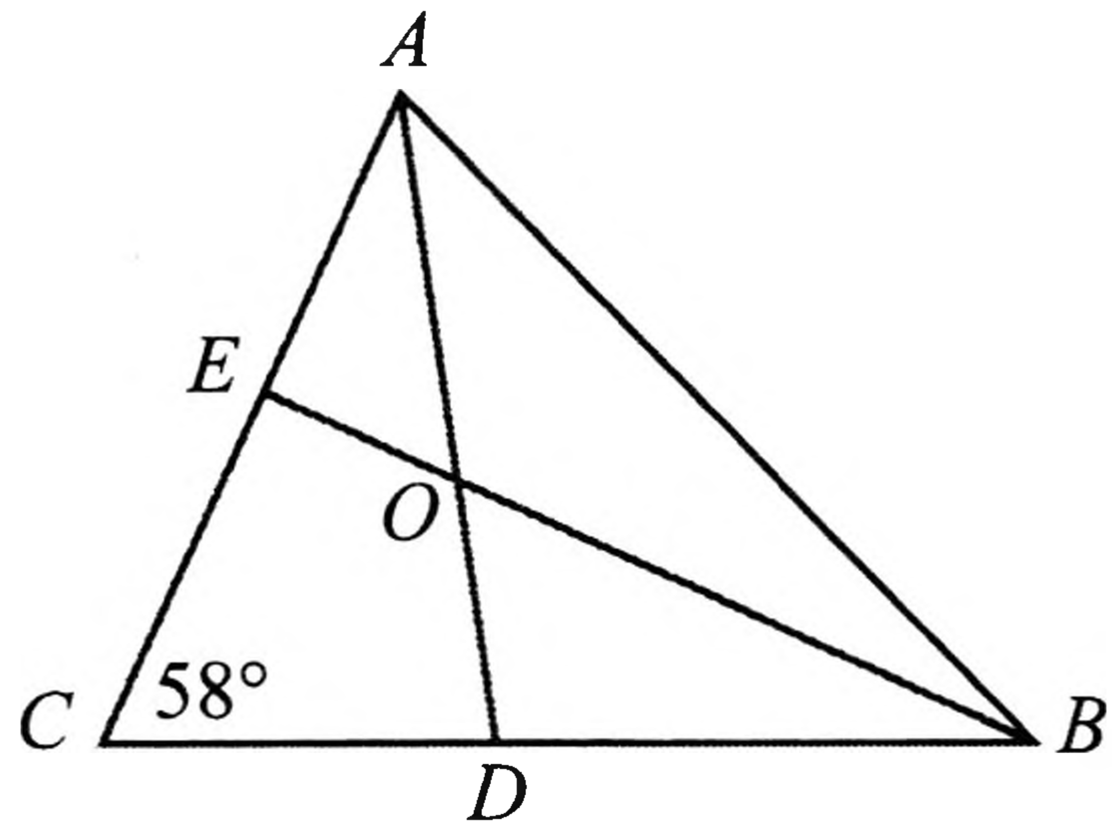
Из треугольника ABK (угол K — прямой) найдем угол ABK. Он равен 32°.

В треугольнике AOB известны два угла. Найдем третий, то есть угол AOB, который и является тупым углом между высотами треугольника ABC:

$$180° - 18° - 32° = 130°.$$

Ответ: 130.

9. В треугольнике ABC угол C равен 58°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен A, угол ABC равен B. Рассмотрим треугольник AOB.

$\angle OAB = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle B$,

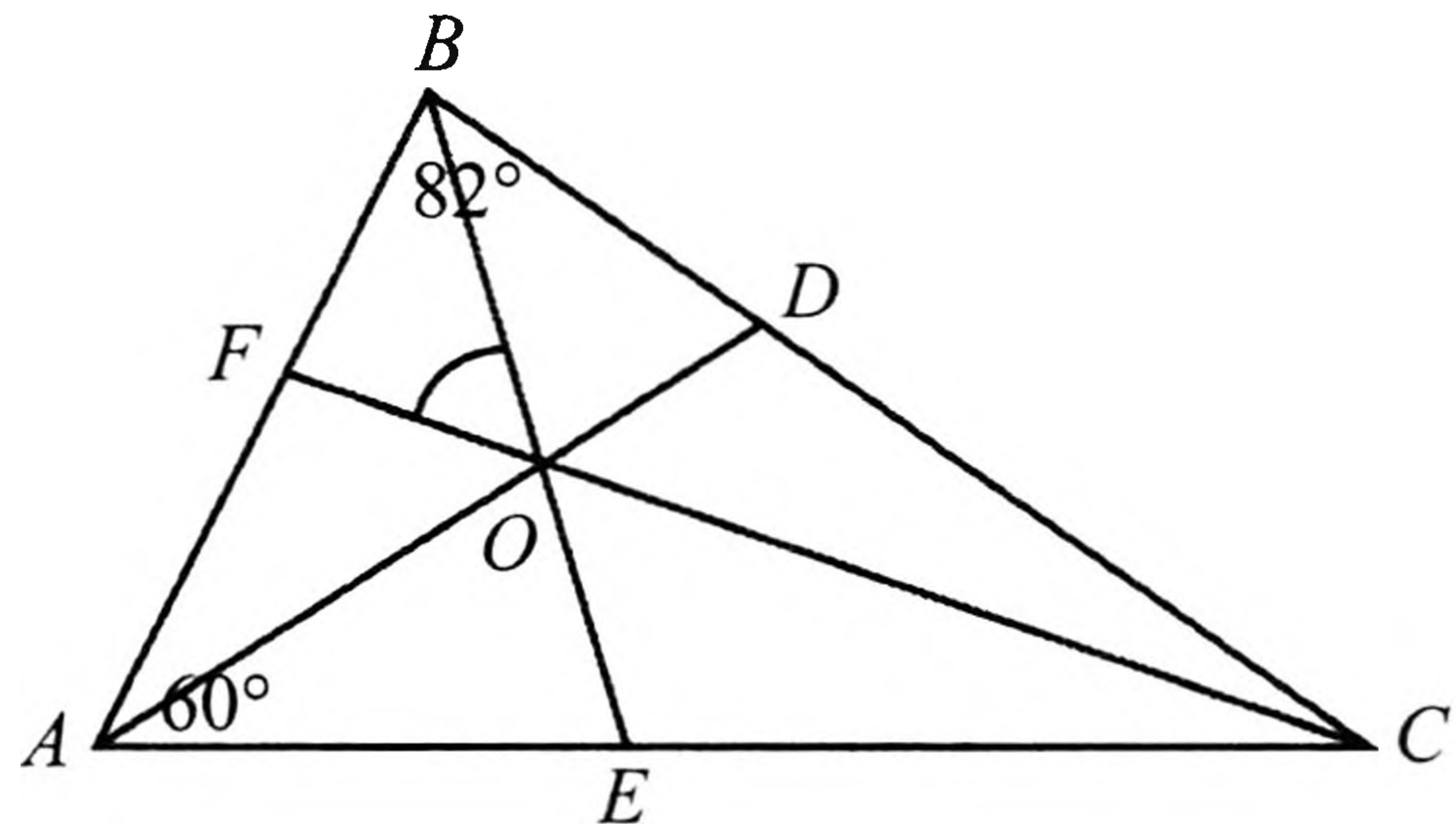
тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Из треугольника ABC получим, что $\angle A + \angle B = 180° - 58° = 122°$.

Тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - 61° = 119°$.

Ответ: 119.

10. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. AD, BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



Найдем угол ACB. Он равен 38°.

Тогда $\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACB = 19°$.

Из треугольника ACF найдем угол AFC. Он равен 101°. Рассмотрим треугольник AOF.

$\angle AFO = 101°$, $\angle FAO = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$.

Значит, $\angle AOF = 49°$.

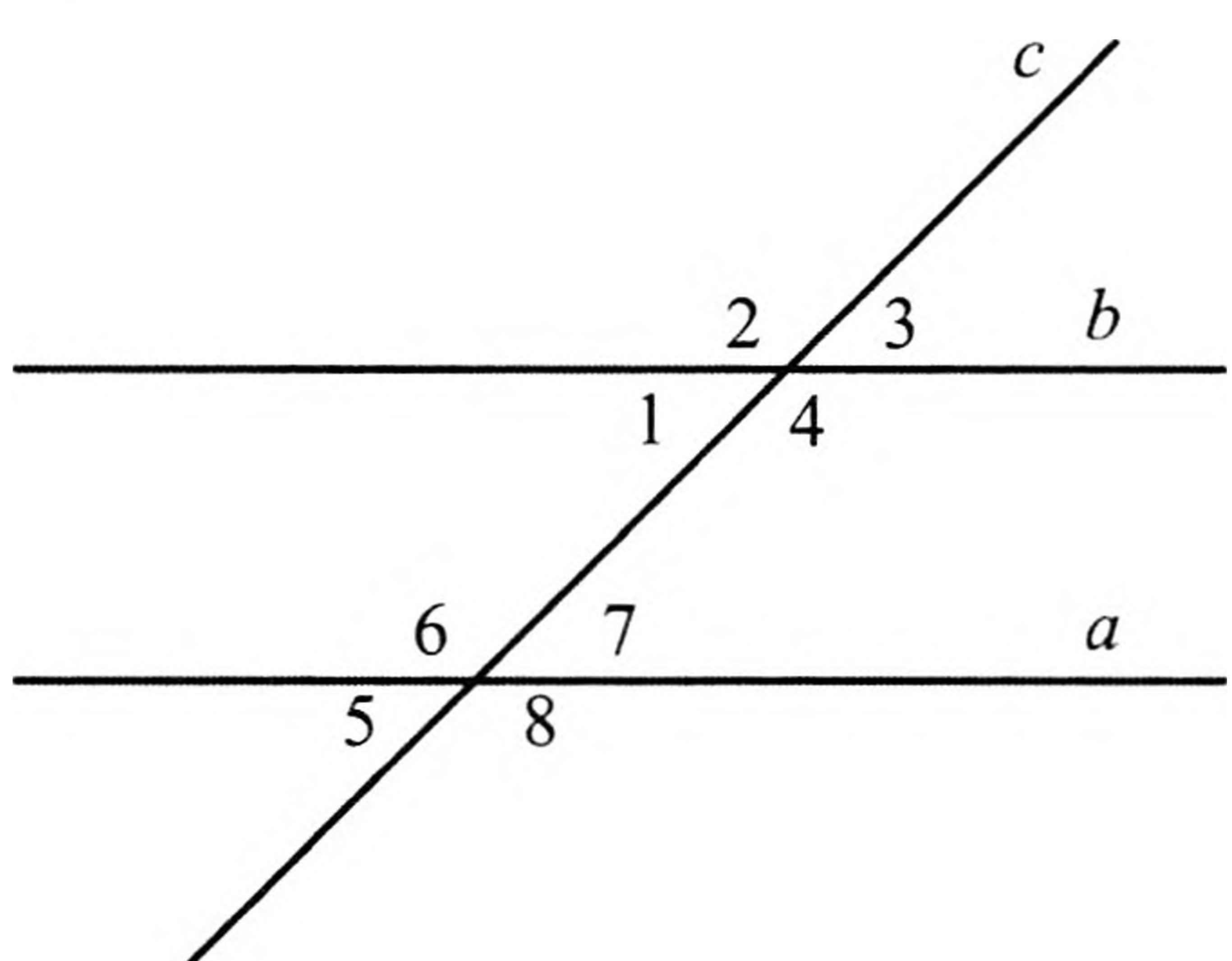
Ответ: 49.

Четырехугольники

Следующая тема — четырехугольники. Прежде чем к ней перейти, дадим несколько важных определений.

Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает их и называется секущей.

При этом образуется 8 углов. Они показаны на рисунке.



Углы 1 и 3 (а также 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8) называются **вертикальными**. **Вертикальные углы равны**, то есть

$$\angle 1 = \angle 3;$$
$$\angle 2 = \angle 4.$$

Углы 2 и 3 — смежные. Их сумма равна 180°.

Углы 2 и 6 (а также 3 и 7, 1 и 5, 4 и 8) называются **соответственными**. **Соответственные углы равны**, то есть

$$\angle 2 = \angle 6;$$
$$\angle 3 = \angle 7.$$

Углы 3 и 5 (а также 2 и 8, 1 и 7, 4 и 6) называют **накрест лежащими**. **Накрест лежащие углы равны**, то есть

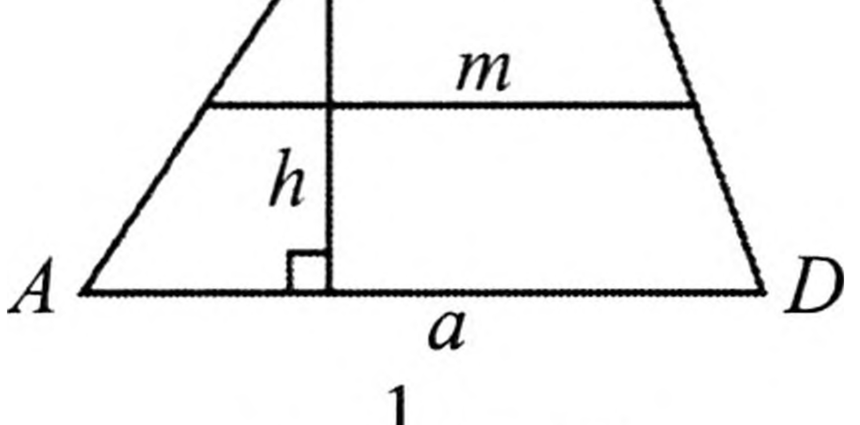
$$\angle 3 = \angle 5;$$
$$\angle 1 = \angle 7;$$
$$\angle 2 = \angle 8;$$
$$\angle 4 = \angle 6.$$

Наконец, углы 1 и 6 (а также 4 и 7) называют **односторонними**. Можно сказать, что односторонние углы лежат «по одну сторону от всей конструкции». **Сумма односторонних углов равна 180°**, то есть

$$\angle 1 + \angle 6 = 180°;$$
$$\angle 4 + \angle 7 = 180°.$$

Эти факты пригодятся нам, когда мы займемся задачами о четырехугольниках. Конечно, там их еще надо разглядеть. Зато, увидев на чертеже односторонние или накрест лежащие углы, вы сделаете один из шагов, из которых и состоит решение.

Чаще всего в задачах встречаются следующие виды четырехугольников:



$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

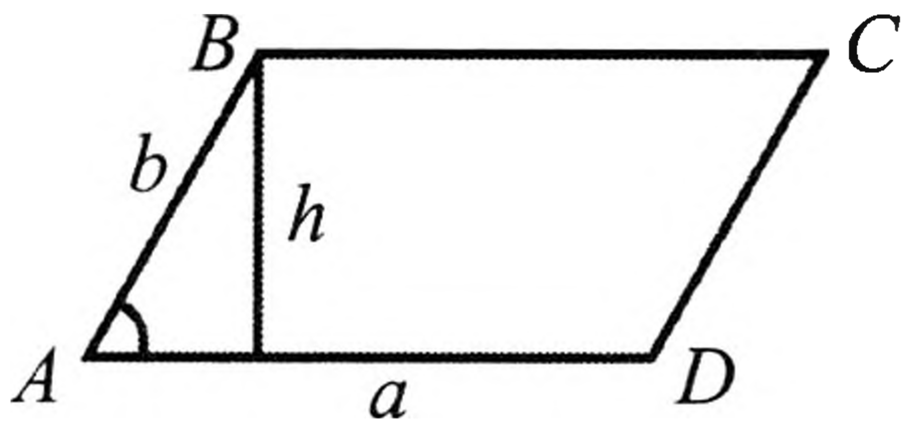
Трапеция — четырехугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются **основаниями** трапеции, две другие — **боковые стороны**.

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Средняя линия параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Площадь трапеции: $S = \frac{1}{2}(a+b)h.$



$AB = CD$, $BC = DA$,
$\angle A = \angle C$,
$\angle A + \angle D = 180°$.

Параллелограмм — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

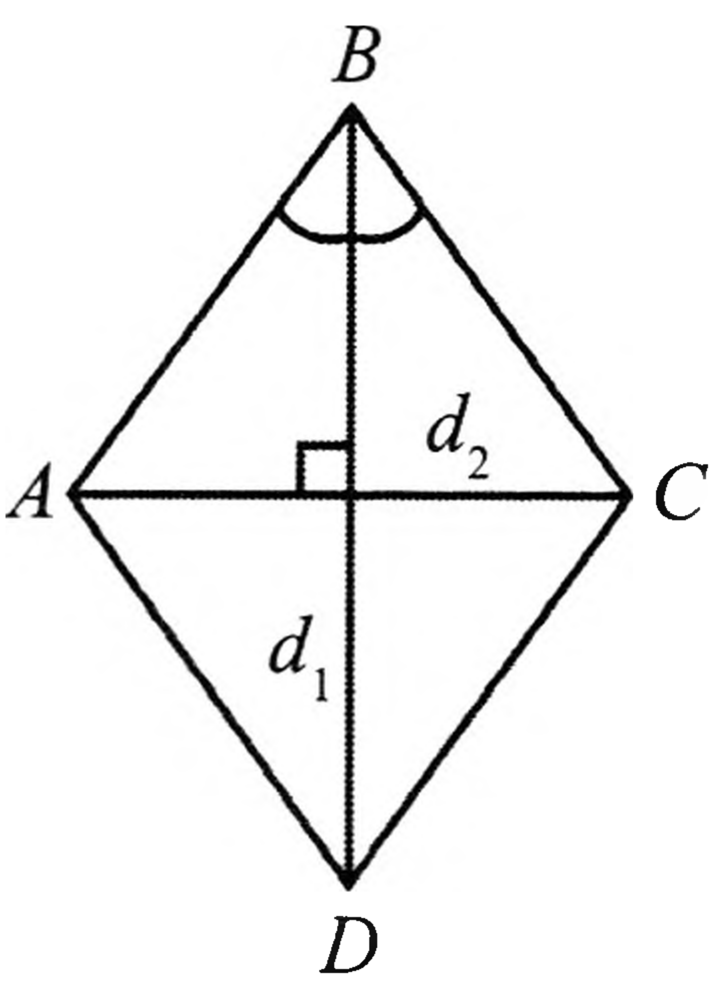
Противоположные углы параллелограмма равны.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Площадь параллелограмма:

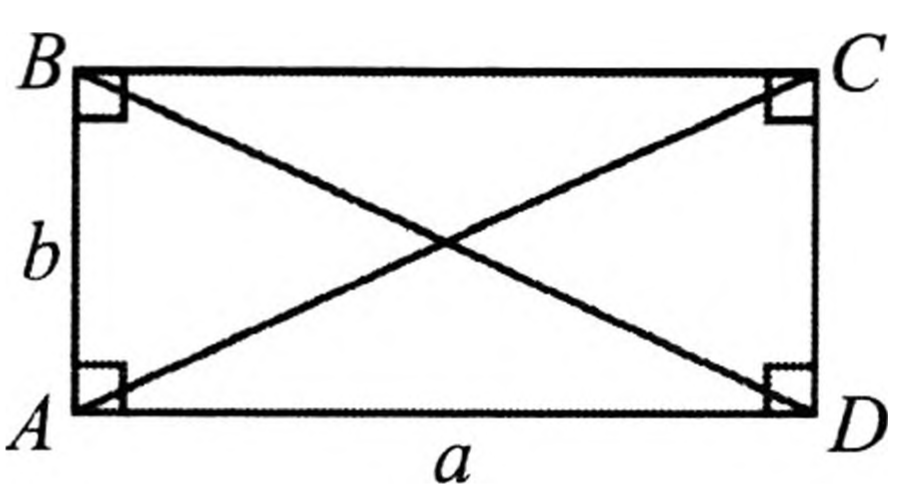
$$S = ab\sin\angle A = ah.$$



Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

Площадь ромба: $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2$.

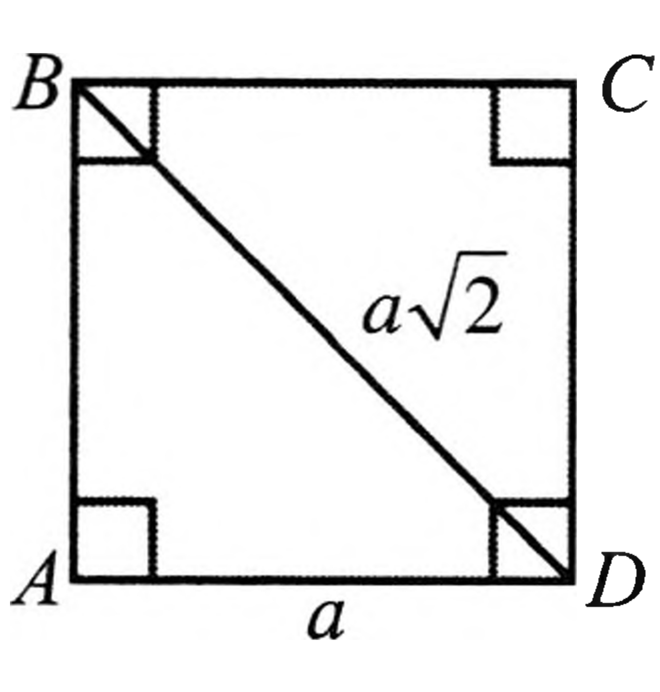


$AC = BD$

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

Площадь прямоугольника: $S = ab$.



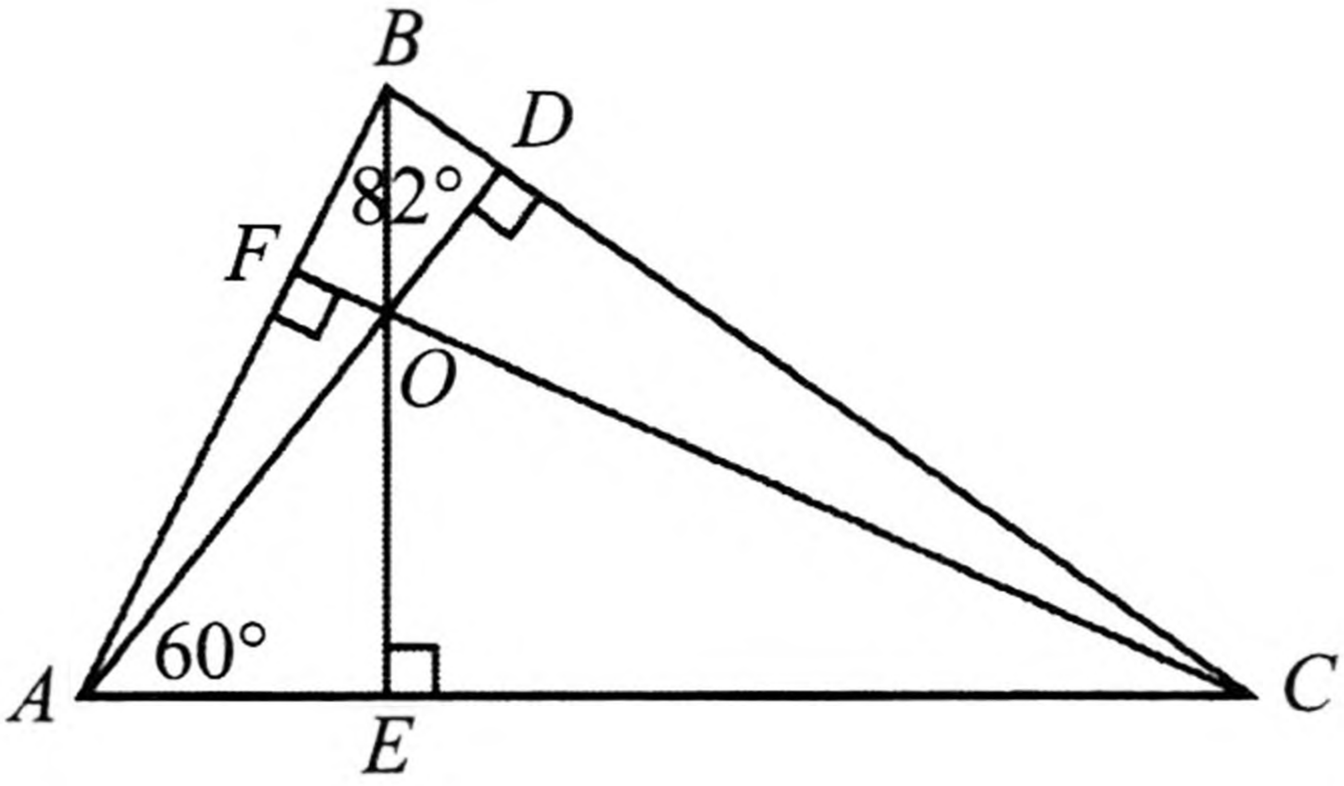
Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата: $S = a^2$.

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

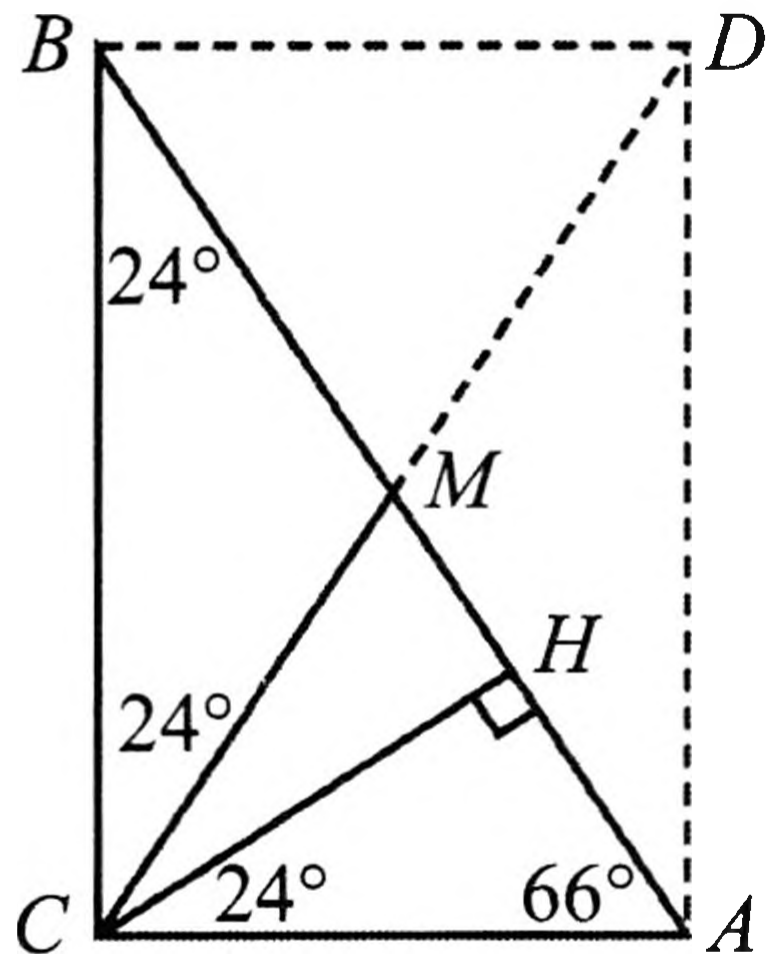
11. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. AD, BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



Рассмотрим четырехугольник $BFOD$. Углы F и D в нем — прямые, угол B равен 82°. Сумма углов любого четырехугольника равна 360°, следовательно, угол FOD равен 98°, а угол AOF — смежный с ним — равен 82°.

Ответ: 82.

12. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



По свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла, $\angle ACH = \angle ABC = 24°$.

Рассмотрим треугольник BMC. Как вы думаете, что можно сказать об отрезках BM и CM?

Внимание! Сейчас мы сформулируем и докажем теорему:

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

В самом деле, достроим треугольник ABC до прямоугольника $ACBD$.

Диагонали прямоугольника равны и делятся пополам в точке пересечения. Значит, $BM = CM$.

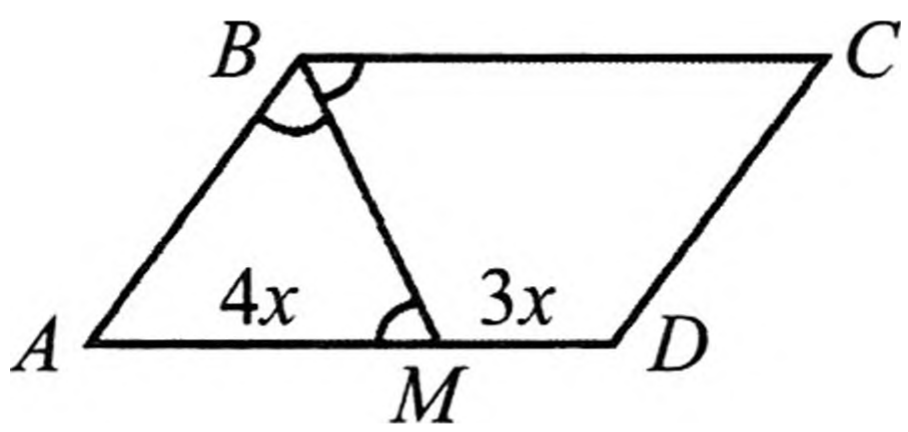
То, что мы только что сделали, — пример **математического доказательства.**

Итак, $BM = CM$, значит, треугольник BMC равнобедренный, и угол BCM равен 24°.

Тогда угол MCH (между медианой и высотой треугольника ABC) равен $90° - 24° - 24° = 42°$.

Ответ: 42.

13. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



Пусть BM — биссектриса тупого угла B. По условию, отрезки MD и AM равны $3x$ и $4x$ соответственно.

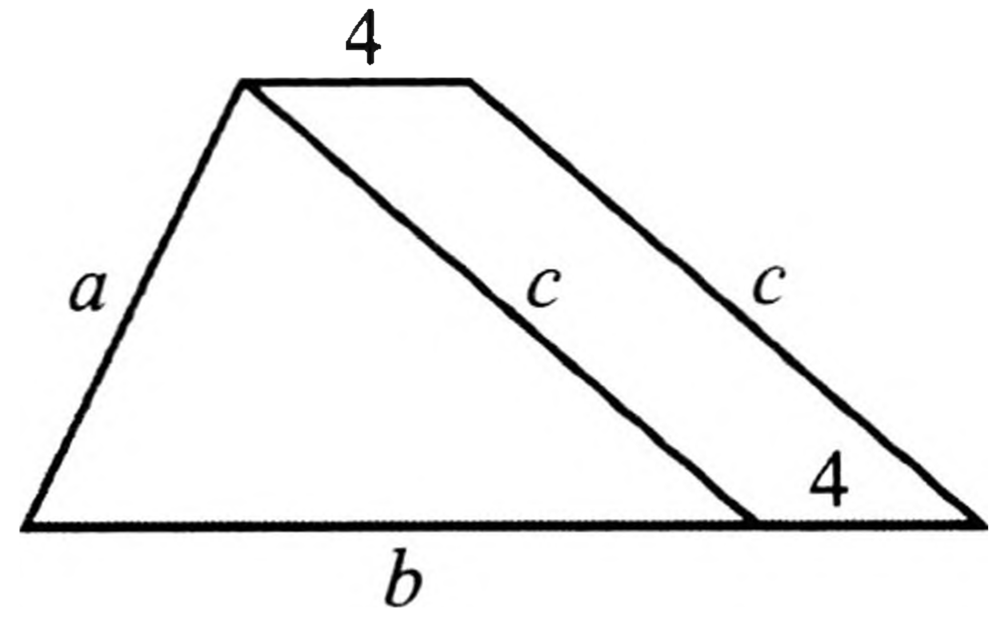
Рассмотрим углы CBM и BMA. Поскольку AD и BC параллельны, BM — секущая, углы CBM и BMA являются накрест лежащими. Мы знаем, что накрест лежащие углы равны. Значит, треугольник ABM — равнобедренный, следовательно, $AB = AM = 4x$. Периметр параллелограмма — это сумма всех его сторон, то есть

$7x + 7x + 4x + 4x = 88.$

Отсюда $x = 4$, $7x = 28$.

Ответ: 28.

14. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



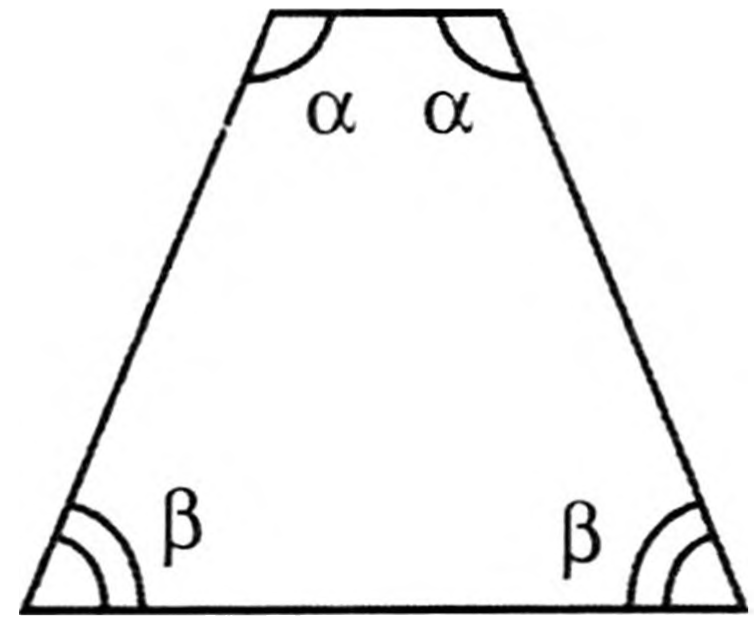
Это легкая задача — все сразу видно на чертеже.

Пусть стороны треугольника, о котором говорится в условии, равны a, b и c. Тогда периметр трапеции равен $a + b + 4 + c + 4 = a + b + c + 8 = 15 + 8 = 23$.

Мы воспользовались тем, что противоположные стороны параллелограмма равны.

Ответ: 23.

15. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 50°? Ответ дайте в градусах.



Напомним, что **равнобедренной** (или равнобокой) называется трапеция, у которой боковые стороны равны. Следовательно, равны углы при верхнем основании, а также углы при нижнем основании.

Давайте посмотрим на чертеж. По условию, $\alpha - \beta = 50°$, то есть $\alpha = \beta + 50°$.

Углы α и β — односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно, $\alpha + \beta = 180°$.

Итак, $2\beta + 50° = 180°$; $\beta = 65°$, тогда $\alpha = 115°$.

Ответ: 115.

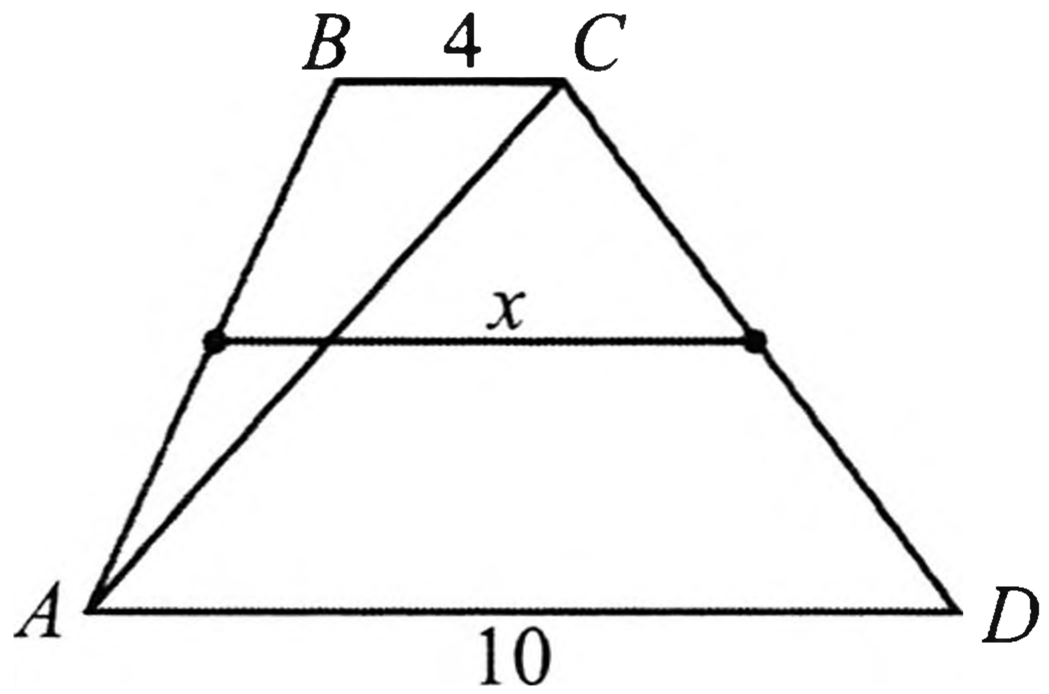
16. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

Один из подходов к решению задач по геометрии — **метод площадей**. Он состоит в том, что площадь фигуры выражается двумя разными способами, а затем из полученного уравнения находится неизвестная величина. Пусть a — сторона ромба. Тогда

$$S = a^2 \sin 60° = ah;\ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}h.$$

Отсюда $h = \dfrac{3}{2} = 1{,}5.$

17. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

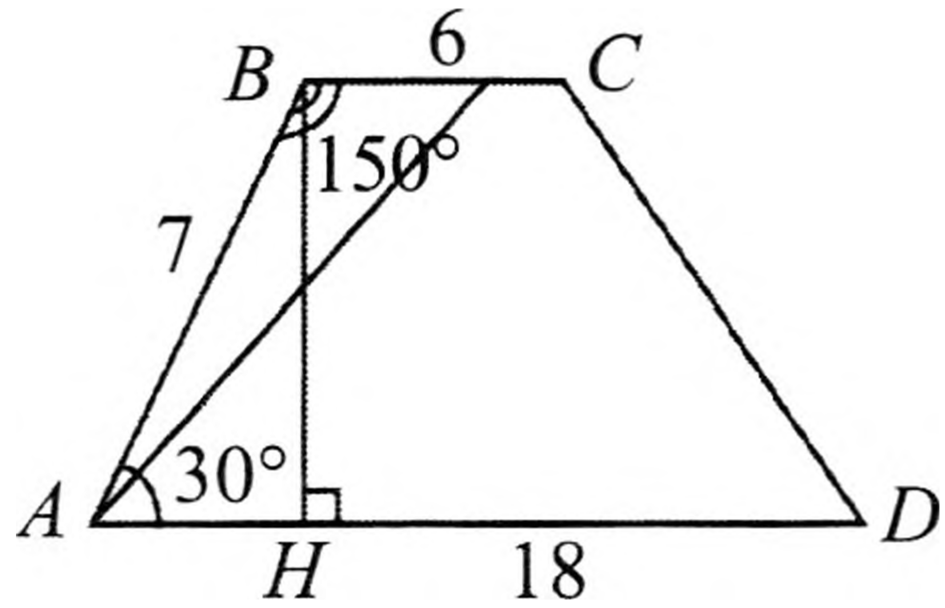


Скажите, что вы видите на чертеже? Можно сказать, что изображена трапеция $ABCD$, и в ней проведена средняя линия. А можно увидеть и другое — два треугольника, ABC и ACD, в которых проведены средние линии. Дальше все просто.

Средняя линия треугольника равна половине основания, значит, $x = \dfrac{1}{2}AD = 5.$

Ответ: 5

18. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.



По формуле площади трапеции, $S = \frac{a+b}{2}h$. Основания есть, осталось найти высоту. Углы A и B — односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно,

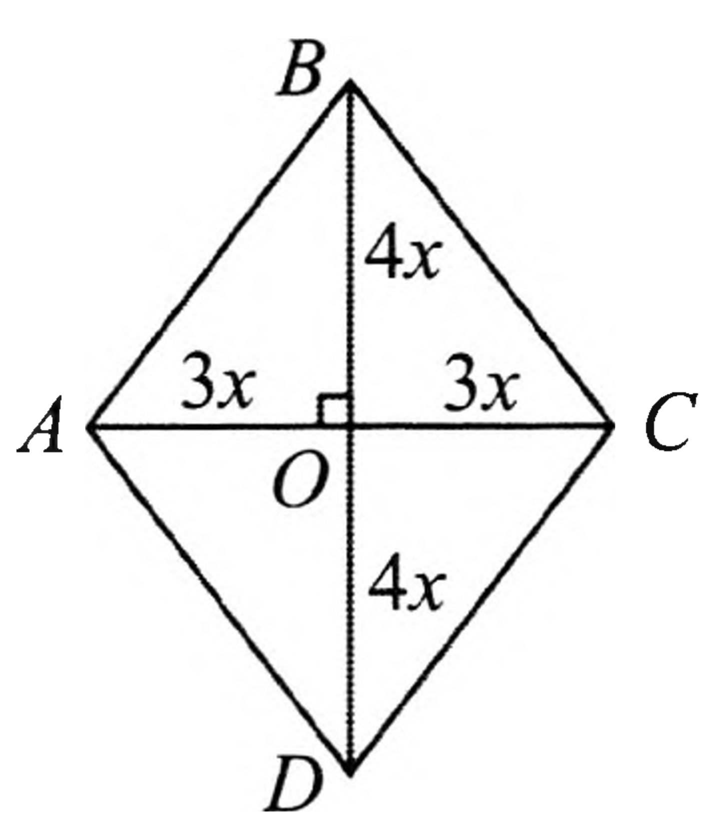
$\angle A = 180° - \angle B = 30°$. Проведем высоту BH. Найдем длину отрезка BH из прямоугольного треугольника ABH.

$$BH = AB \cdot \sin 30° = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна $\frac{6+18}{2} \cdot \frac{7}{2} = 42.$

Ответ: 42.

19. Диагонали ромба относятся как 3:4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



Пусть диагонали ромба равны $6x$ и $8x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB.

По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

$AB^2 = 9x^2 + 16x^2$, $AB^2 = 25x^2$.

Отсюда $AB = 5x$.

Поскольку периметр равен 200, $5x \cdot 4 = 200$; $x = 10$, $AB = 50$, а диагонали ромба равны 60 и 80.

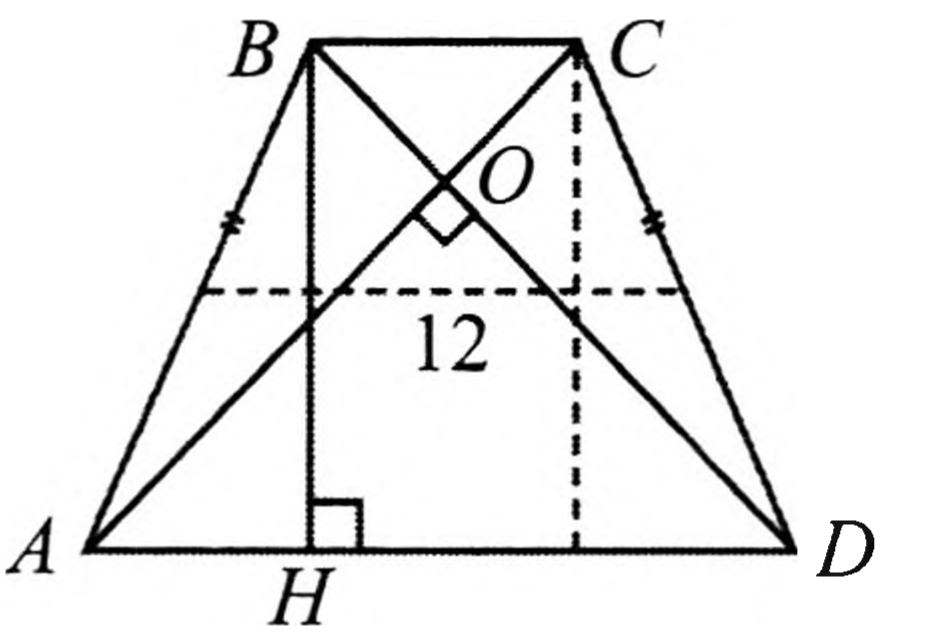
Нам надо найти высоту ромба.

Давайте применим метод площадей. С одной стороны, $S = ah$. С другой стороны, площадь ромба складывается из площадей двух равных треугольников ABC и ADC, то есть равна $60 \cdot 40 = 2400$.

Отсюда $h = \dfrac{S}{a} = \dfrac{2400}{50} = 48.$

Ответ: 48.

20. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



На первый взгляд кажется, что данных не хватает. Основания трапеции не даны, только высота. Но на самом деле задача составлена корректно. Ведь мы знаем, что трапеция равнобедренная и ее диагонали перпендикулярны.

Отметьте на чертеже все углы, какие можно найти. Рассмотрите треугольники AOD и BHD.

Треугольник AOD — прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle OAD = \angle ODA = 45°$.

Значит, треугольник BHD — тоже прямоугольный и равнобедренный.

Отсюда $BH = HD = 12$.

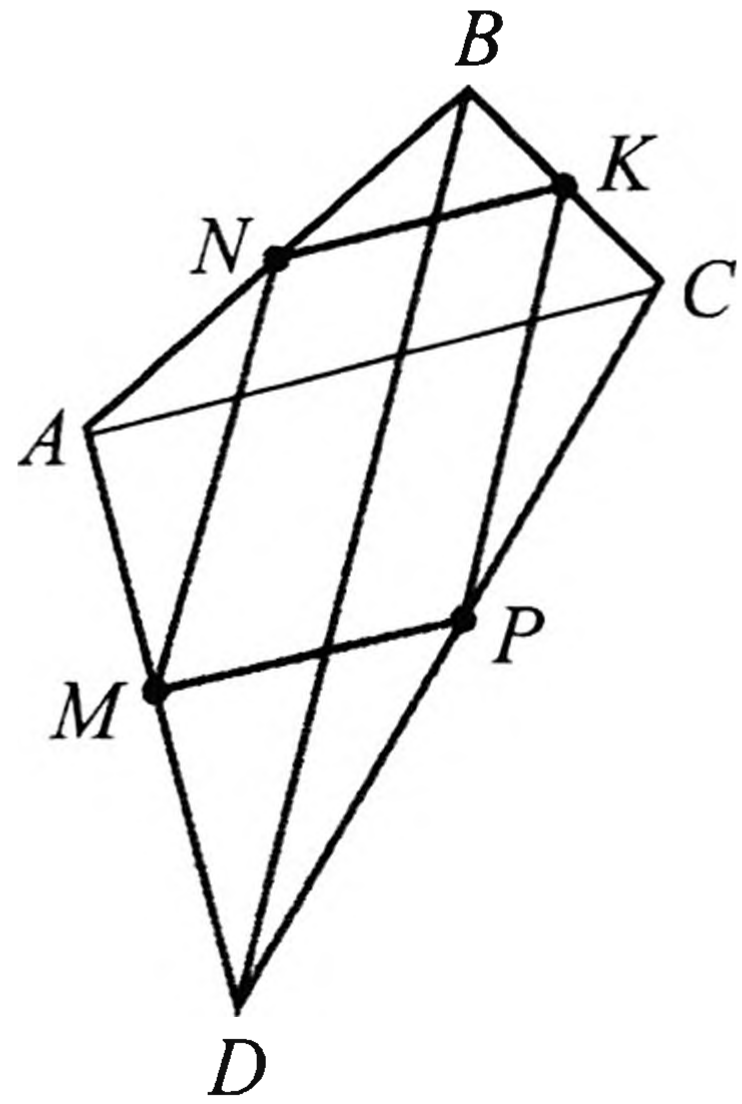
Выразим отрезок HD через основания трапеции AD и BC.

$$HD = AD - AH = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

Замечательно! Оказывается, отрезок HD равен средней линии трапеции!

Ответ: 12.

21. Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



Обратите внимание, что в условии не сказано, какой это четырехугольник. Мы не будем рисовать его красивее, чем он есть. Пусть это будет произвольный четырехугольник — все стороны разные, углы тоже все разные.

Пусть $AC = 4$, $BD = 5$. Отметим середины сторон, соединим их по порядку и посмотрим, что получилось.

Очень интересно. Похоже, четырехугольник $MNKP$ — параллелограмм. Докажите это. Постарайтесь найти на чертеже треугольники, в которых проведены средние линии. Воспользуйтесь свойством противоположных сторон параллелограмма.

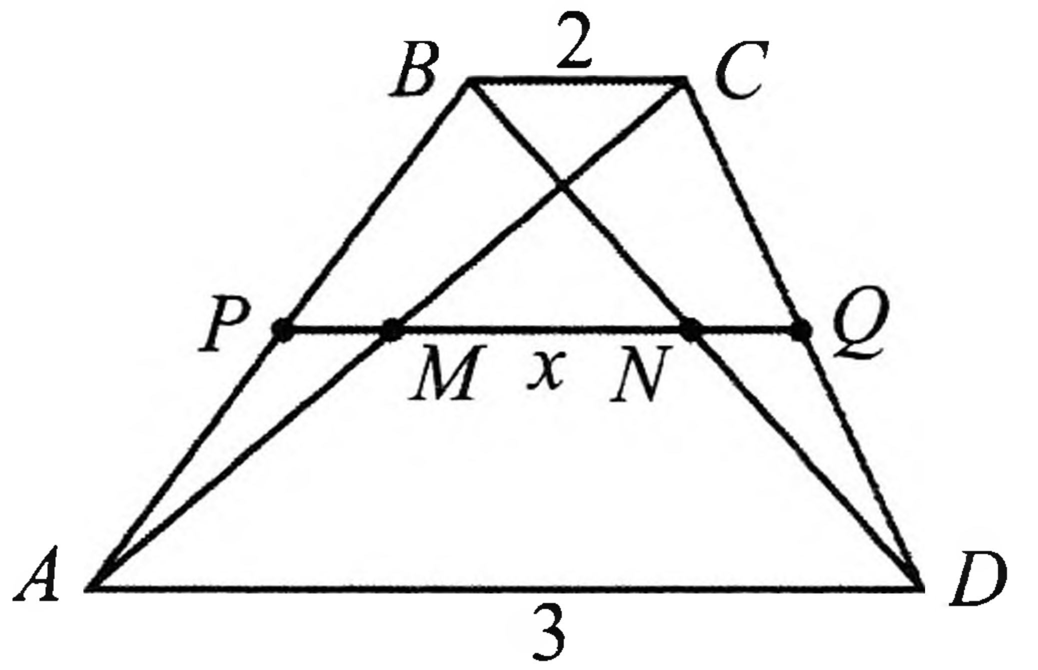
Рассмотрим треугольник ABD. В нем NM — средняя линия. Она параллельна BD и равна половине BD, то есть 2,5. Тогда KP — средняя линия треугольника BDC. Она тоже параллельна BD и равна половине BD, то есть 2,5. Аналогично, NK и MP параллельны AC,

$$NK = MP = \frac{1}{2}AC = 2.$$

Противоположные стороны четырехугольника $MNKP$ попарно параллельны. Значит, $MNKP$ — параллелограмм. Его периметр равен сумме всех сторон, то есть 9.

Ответ: 9.

22. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ — среднюю линию трапеции, $PQ = 2{,}5$. Легко доказать, что отрезок MN, соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии. Дальше все просто. Сумеете продолжить решение?

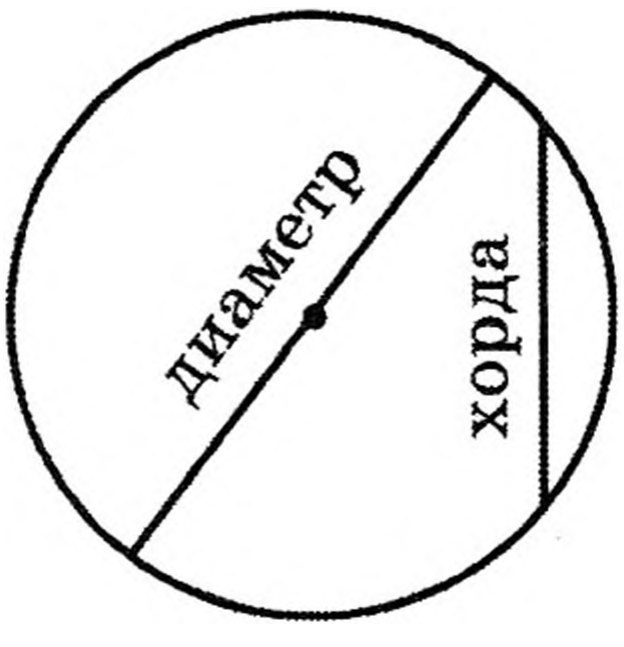
PM — средняя линия треугольника ABC, значит, $PM = 1$.

NQ — средняя линия треугольника BCD, значит, $NQ = 1$.

Тогда $MN = PQ - PM - NQ = 2{,}5 - 1 - 1 = 0{,}5$

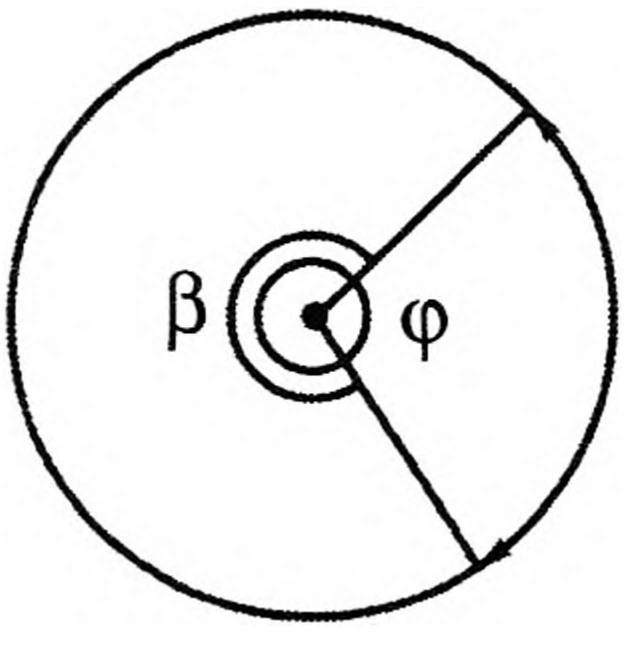
Ответ: 0,5.

Задачи по теме «Окружность»

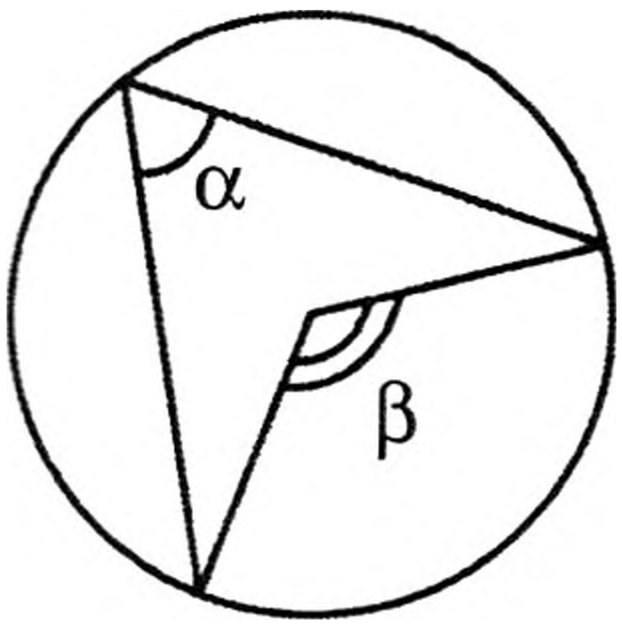


Отрезок, соединяющий две точки на окружности, называется **хорда**.

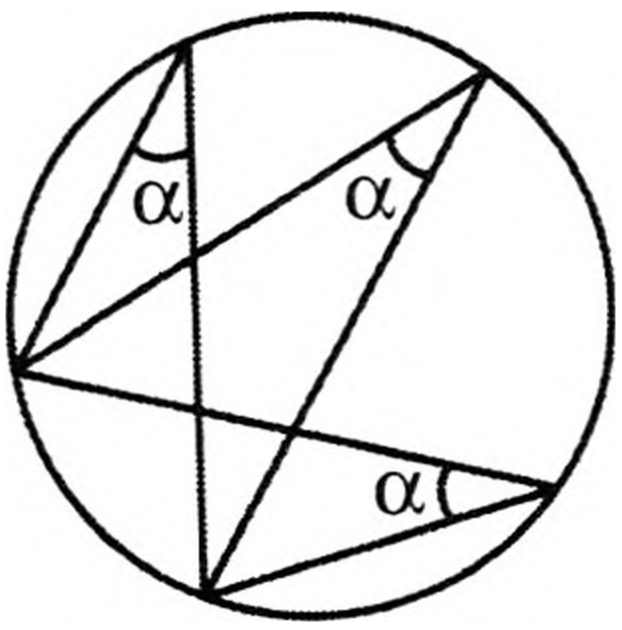
Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется **диаметр**.



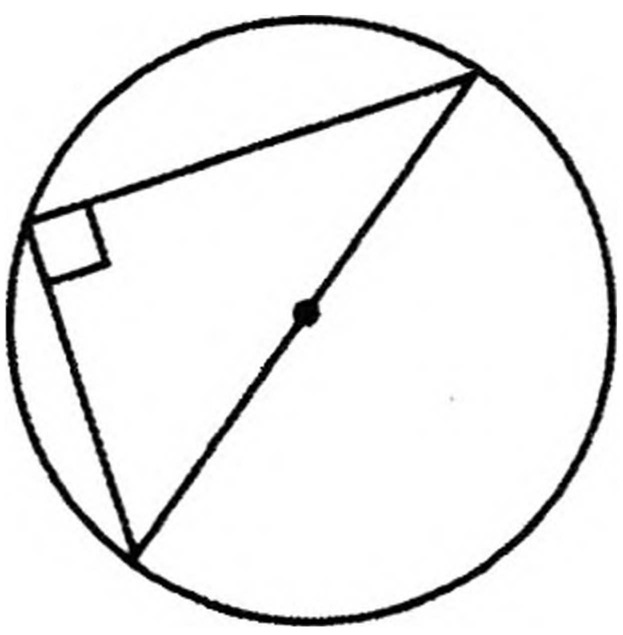
Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральным**. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Угол β тоже называется центральным. Только он опирается на дугу, которая больше 180°.



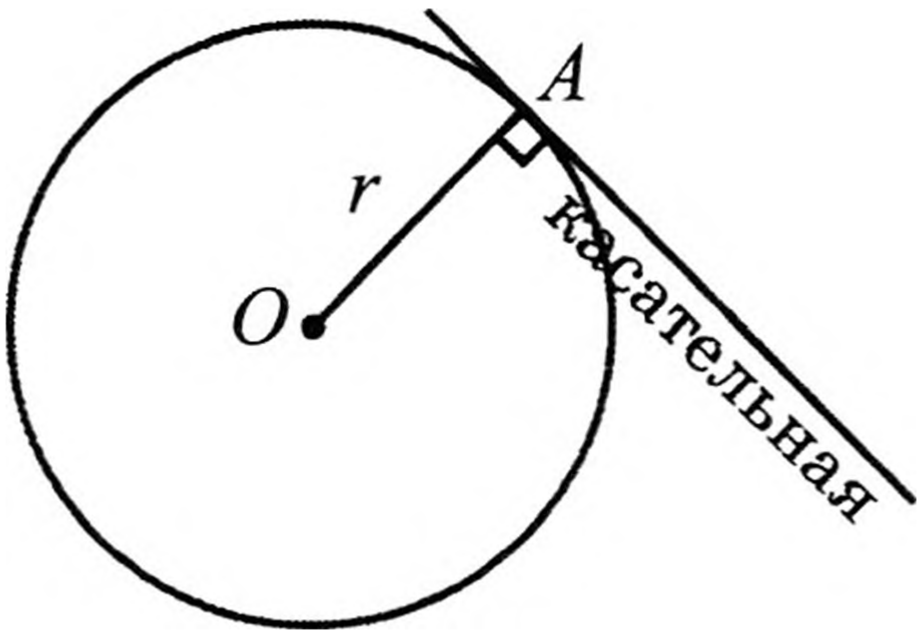
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным**. Величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, $\alpha = \frac{\beta}{2}$.



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

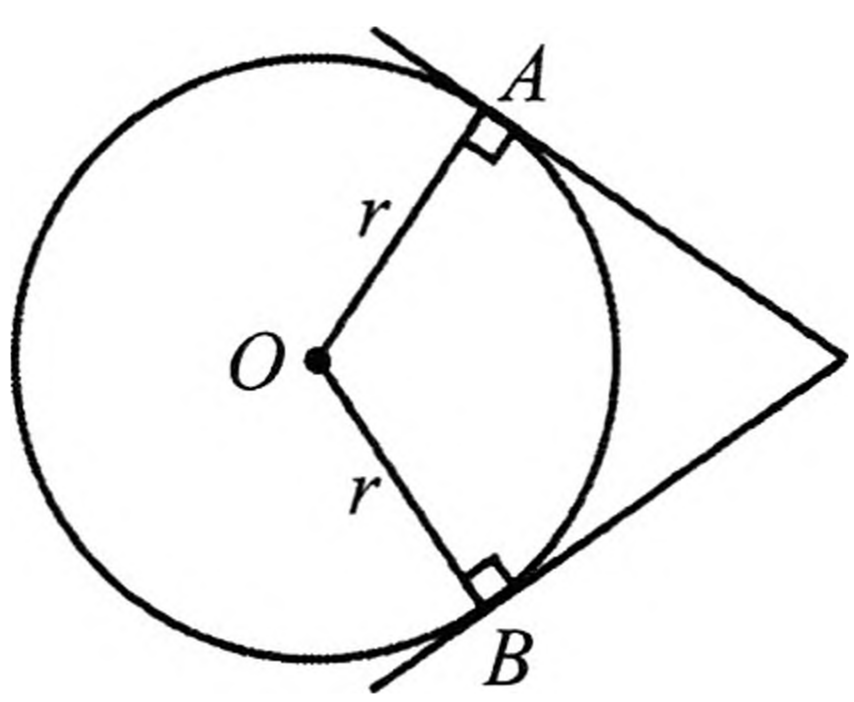


Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

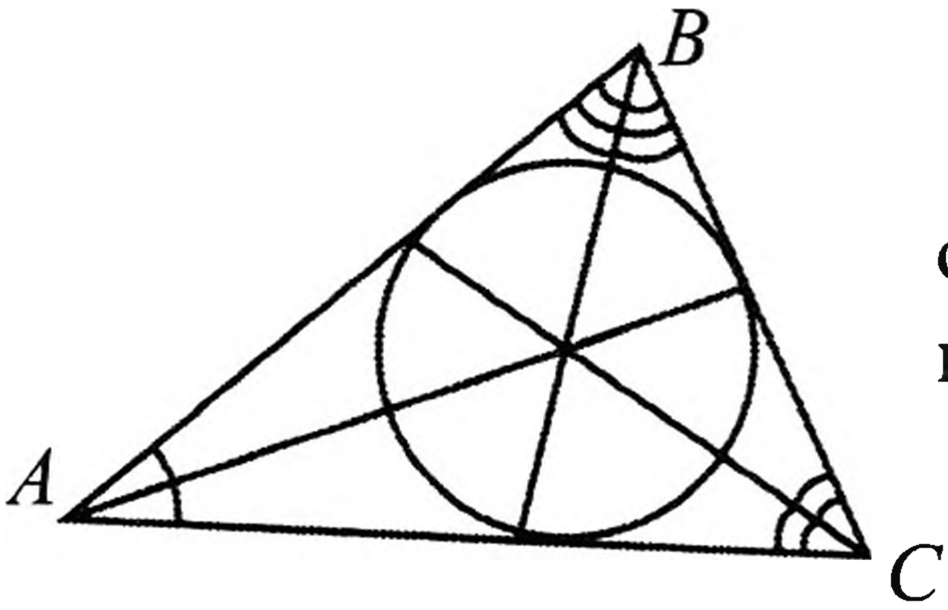


Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**.

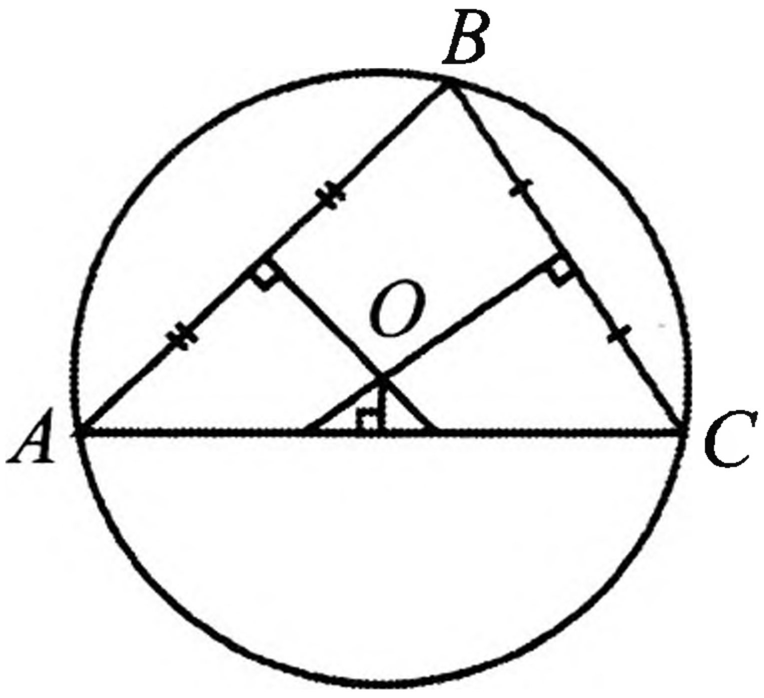
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.



Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны.

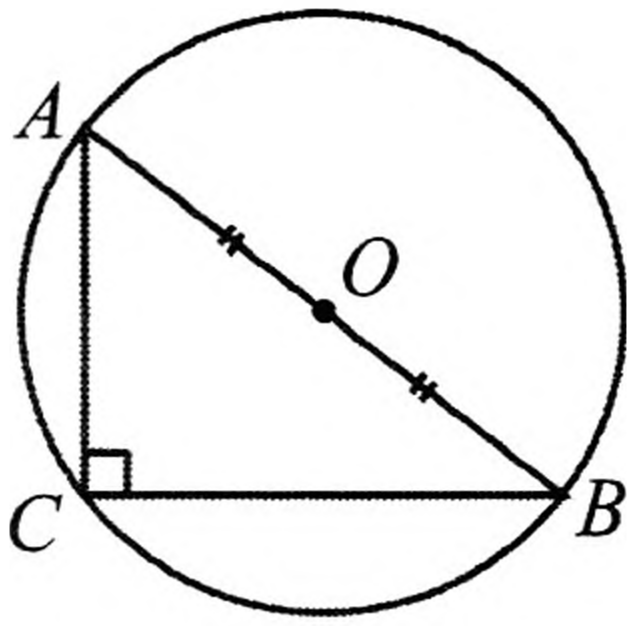


В любой треугольник можно **вписать** окружность. Ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

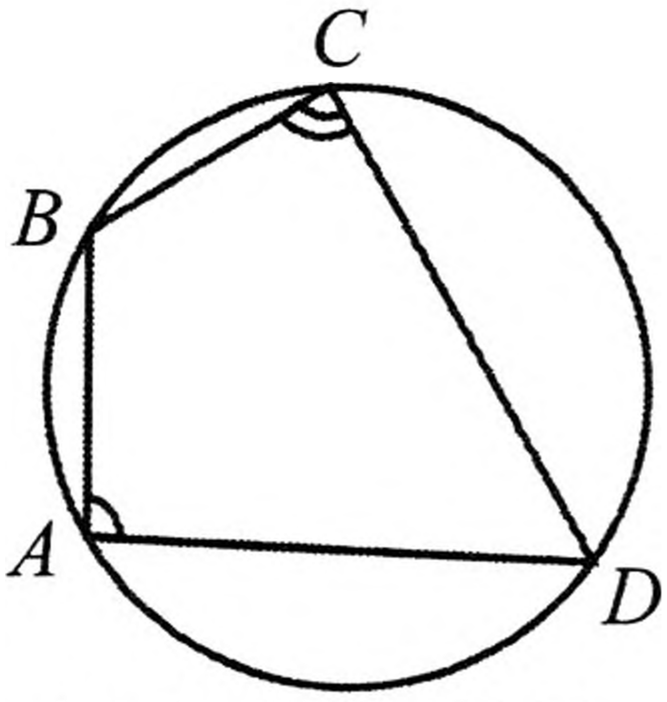


Вокруг любого треугольника можно **описать** окружность. Ее центр — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Иногда говорят еще, что окружность описана *около* треугольника. Это означает то же самое — все вершины треугольника лежат на окружности.

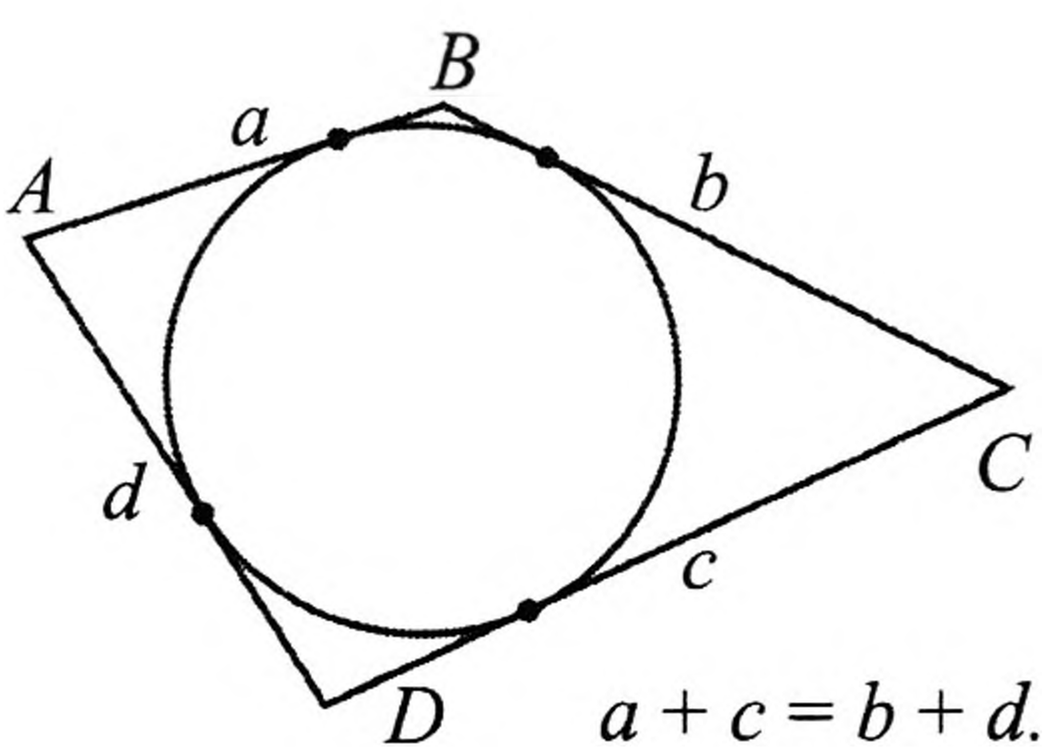


У прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.



$\angle A + \angle C = 180°$

Четырехугольник можно **вписать** в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°.



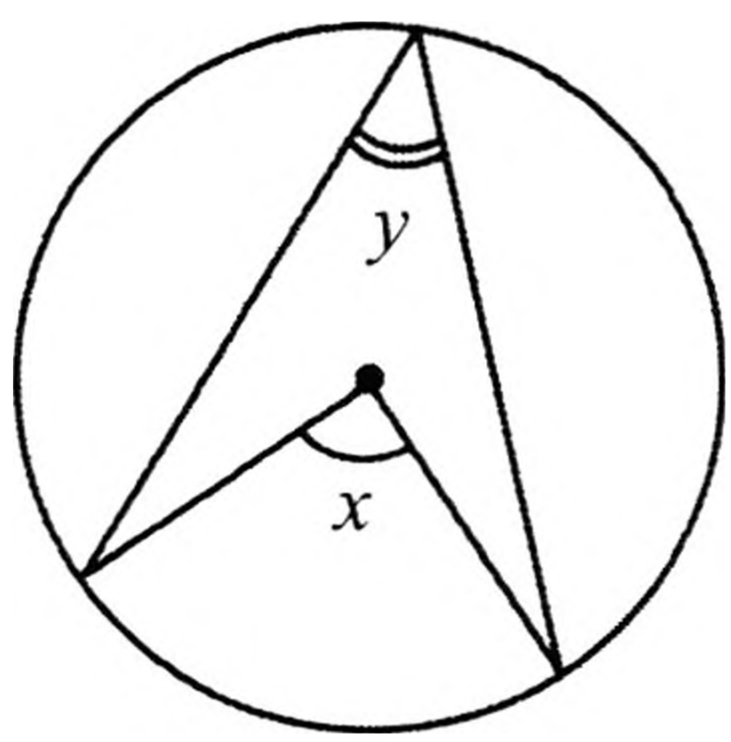
$a + c = b + d.$

Четырехугольник можно **описать** вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

1. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности? Ответ дайте в градусах.

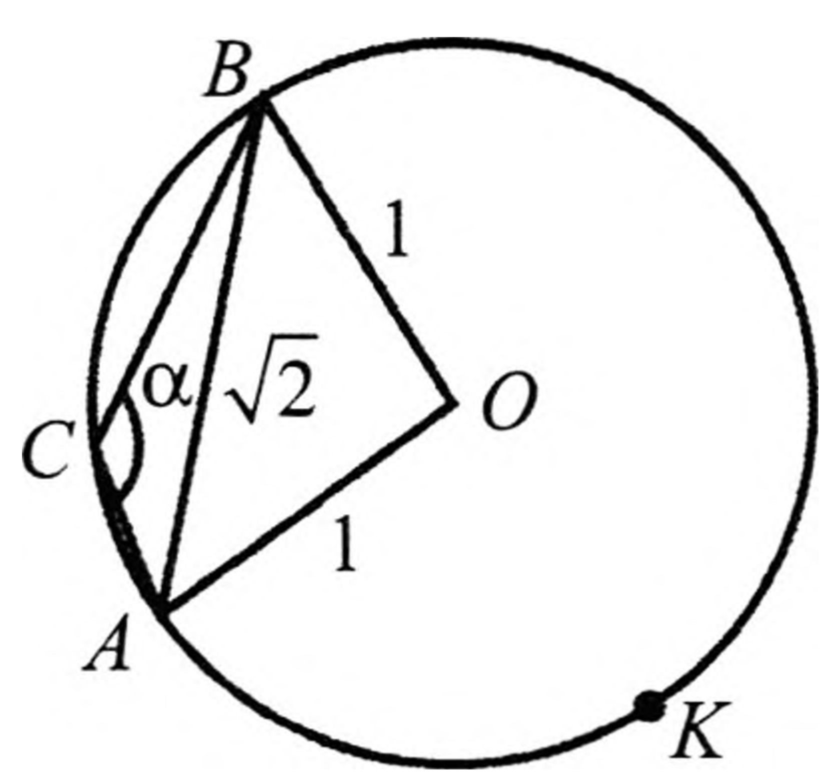
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.
Ответ: 90.

2. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Пусть центральный угол равен x, а вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, равен y. Мы знаем, что $x = 2y$. Отсюда $2y = 36 + y$, $y = 36$.
Ответ: 36.

3. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.



Пусть хорда AB равна $\sqrt{2}$. Тупой вписанный угол, опирающийся на эту хорду, обозначим α.

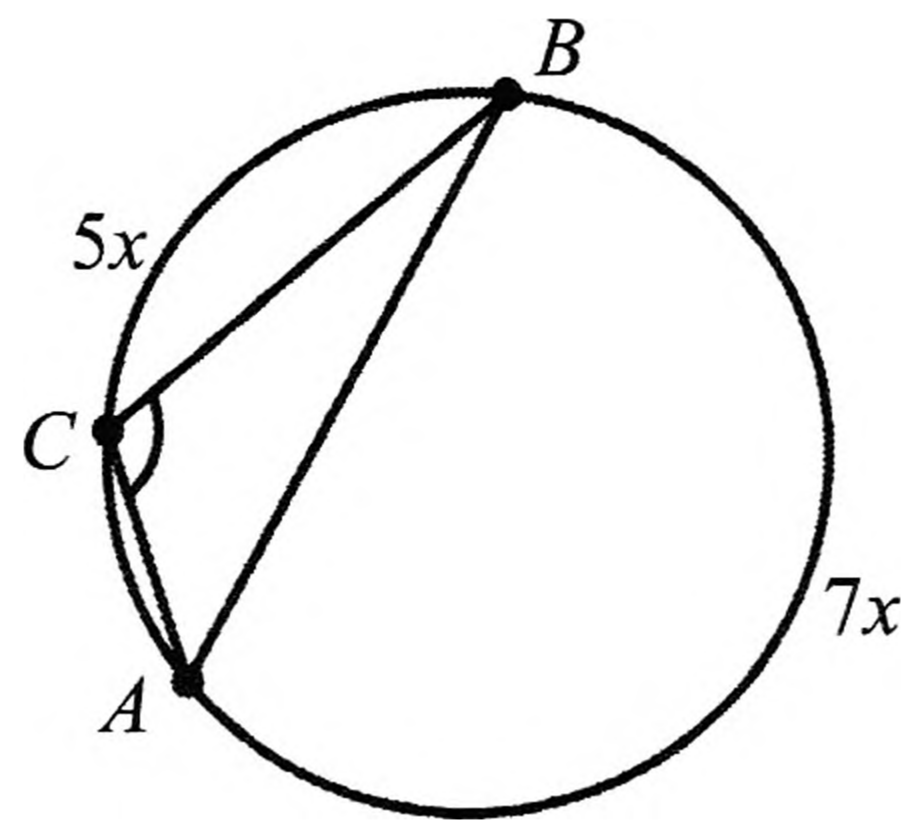
В треугольнике AOB стороны AO и OB равны 1, сторона AB равна $\sqrt{2}$. Нам уже встречались такие треугольники. Очевидно, что треугольник AOB — прямоугольный и равнобедренный, то есть угол AOB равен 90°.

Тогда дуга ACB равна 90°, а дуга АКВ равна 360° – 90° = 270°.

Вписанный угол α опирается на дугу AKB и равен половине угловой величины этой дуги, то есть 135°.

Ответ: 135.

4. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Главное в этой задаче — правильный чертеж и понимание условия. Как вы понимаете вопрос: «Под каким углом хорда видна из точки C?».

Представьте, что вы сидите в точке С и вам необходимо видеть все, что происходит на хорде AB. Так, как будто хорда AB — это экран в кинотеатре.

Очевидно, что нужно найти угол ACB.

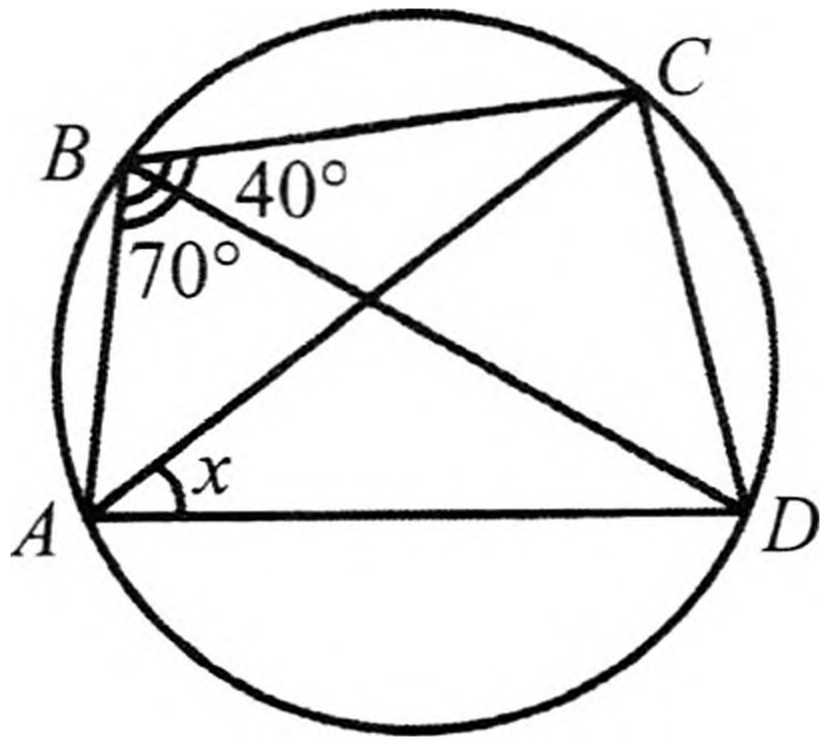
Сумма двух дуг, на которые хорда AB делит окружность, равна 360°, то есть $5x + 7x = 360°$.

Отсюда $x = 30°$, и тогда вписанный угол ACB опирается на дугу, равную 210°.

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, значит, угол ACB равен 105°.

Ответ: 105.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110°, угол ABD равен 70°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

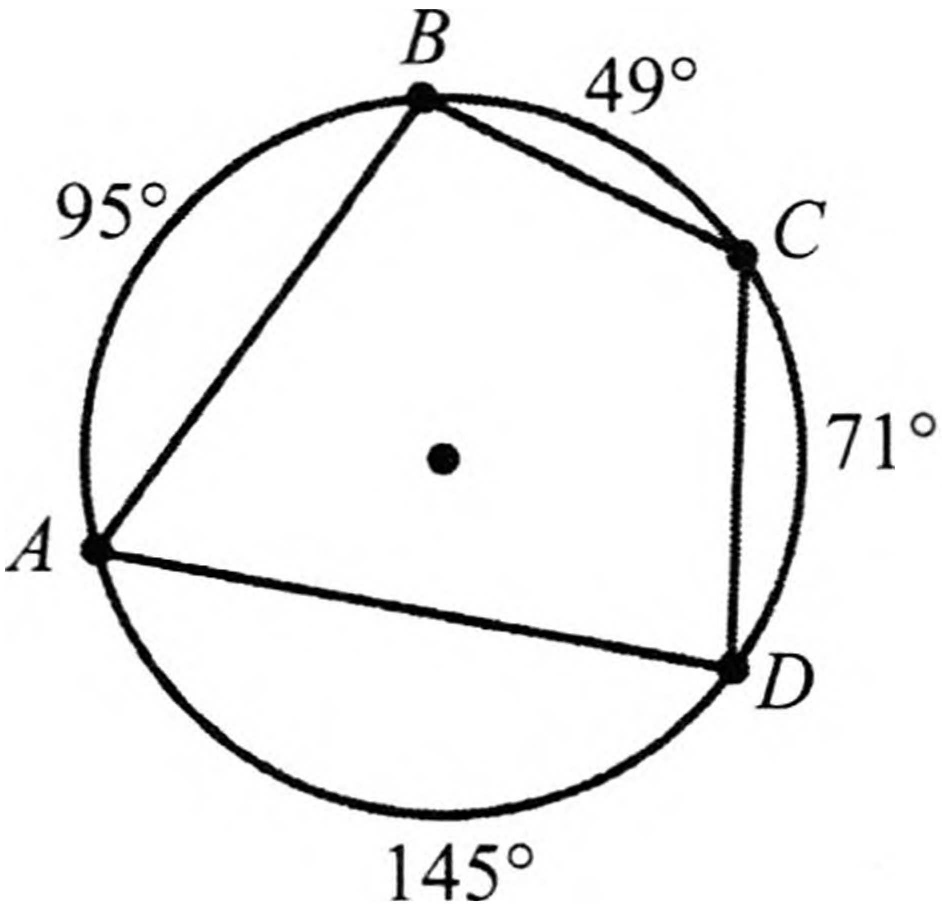


Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Угол CAD опирается на ту же дугу, что и угол CBD, который равен $110° - 70° = 40°$.

Ответ: 40.

6. Стороны четырехугольника $ABCD$ AB, BC, CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95°, 49°, 71°, 145°. Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

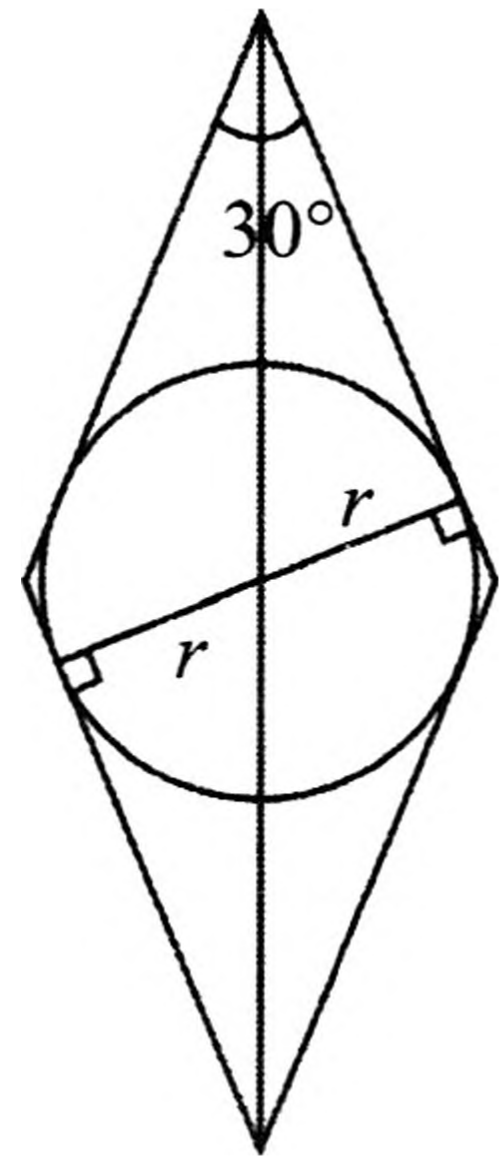


По условию, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Угол B опирается на дугу ADC, равную $145° + 71° = 216°$ и равен половине этой дуги, то есть 108°.

Ответ: 108.

7. Острый угол ромба равен 30°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.



Окружность вписана в ромб. Это значит, что она касается всех сторон ромба. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, и значит, диаметр окружности равен высоте ромба.

Применим метод площадей. О нем рассказано в задаче 16 в предыдущей главе. Выразим площадь ромба двумя способами и найдем сторону ромба.

Пусть a — сторона ромба. Тогда

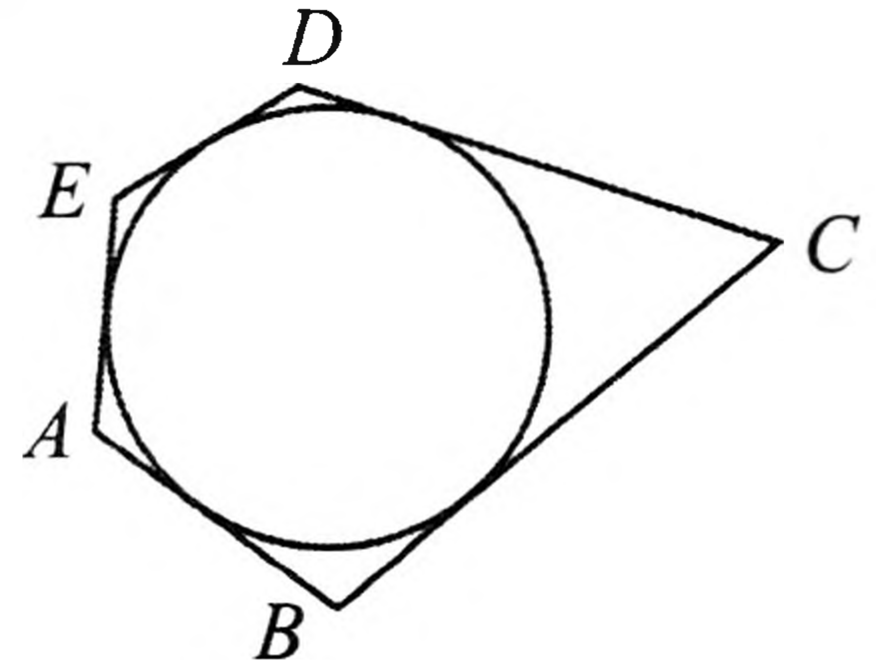
$$S = a^2 \sin 30° = ah.$$

$$\frac{1}{2}a^2 = a \cdot 4.$$

Отсюда $a = 8$.

Ответ: 8.

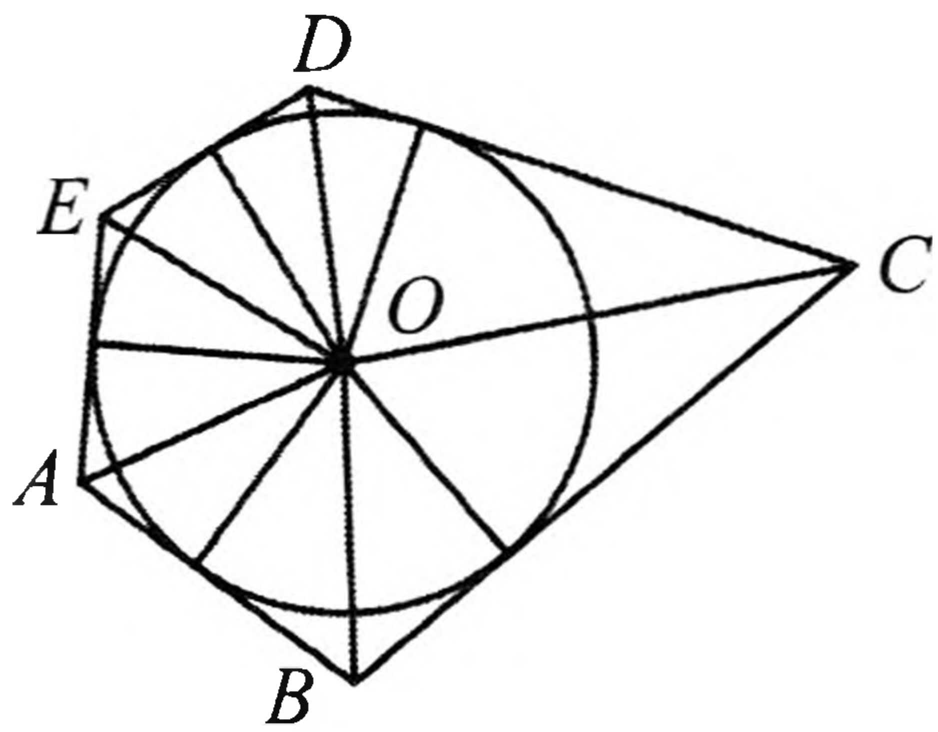
8. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.



Обратите внимание, что в условии даже не сказано, сколько сторон у этого многоугольника. Видимо, это неважно. Пусть их будет пять, как на рисунке.

Окружность касается всех сторон многоугольника. Давайте отметим центр окружности — точку O — и проведем перпендикулярные сторонам радиусы в точки касания.

Давайте также соединим точку O с вершинами A, B, C, D, E. Мы получили треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA.



Очевидно, что площадь многоугольника

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOE} + S_{EOA}.$$

Как вы думаете, чему равны высоты всех этих треугольников и как, пользуясь этим, найти радиус окружности?

Высоты всех треугольников одинаковы и равны радиусу окружности, то есть r.

По формуле площади треугольника,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot r;$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CD \cdot r;$$

$$S_{DOE} = \frac{1}{2} DE \cdot r;$$

$$S_{EOA} = \frac{1}{2} EA \cdot r.$$

Тогда $S=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DE+EA)\cdot r=\frac{1}{2}P\cdot r$, где P — периметр, то есть сумма всех сторон многоугольника. Мы получили, что

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot r=5;$$

$$r=1.$$

Ответ: 1.

Что такое математическое доказательство? Можно сказать, что это цепочка логических умозаключений, позволяющая вывести новое утверждение из уже известных.

Так построена вся геометрия Евклида, которую мы изучаем. Из самых очевидных утверждений — их называют аксиомы — вырастает стройная и взаимосвязанная система.

Каждая, даже простая, геометрическая задача на доказательство учит отстаивать свое мнение, основанное не на догадках и эмоциях, а на знаниях и логике.

Векторы на ЕГЭ по математике

Стандартное определение: «Вектор — это направленный отрезок». Обычно этим и ограничиваются знания выпускника о векторах. Кому нужны какие-то «направленные отрезки»?

А в самом деле, что такое векторы и зачем они?

Прогноз погоды. «Ветер северо-западный, скорость 18 метров в секунду». Согласитесь, имеет значение и направление ветра (откуда он дует), и модуль (то есть абсолютная величина) его скорости.

Величины, не имеющие направления, называются скалярными. Масса, работа, электрический заряд никуда не направлены. Они характеризуются лишь числовым значением — «сколько килограммов» или «сколько джоулей».

Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются *векторными*.

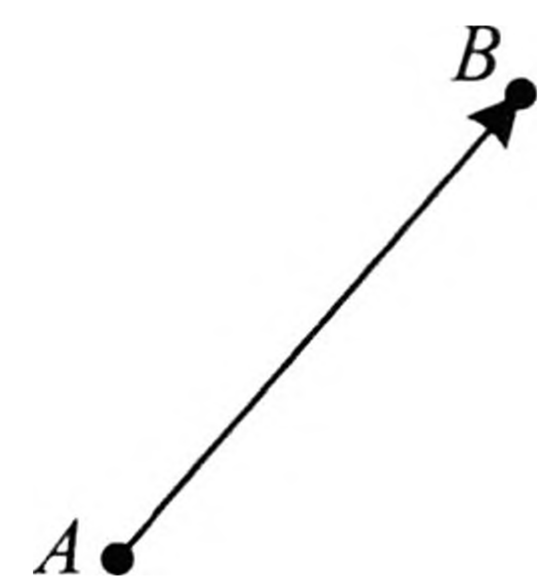
Скорость, сила, ускорение — векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда». Например, ускорение свободного падения $\vec{g}$

направлено к поверхности Земли, а величина его равна 9,8 м/с^2. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.

Вы помните, что физические величины обозначают буквами, латинскими или греческими. Стрелочка над буквой показывает, что величина является векторной: $\vec{a}$.

Вот другой пример.

Автомобиль движется из A в B. Конечный результат — его перемещение из точки A в точку B, то есть перемещение на вектор $\overline{AB}$.



Теперь понятно, почему вектор — это направленный отрезок. Обратите внимание, конец вектора — там, где стрелочка. **Длиной вектора** называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

До сих пор мы работали со скалярными величинами, по правилам арифметики и элементарной алгебры. Векторы — новое понятие. Это другой класс математических объектов. Для них свои правила.

Когда-то мы и о числах ничего не знали. Знакомство с ними началось в младших классах. Оказалось, что числа можно сравнивать друг с другом, складывать, вычитать, умножать и делить. Мы узнали, что есть число «единица» и число «ноль».

Теперь мы знакомимся с векторами.

Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует — ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов.

А вот понятие равенства для векторов есть.

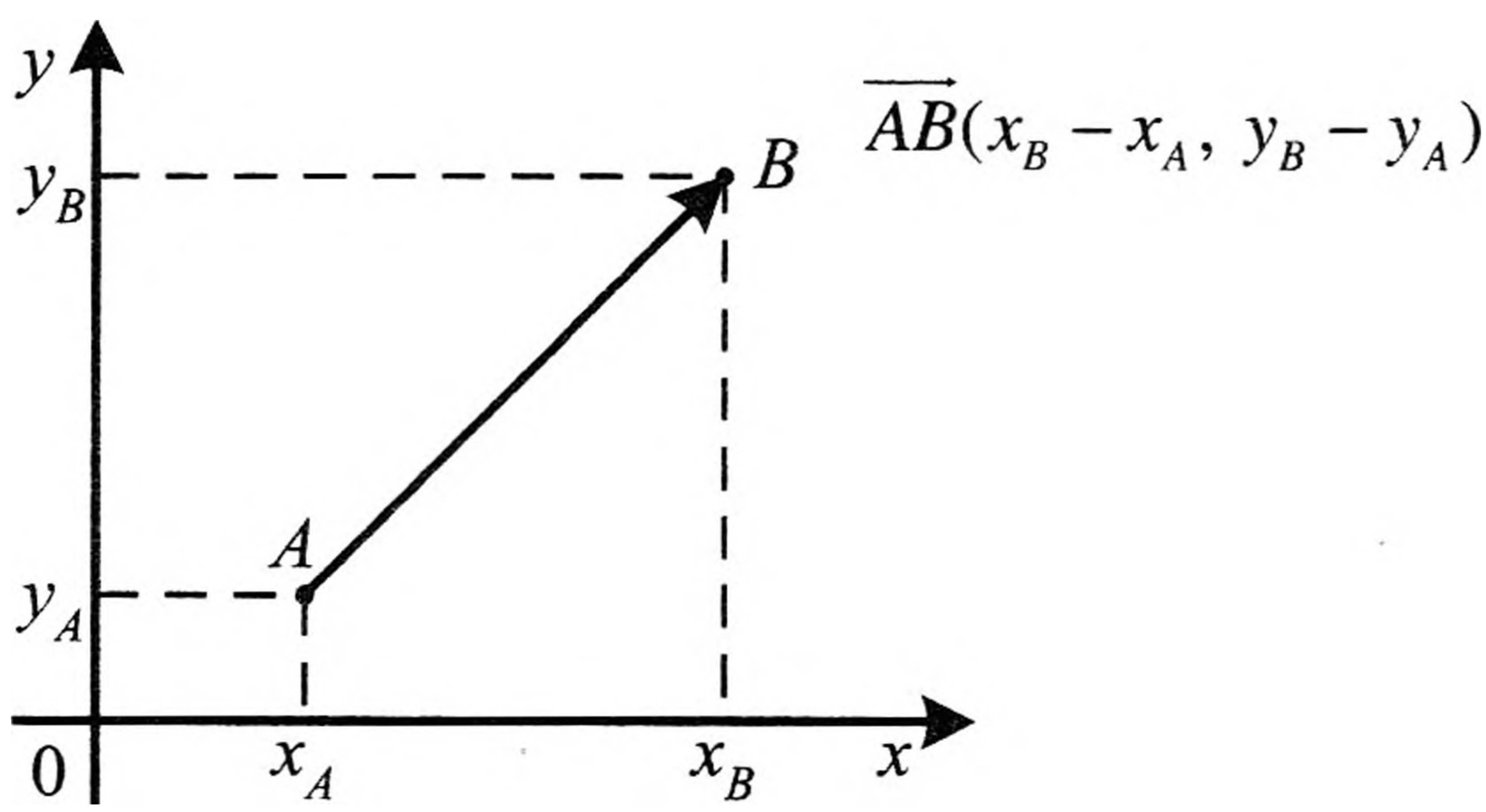
Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости.

Единичным называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

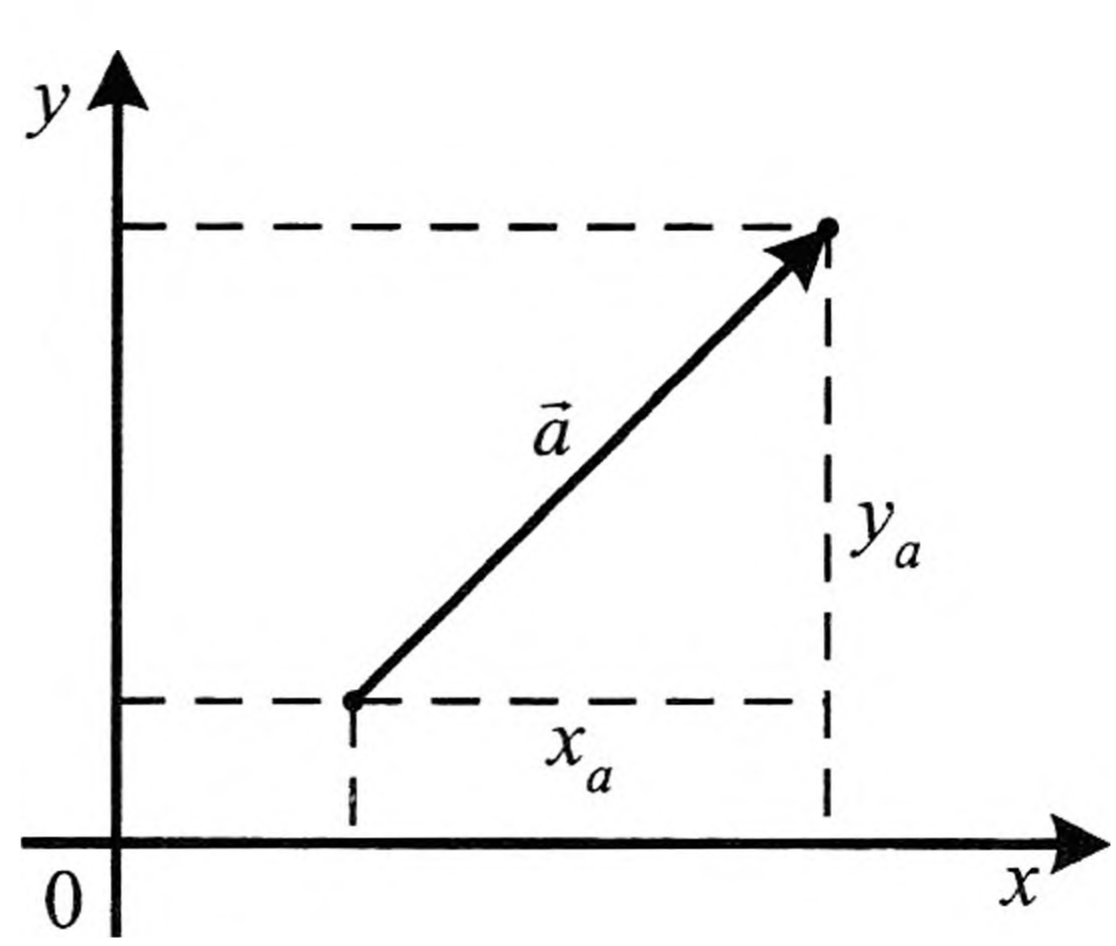
Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината.

Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}(x_a, y_a)$.

Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ — по x и по y. Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



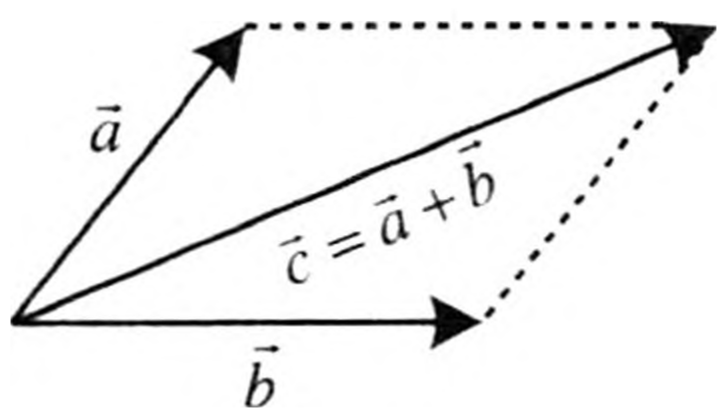
Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$.



Сложение векторов

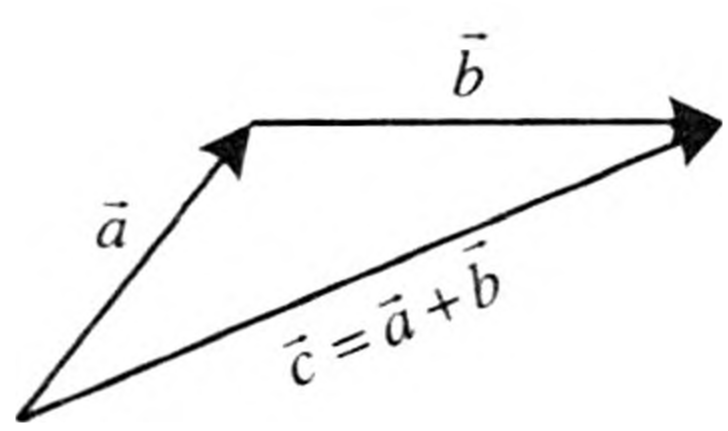
Для сложения векторов есть два способа.

1. **Правило параллелограмма.** Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

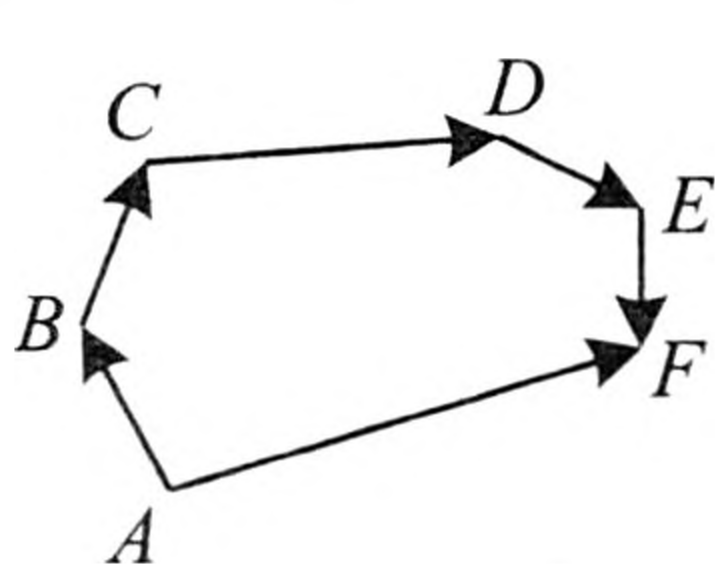


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — **правило треугольника.** Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

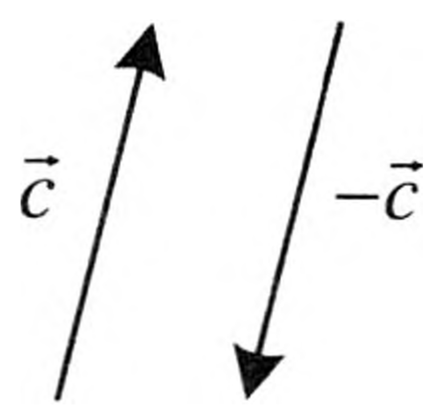
При сложении векторов $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ получаем:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b};$$

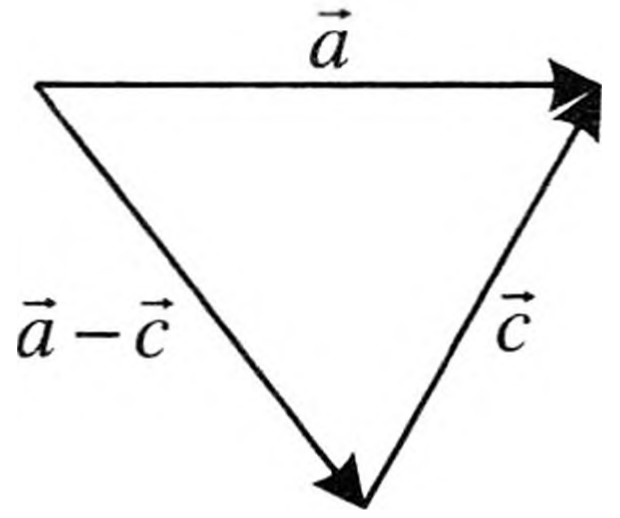
$$\vec{c}(x_a + x_b, y_a + y_b).$$

Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.

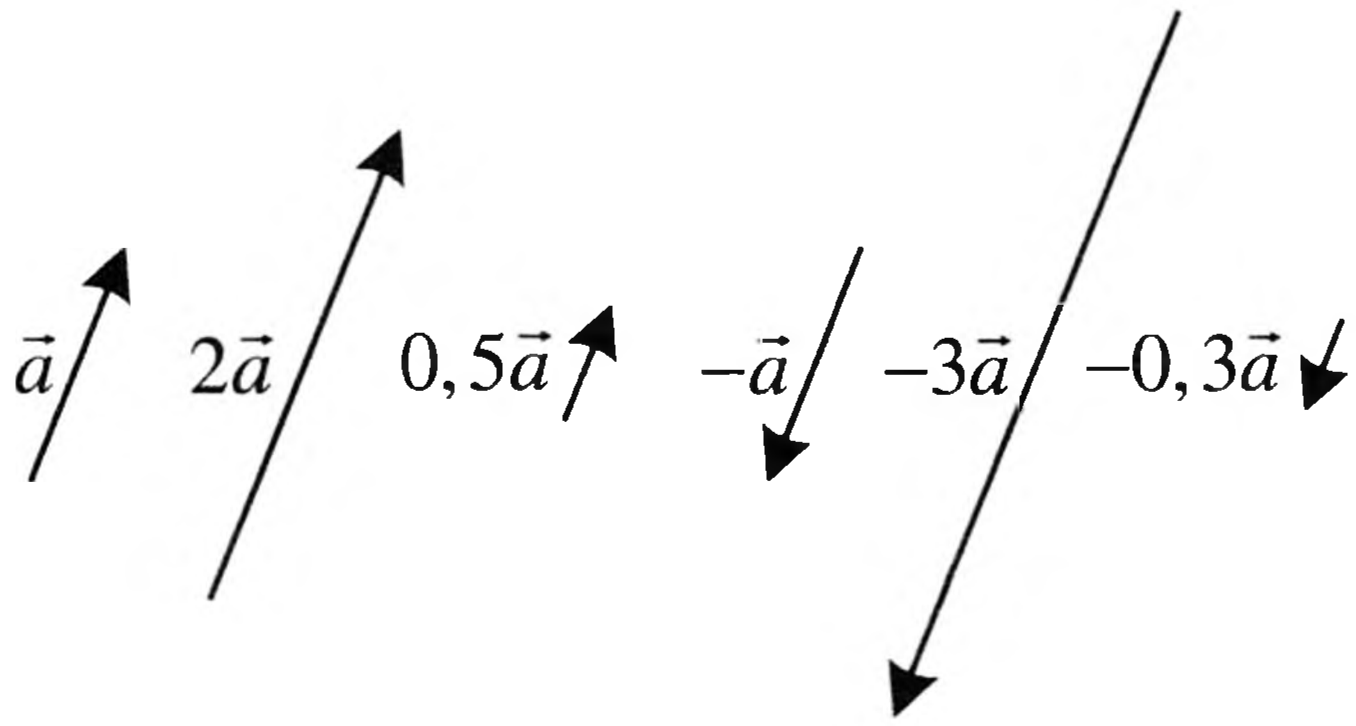


Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k, не равное нулю, получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.

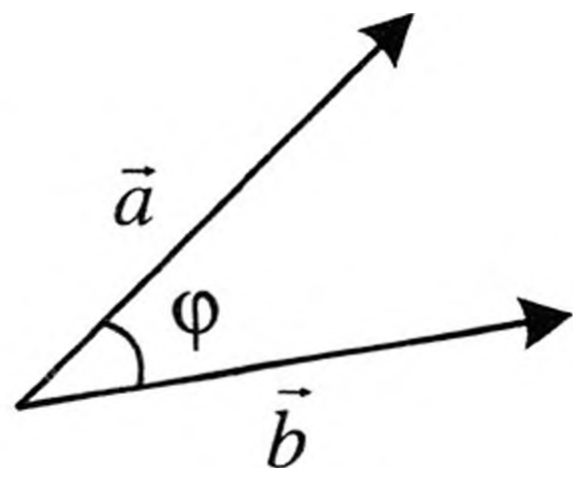


Скалярное произведение векторов

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$



Обратите внимание — перемножили два вектора, а получился скаляр, то есть число. Например, в физике механическая работа равна скалярному произведению двух векторов — силы и перемещения:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=F\cdot S\cdot\cos\varphi.$$

Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

А вот так скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b.$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}.$$

Эта формула особенно удобна в стереометрии. Например, когда нужно найти угол между скрещивающимися прямыми или между прямой и плоскостью. Часто векторным методом задача по стереометрии решается в несколько раз быстрее, чем классическим.

В школьной программе по математике изучают только скалярное произведение векторов.

Оказывается, кроме скалярного, есть еще и векторное произведение, когда в результате умножения двух векторов получается вектор. Кто сдает ЕГЭ по физике, знает, что такое сила Лоренца и сила Ампера. В формулы для нахождения этих сил входят именно векторные произведения.

Векторы — полезнейший математический инструмент. В этом вы убедитесь на первом курсе вуза.

Стереометрия на ЕГЭ по математике. Часть 1

Часто в задачах по стереометрии требуется посчитать объем тела или площадь его поверхности. Или каким-то образом использовать эти данные. Поэтому заглянем в толковый словарь русского языка и уточним понятия.

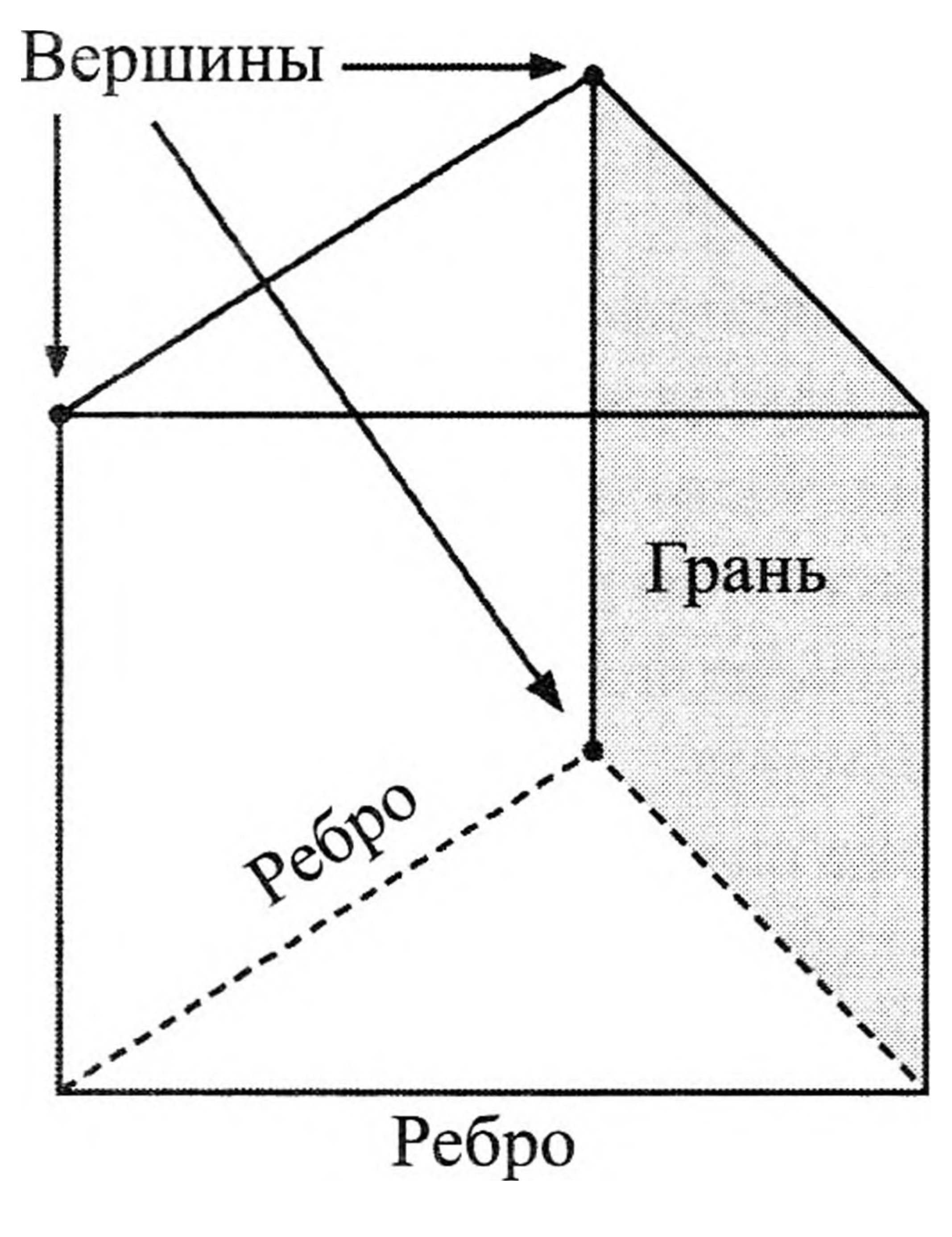
Объем — величина чего-либо в длину, ширину и высоту, измеряемая в кубических единицах.

Другими словами, чем больше объем, тем больше места тело занимает в трехмерном пространстве.

Площадь — величина чего-нибудь в длину и ширину, измеряемая в квадратных единицах. Представьте себе, что вам нужно оклеить всю поверхность объемного тела. Сколько квадратных сантиметров (или метров) вы бы обклеили? Это и есть площадь поверхности.

Объемные тела — это **многогранники** (куб, параллелепипед, призма, пирамида) и **тела вращения** (цилиндр, конус, шар).

Если в задаче по стереометрии речь идет о многограннике, вам встретятся термины «вершины» «грани» и «ребра». Вот они, на картинке.



Чтобы найти площадь поверхности многогранника, сложите площади всех его граней.

Вам могут также встретиться понятия «прямая призма, правильная призма, правильная пирамида».

Прямой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны основанию.

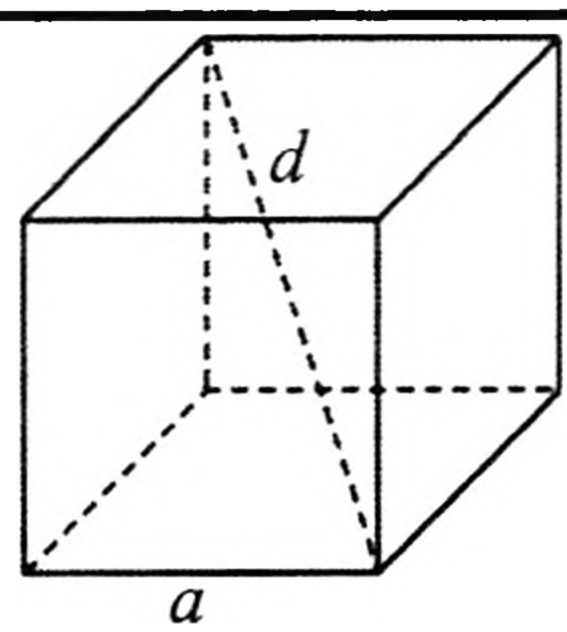
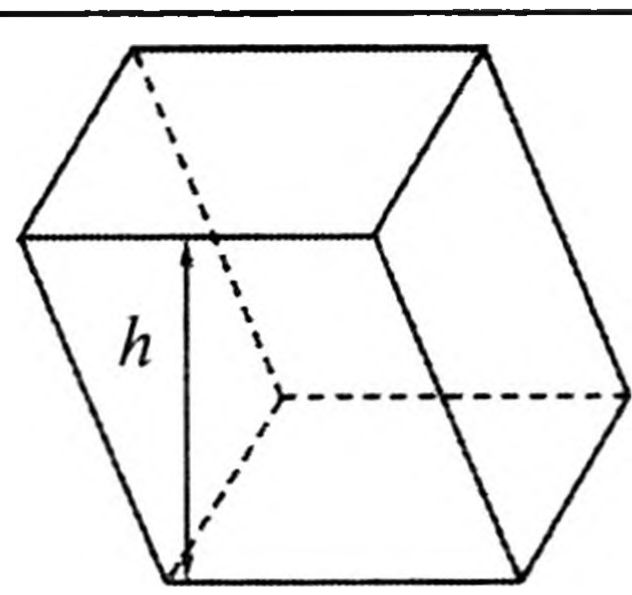
Если призма — прямая и в ее основании лежит правильный многоугольник, призма будет называться **правильной**.

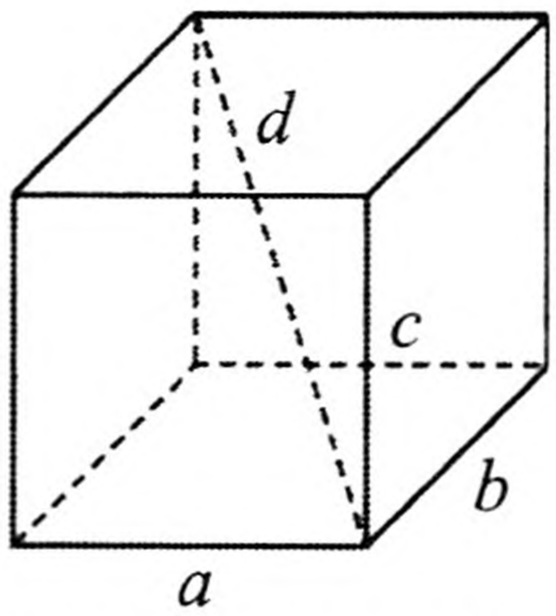
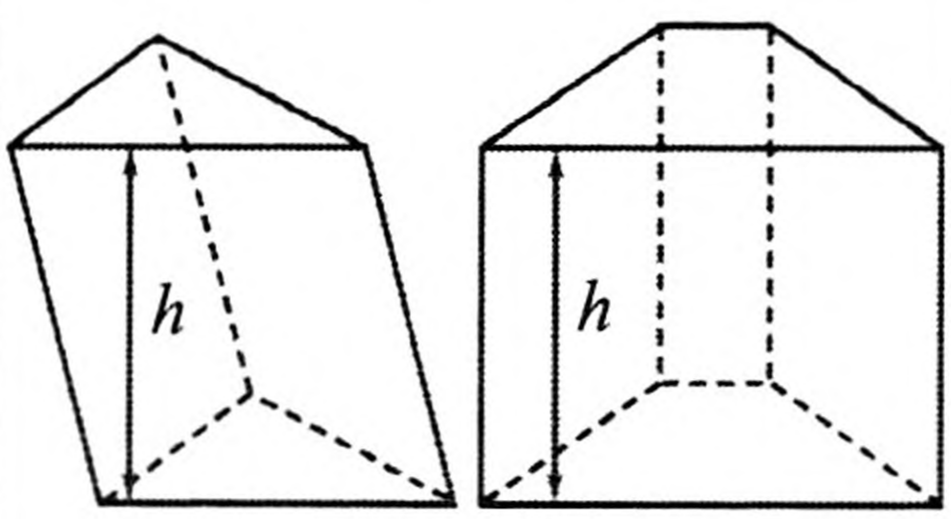
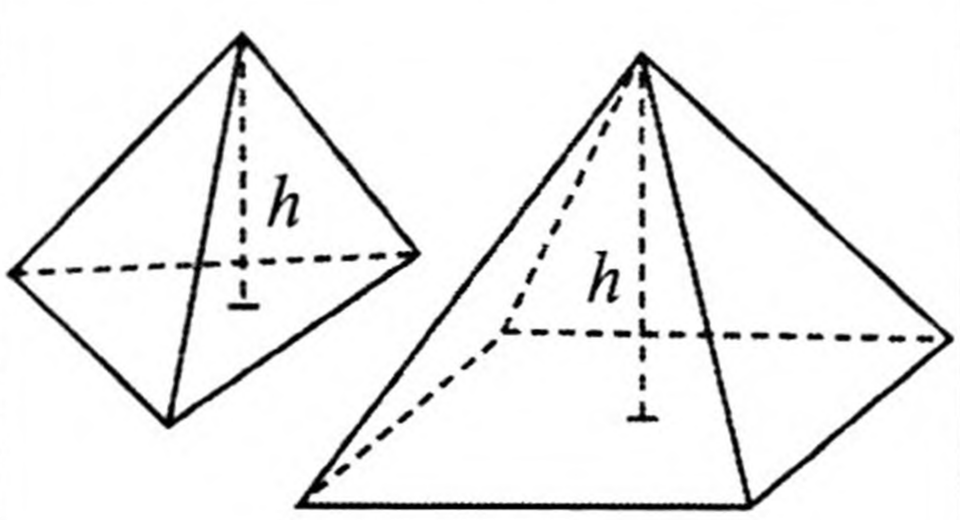
А правильная пирамида — такая, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

Для решения задач по стереометрии вам понадобятся формулы (они в таблицах), логика и сообразительность.

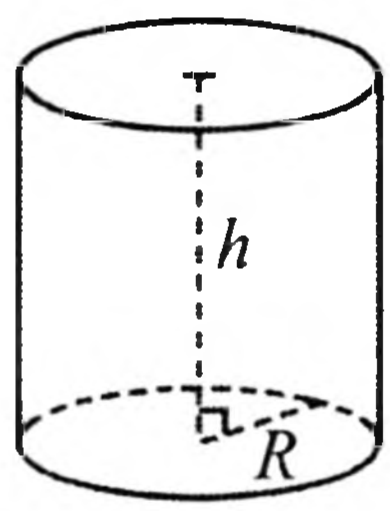
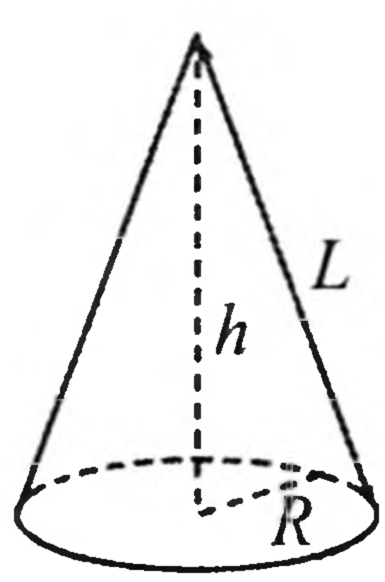
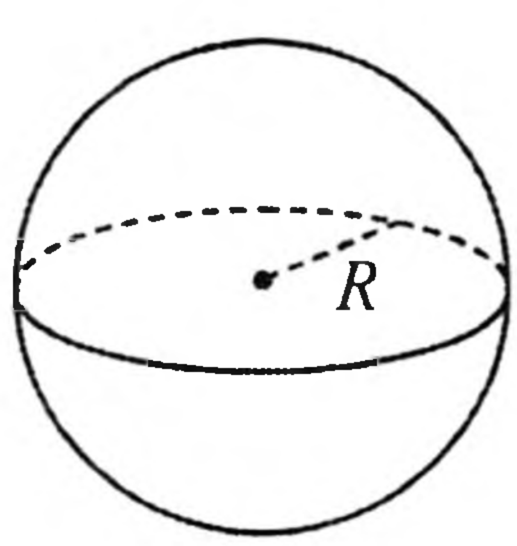
Начнем с формул объема и площади поверхности.

Многогранники

Объем	**Площадь поверхности**	**Еще**
 Куб $V = a^3$ a — ребро куба	$S = 6a^2$	$d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 Параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$ $S_{осн}$ — площадь основания; h — высота		

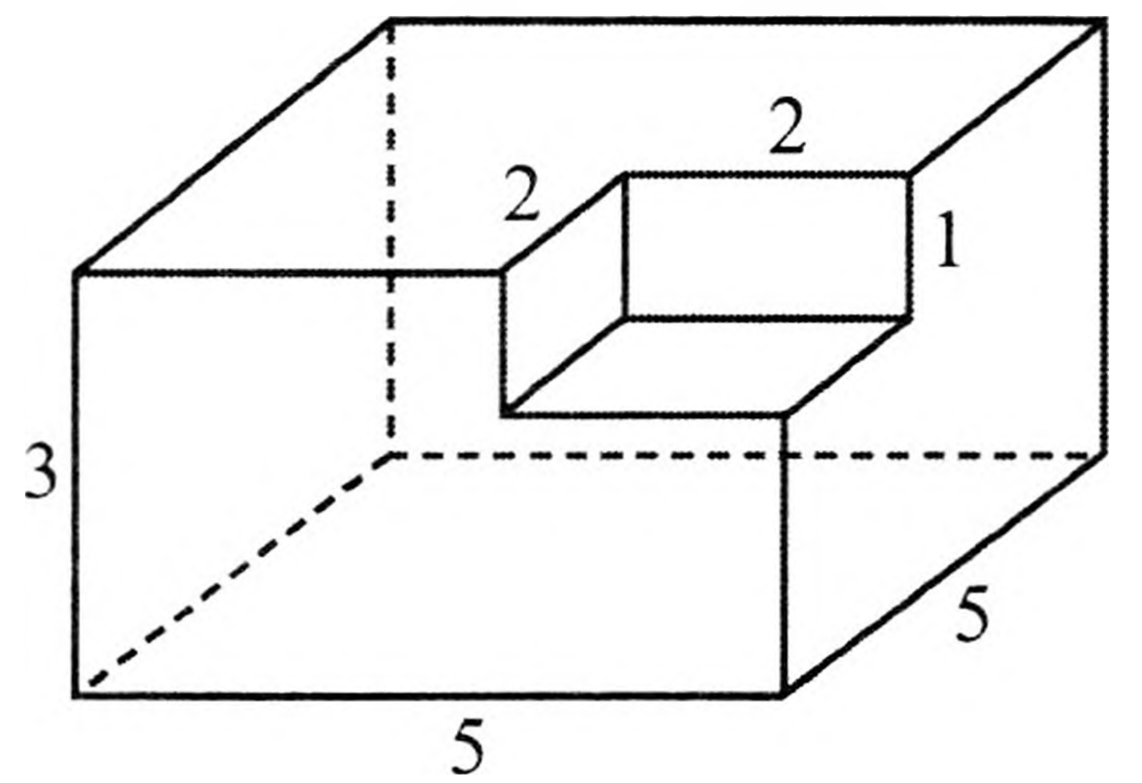
Объем	Площадь поверхности	Еще
 Пямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2bc + 2ac$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ длина диагонали
 Призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$	
 Пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$	

Тела вращения

Объем	Площадь поверхности	Еще
 Цилиндр $V = \pi R^2 \cdot h$ R — радиус основания; h — высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi Rh$	
 Конус $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} =$ $= \pi R^2 + \pi RL$ L — образующая	$L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 Шар $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$	

Перейдем сразу к практике, то есть к экзаменационным задачам. Во многих из них надо посчитать объем или площадь поверхности многогранника, из которого какая-либо часть вырезана.

1. Найдите объем и площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке.



Что тут изображено? Очевидно, это большой параллелепипед, из которого вырезан «кирпичик», так что получилась «полочка». Если вы увидели на рисунке что-то другое — обратите внимание на сплошные и штриховые линии. Сплошные линии — видимы. Штриховыми линиями показываются те ребра, которые мы не видим, — они находятся сзади, то есть закрыты другими гранями.

Объем найти просто. Из объема большого «кирпича», то есть параллелепипеда, вычитаем объем маленького «кирпича». Получаем: $75 - 4 = 71$.

А как быть с площадью поверхности?

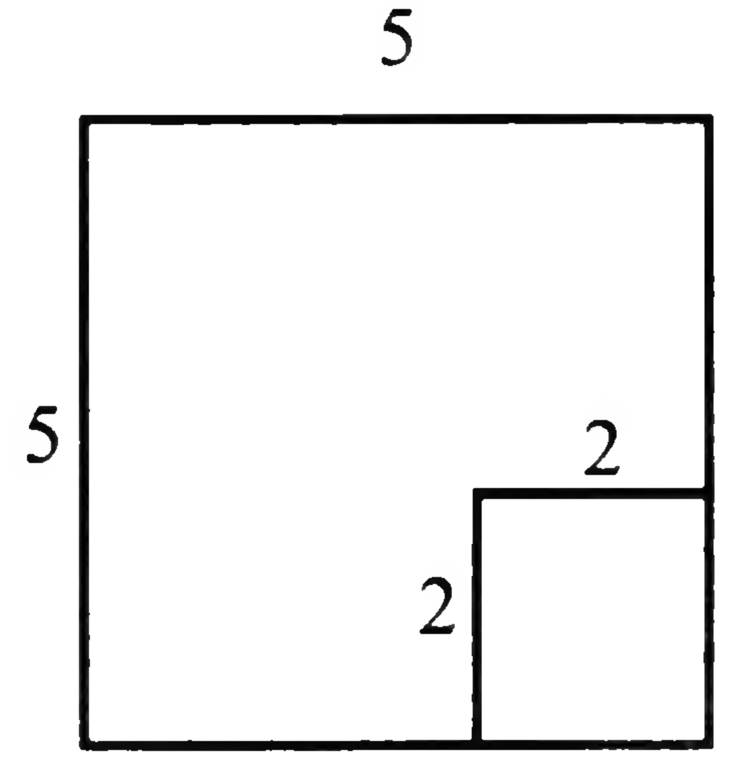
Почему-то многие школьники пытаются посчитать ее по аналогии с объемом, как разность площадей большого и малого «кирпичей».

В ответ на такое «решение» я предлагаю детскую задачу — если у четырехугольного стола отпилить один угол, сколько углов у него останется?

На самом деле нам нужно посчитать сумму площадей всех граней — верхней, нижней, передней, задней, правой, левой, а также сумму площадей трех маленьких прямоугольников, которые образуют «полочку». Можно сделать это «в лоб», напрямую. Но есть способ проще.

Прежде всего, если бы из большого параллелепипеда ничего не вырезали, его площадь поверхности была бы равна 110. А как повлияет на него вырезанная «полочка»?

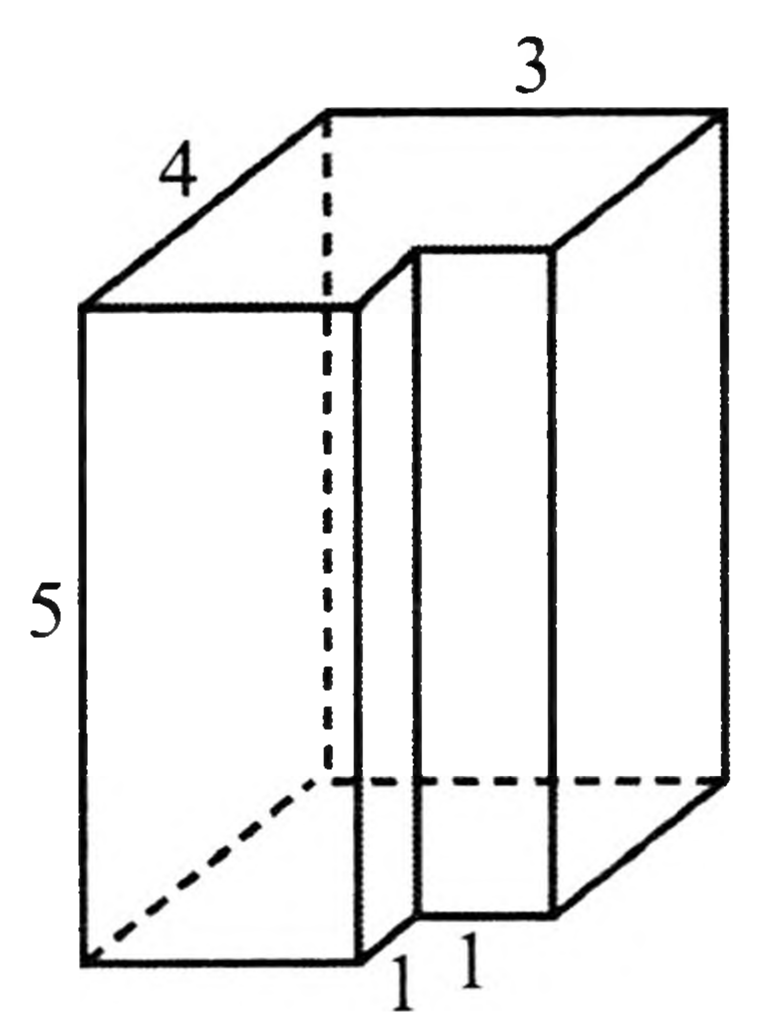
Давайте посчитаем сначала площадь всех горизонтальных участков, то есть нижнего основания, верхнего основания (из которого вырезан кусочек) и горизонтальной грани «полочки». С нижним основанием все понятно, оно прямоугольное, его площадь равна $5 \cdot 5 = 25$. А вот сумма площадей верхнего основания и горизонтальной грани «полочки» тоже равна 25! Посмотрите на них сверху.



...В этот момент и наступает понимание. Кому-то проще нарисовать вид сверху. Кому-то — представить, что мы передвигаем дно и стенки полочки и получаем целый большой параллелепипед, площадь поверхности которого равна 110. Каким бы способом вы ни решали, результат один — площадь поверхности будет такой же, как и у целого параллелепипеда, из которого ничего не вырезали.

Ответ: 110.

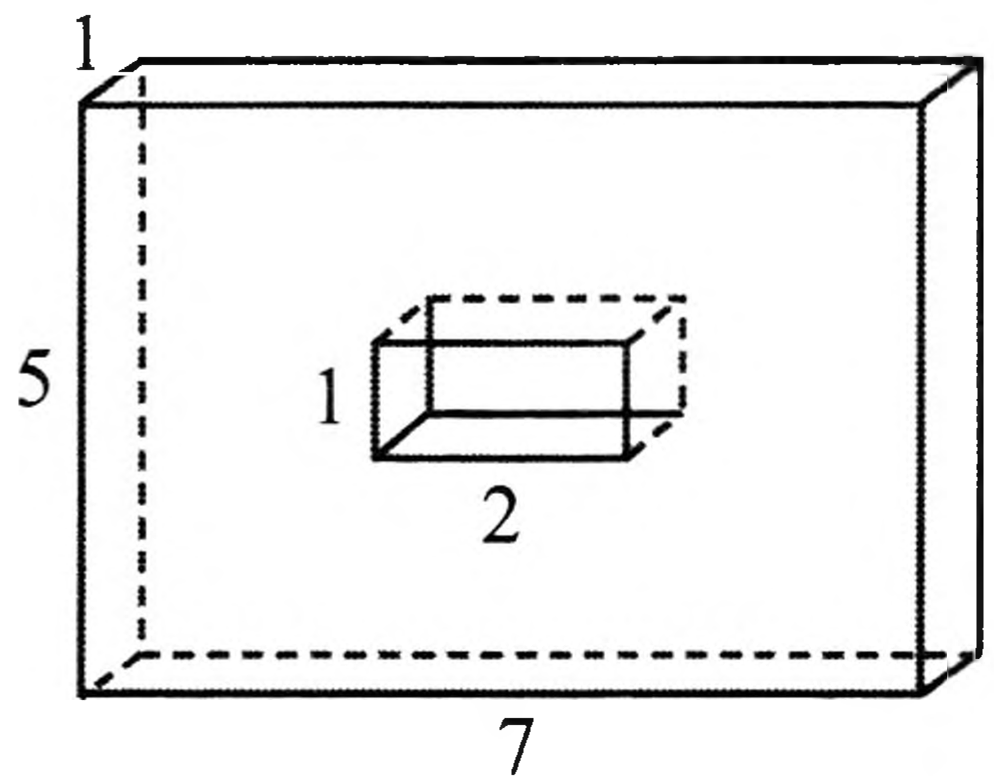
2. Здесь тоже надо найти площадь поверхности многогранника.



$$S = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 - 2 = 72.$$

Из площади поверхности «целого кирпича» вычитаем площади двух квадратиков со стороной 1 — на верхней и нижней гранях.

3. Нарисована прямоугольная плитка с «окошком». Задание то же самое — надо найти площадь поверхности.



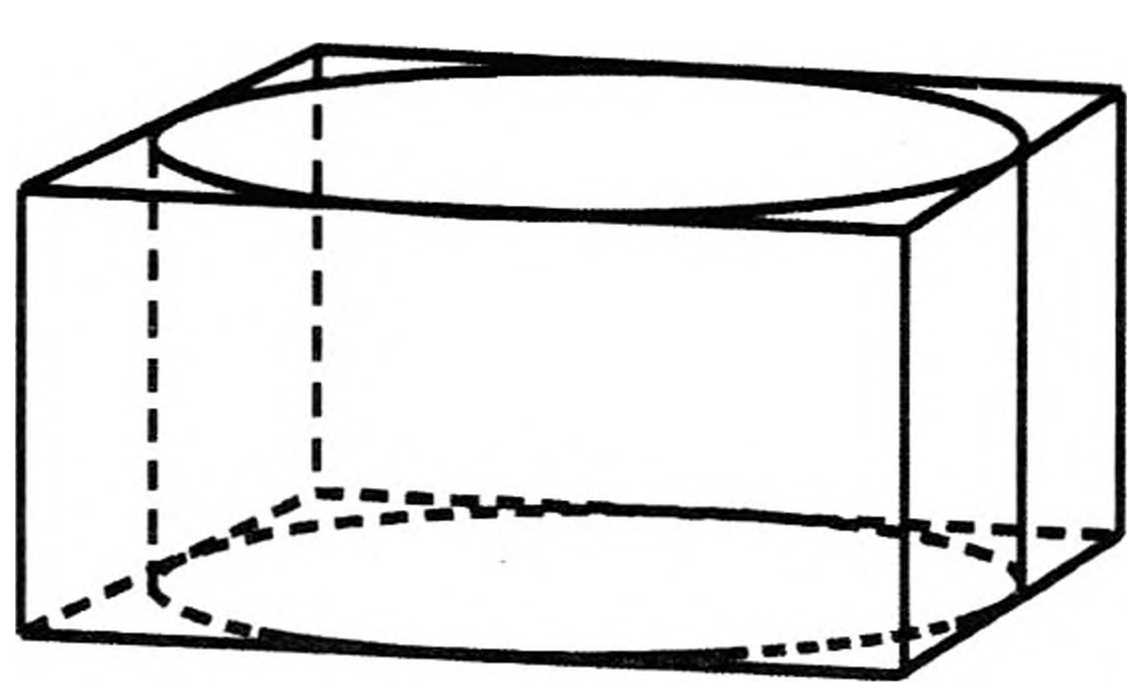
Сначала посчитаем сумму площадей всех граней.

Представьте, что вы дизайнер, а эта плитка — украшение. И вам надо оклеить эту плитку чем-то ценным, например кристаллами Сваровски. И вы их покупаете на собственные деньги. (Я не знаю почему, но эта глупая фраза мгновенно повышает вероятность правильного ответа!) Оклеивайте все грани плитки. Но только из площадей передней и задней граней вычтите площадь «окошка». Теперь само окошко надо «оформить». Оклеивайте всю его «раму».

Ответ: 96.

На экзамене также встречаются задачи на комбинацию объемных тел. Другими словами, одно объемное тело вписано в другое.

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.

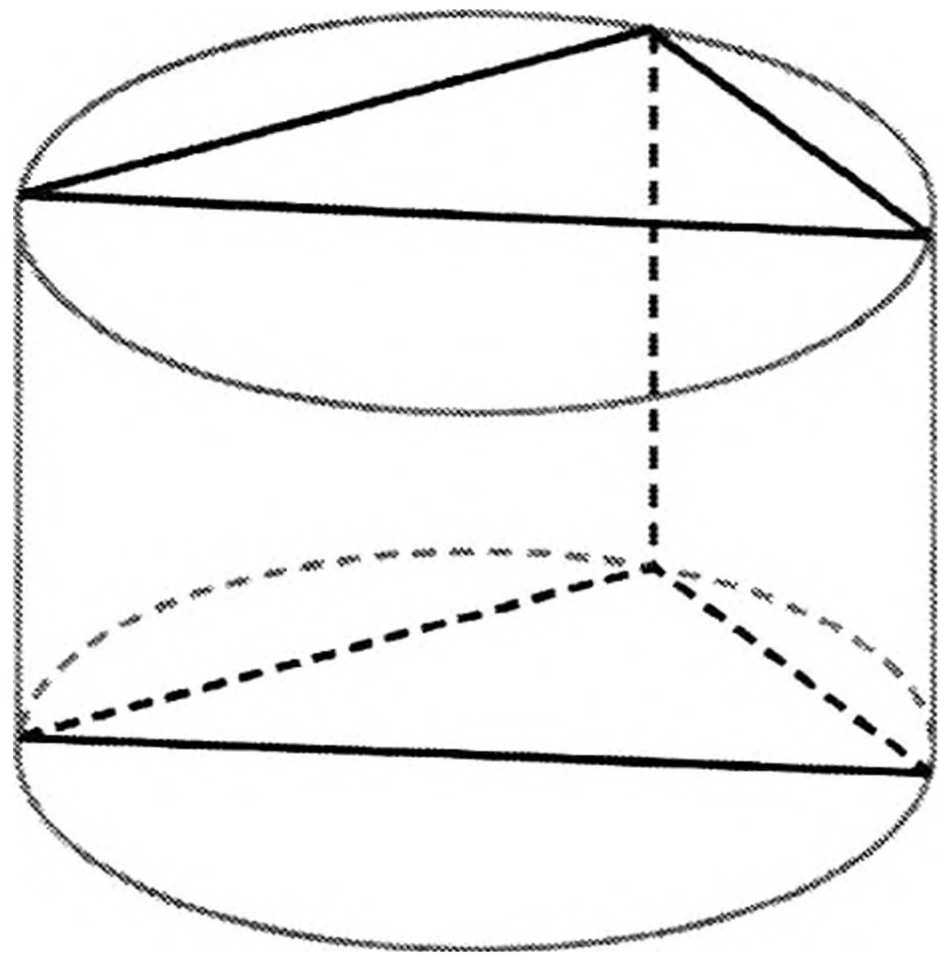


Прежде всего, заметим, что высота цилиндра равна высоте параллелепипеда. Нарисуйте вид сверху, то есть круг, вписанный в прямоугольник. Увидите, что этот прямоугольник — на самом деле квадрат, а сторона его в два раза больше, чем радиус вписанной в него окружности.

Площадь основания параллелепипеда равна 4, высота равна 1, объем равен 4.

5. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 4. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

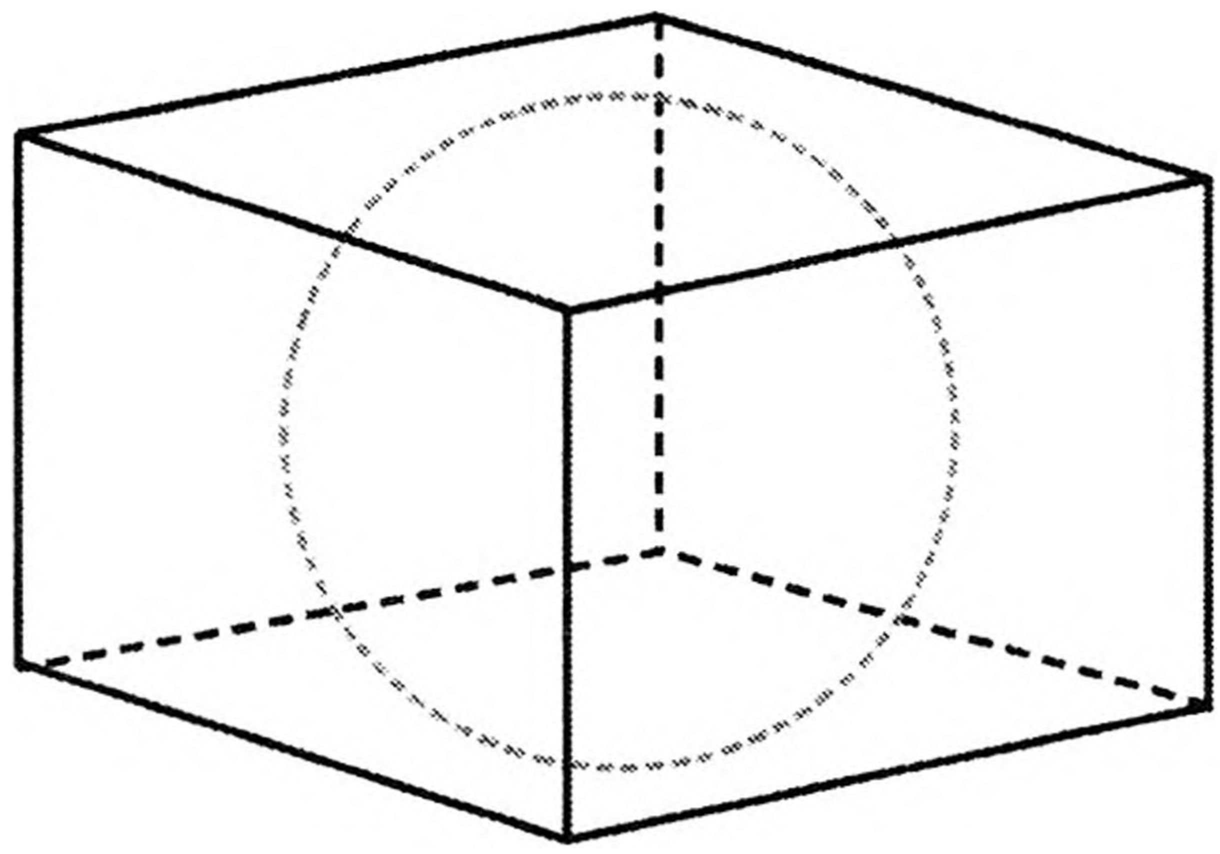


Очевидно, высота цилиндра равна боковому ребру призмы, то есть 4. Осталось найти радиус его основания.

Рисуем вид сверху. Прямоугольный треугольник вписан в окружность. Где будет находиться радиус этой окружности? Правильно, посередине гипотенузы. Гипотенузу находим по теореме Пифагора, она равна 10. Тогда радиус основания цилиндра равен 5. Находим объем цилиндра по формуле. Он равен 100π. В ответ (как и требуется в условии) запишем $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 100.

6. В прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объем параллелепипеда.



Задача проста. Нарисуйте вид сверху. Или сбоку. Или спереди. Что получается?

В любом случае вы увидите круг, вписанный в квадрат.

Можно даже ничего не рисовать, а просто представить себе шарик, который положили в коробочку так, что он касается всех стенок, дна и крышки. Ясно, что такая коробочка будет кубической формы.

Длина ребра этого куба в два раза больше, чем радиус шара.

Ответ: 8.

Сейчас мы перейдем к следующему типу задач. Но сначала вопрос: во сколько раз увеличатся объем и площадь поверхности объемного тела, если все его линейные размеры увеличить в k раз?

Прежде чем дать правильный ответ, я расскажу об одном гениальном скульпторе. Он не ответил вовремя на этот вопрос, что и привело его к трагическому концу. Нет, это не Церетели. Это случилось давным-давно…

Итак, в III веке до нашей эры греческий остров Родос был окружен войсками Дементия Македонского. После целого года жестокой осады неприятель вынужден был отступить. Празднуя победу, жители Родоса решили построить статую особо почитаемого на острове бога солнца Гелиоса, чтобы отблагодарить его за заступничество.

Родосцы заказали скульптору Харесу 18-метровую статую и выделили деньги на ее создание. Но вскоре жители решили, что бог Гелиос заслуживает более грандиозного памятника. Они потребовали от скульптора увеличить высоту статуи в два раза, добавив к заплаченной сумме столько же.

Что произошло дальше, вы можете догадаться. Шли годы, Харес вдохновенно трудился над статуей. Он замечал, что денег не хватает, но не понимал, почему. Он занимал недостающие для покупки материалов деньги у близких, родственников, друзей и ростовщиков.

Через 12 лет работа над 36-метровой статуей бога Гелиоса была закончена. Бронзовый гигант возвышался над гаванью Родоса, сверкая на солнце, и был виден с ближайших островов. Колосс Родосский — одно из чудес света — наверняка известен вам из курса истории Древнего мира.

А сам Харес, разоренный и осаждаемый кредиторами, покончил жизнь самоубийством.

Так чего же не знал гениальный скульптор?

Запомним простое правило.

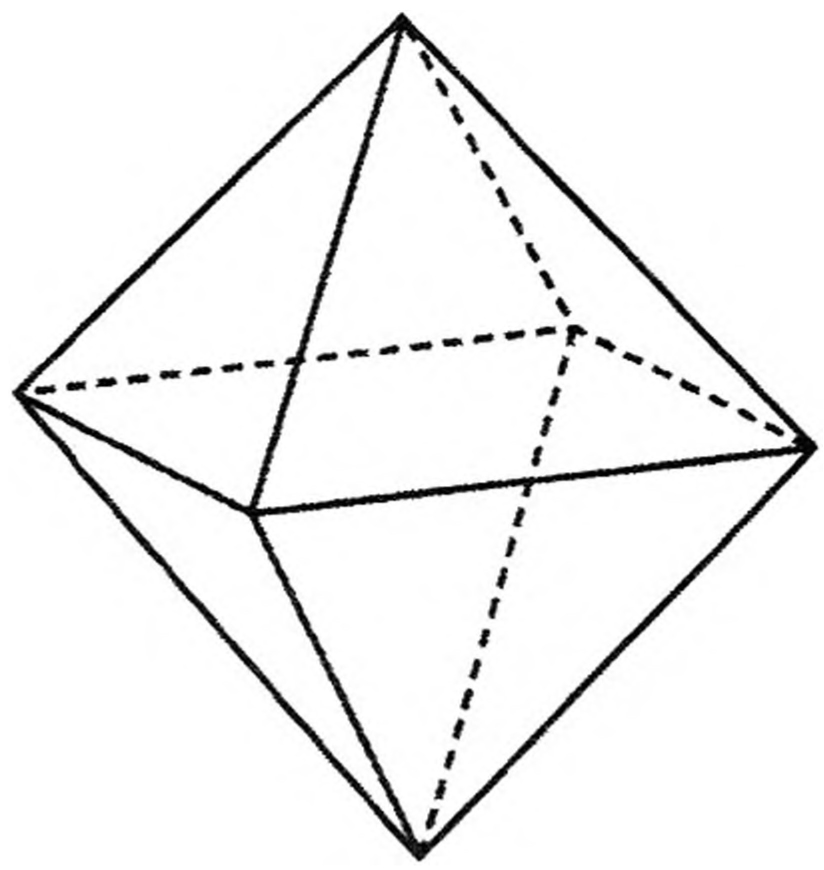
Если все линейные размеры фигуры увеличить в k раз — площадь увеличится в k^2 раз. Если все размеры объемного тела, то есть длину, ширину и высоту, увеличить в k раз — его площадь поверхности увеличится в k^2, а объем — в k^3 раз.

Это правило верно и для призмы, и для конуса, и для шара, и для статуи — для любого объемного тела.

Не в два раза, как предполагали жители города и сам Харес, а в 8 раз должен был увеличиться объем статуи при увеличении ее высоты в 2 раза!

На мой взгляд, в легенде есть элемент вымысла. Мне хочется думать, что опытный скульптор, работающий с объемными формами, должен был знать приведенное выше правило. Во всяком случае, вы теперь его знаете и можете применять при решении задач.

7. Во сколько раз увеличится объем октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

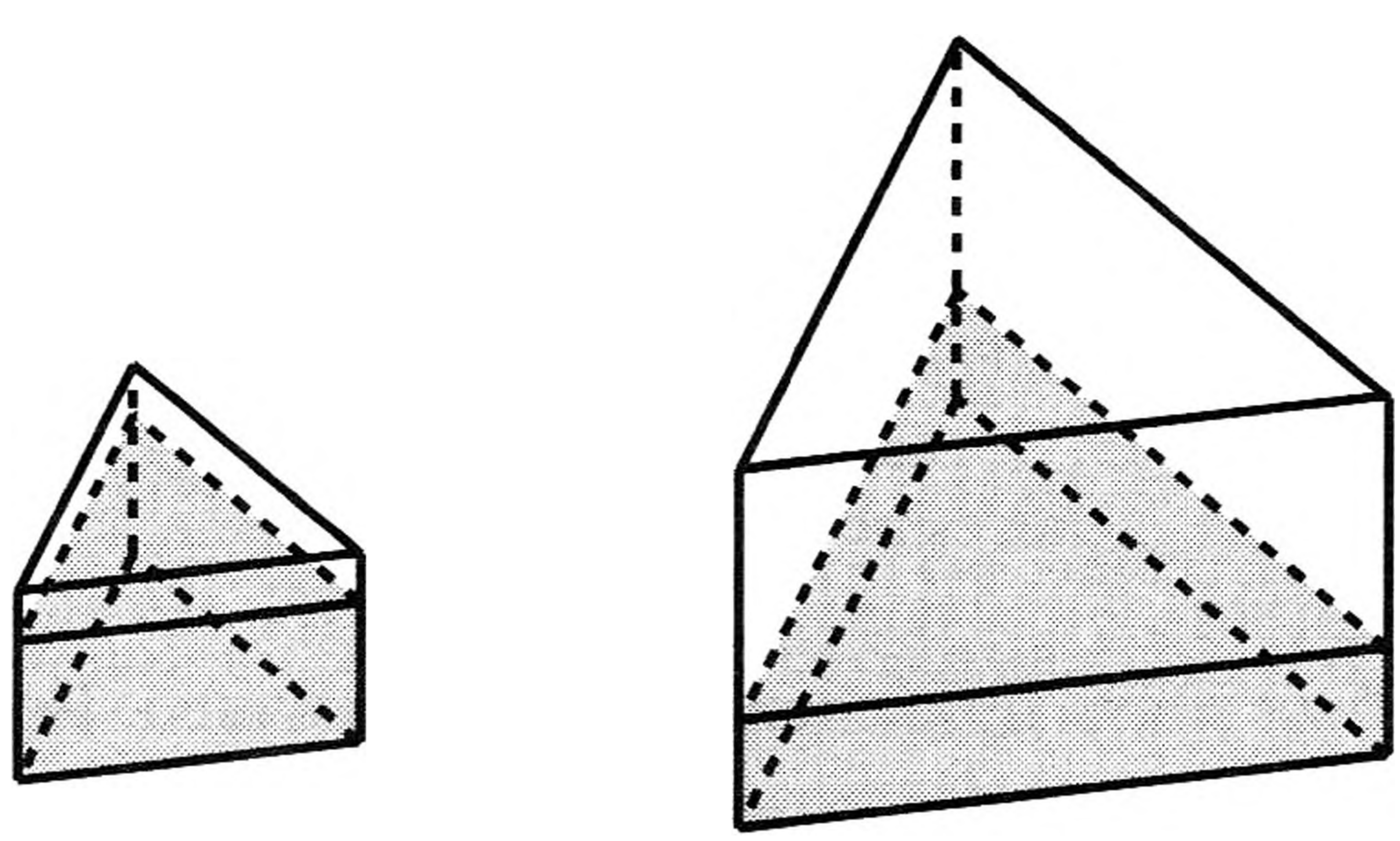


Только не надо обмирать от ужаса при слове «октаэдр». В переводе это слово означает «правильный восьмигранник». Он здесь нарисован и представляет собой две сложенные вместе четырехугольные пирамиды.

Мы уже говорили — если все ребра многогранника увеличить в три раза, объем увеличится в 27 раз, поскольку $3^3 = 27$.

Ответ: 27.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

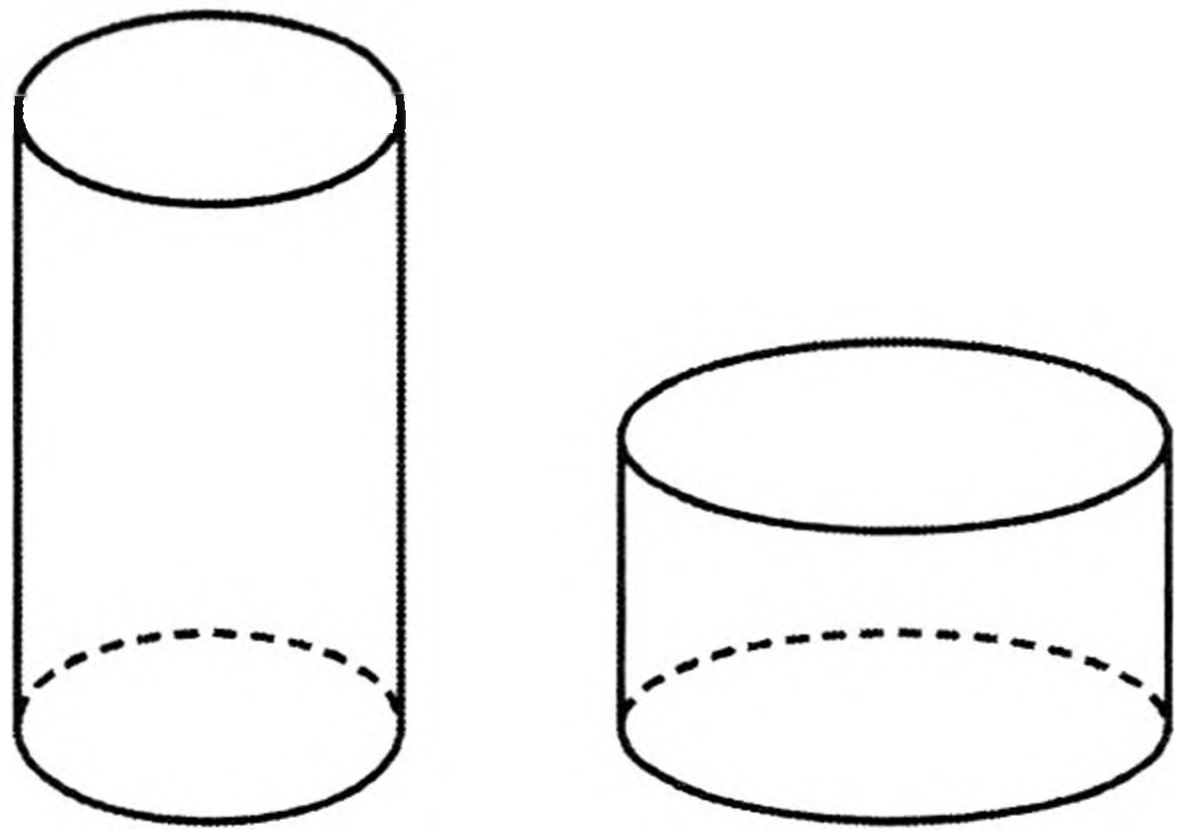


Слова «другой такой же сосуд» означают, что другой сосуд тоже имеет форму правильной треугольной призмы. То есть в его основании — правильный треугольник, у которого все стороны в два раза больше, чем у первого. Во сколько раз площадь этого треугольника больше, чем у первого?

Площадь основания второго сосуда в 4 раза больше, чем у первого. Объем воды остался неизменным. Следовательно, в 4 раза уменьшится высота.

Ответ: 3.

9. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в два раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



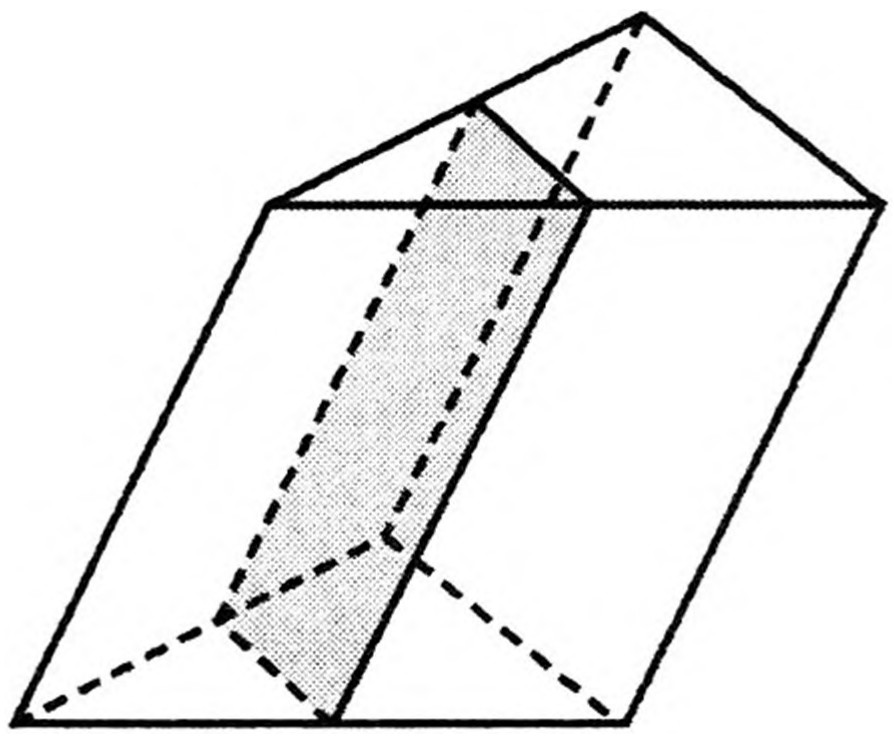
Вспомните, как мы решали стандартные задачи на движение и работу. Мы рисовали таблицу, верно? И здесь тоже нарисуем таблицу. Запишите, чему равны высота, радиус и объем для каждой кружки.

Объем цилиндра равен $\pi R^2 h$.

	Высота	**Радиус**	**Объем**
Первая кружка	h	R	$\pi R^2 h$
Вторая кружка	$\frac{h}{2}$	$2R$	$\frac{\pi(2R)^2 h}{2}$

Считаем объем второй кружки. Он равен $\frac{\pi(2R)^2 h}{2} = 2\pi R^2 h$. Получается, что он в два раза больше, чем объем первой.

10. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



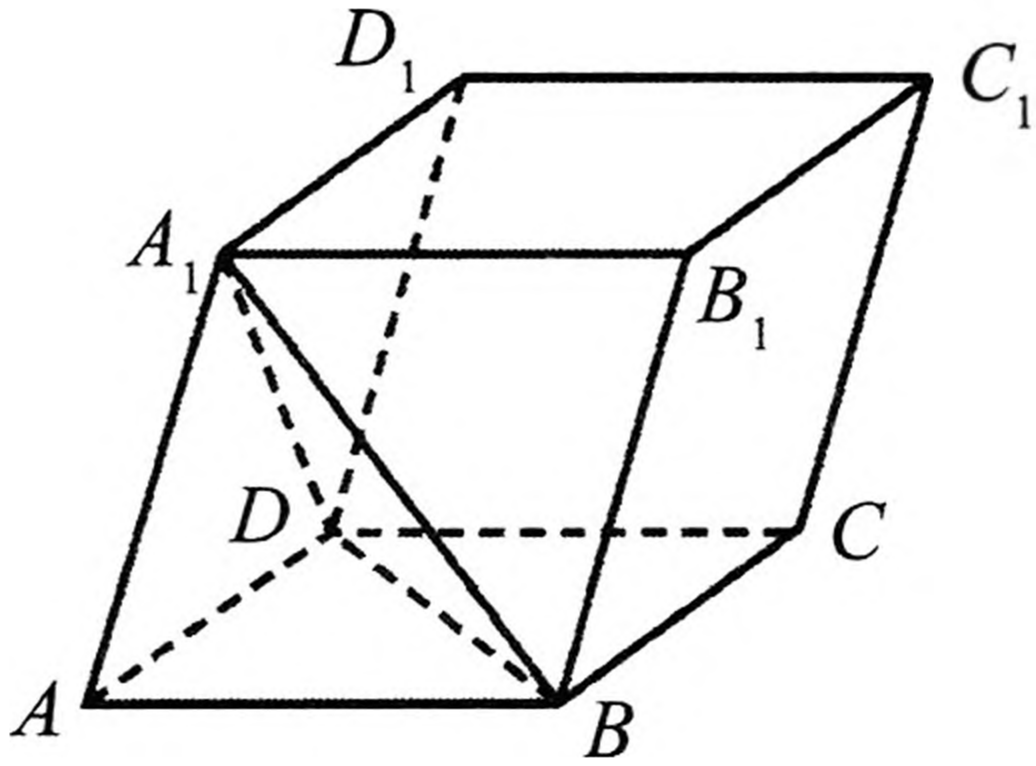
Здесь даже формулы не понадобятся! Высота меньшей призмы такая же, как у большой. А какой же будет ее площадь основания?

Очевидно, площадь основания меньшей призмы в 4 раза меньше, чем у большой. Ведь средняя линия треугольника равна половине основания. Значит, объем отсеченной призмы равен 8.

Ответ: 8.

Рассмотрим интересные приемы решения задач по стереометрии в первой части ЕГЭ. Очевидно, их лучше знать заранее, чем изобретать на экзамене.

11. Объем параллелепипеда равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABDA_1$.



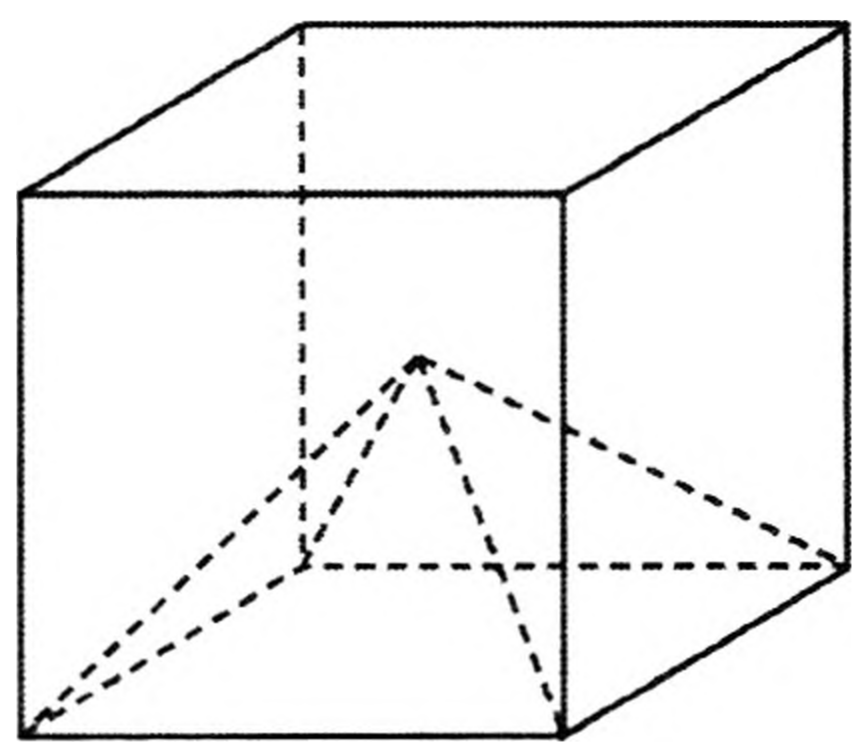
Мы помним, что объем параллелепипеда равен $S_{осн} \cdot h$.

А объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h$.

Иными словами, если у параллелепипеда и пирамиды одинаковые основания и одинаковые высоты, то объем пирамиды будет в три раза меньше, чем объем параллелепипеда. А у нашей пирамиды еще и площадь основания в два раза меньше. Значит, ее объем в шесть раз меньше объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

12. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



Один из способов решения задачи — посчитать, сколько нужно четырехугольных пирамидок, чтобы сложить из них такой кубик. Представьте, что куб сделан из проволоки и вы вставляете пирамидки вершиной внутрь, в каждую его грань — в верхнюю, нижнюю, правую, левую, переднюю и заднюю.

Вот другой способ решения этой задачи.

Если бы пирамида и куб имели одинаковые высоты, объем пирамиды был бы в 3 раза меньше объема куба (поскольку площади основания у них равны). А у нашей пирамиды высота в два раза меньше, чем у куба. Значит, ее объем будет в 6 раз меньше, чем у куба.

Ответ: 2.

Пример 3

Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

На самом деле это задача по алгебре. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. Составьте уравнение и решите его.

$$\frac{4}{3}\pi 6^3 + \frac{4}{3}\pi 8^3 + \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = R^3.$$

$$R^3 = 1728.$$

Как извлечь кубический корень из этого числа? Очень просто! Вспомним приемы быстрого счета и разложим 1728 на множители.

$$1728 = 8 \cdot 216 = 2^3 \cdot 6^3.$$

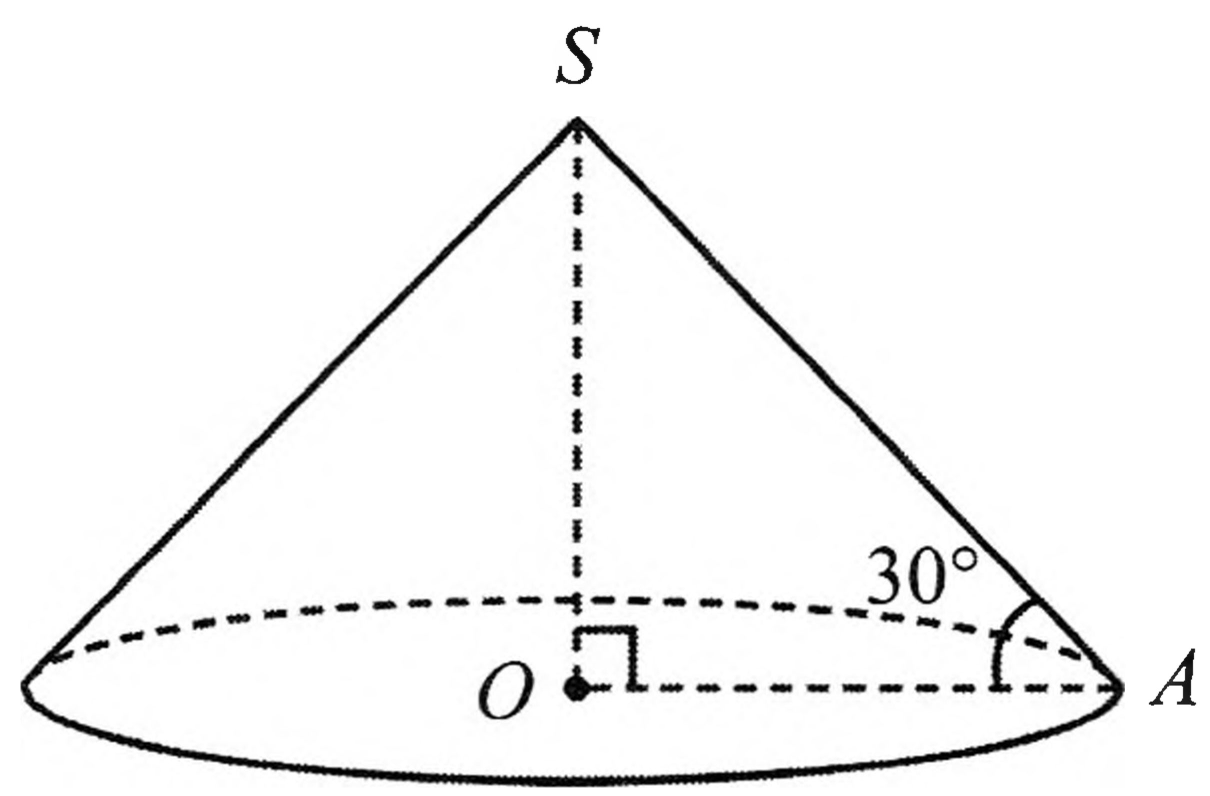
$$R = 2 \cdot 6;\ R = 12.$$

Ответ: 12.

14. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30 градусов. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Если вы забыли, что такое образующая, — смотрите нашу таблицу с формулами для тел вращения. А что значит «наклонена к плоскости основания»?

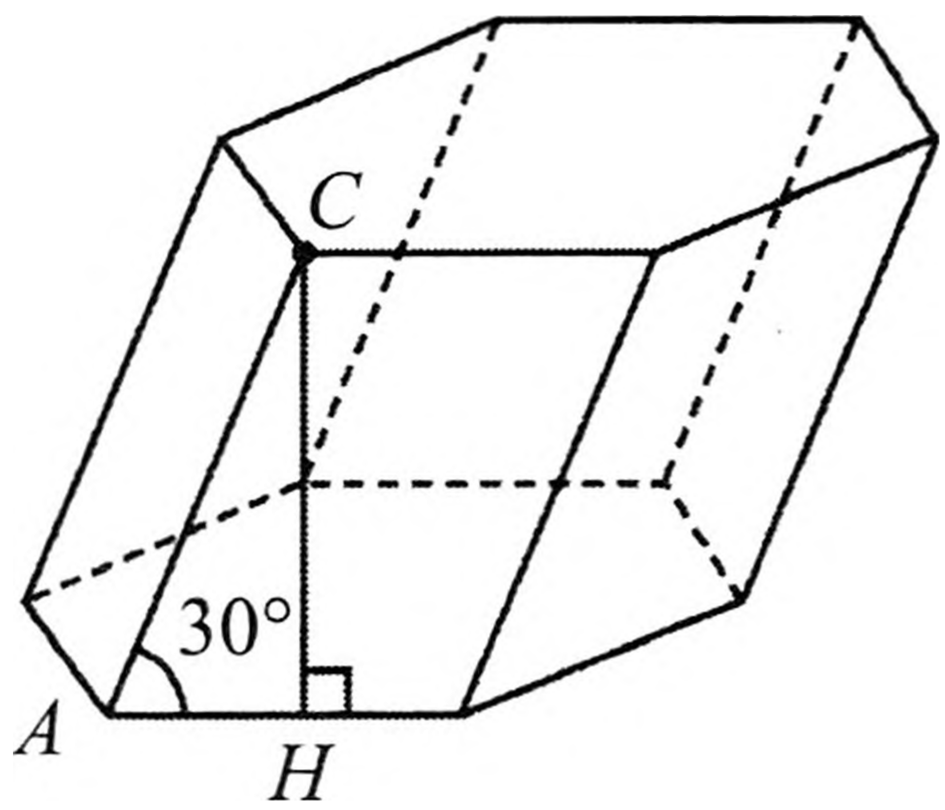
Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то есть угол OAS.



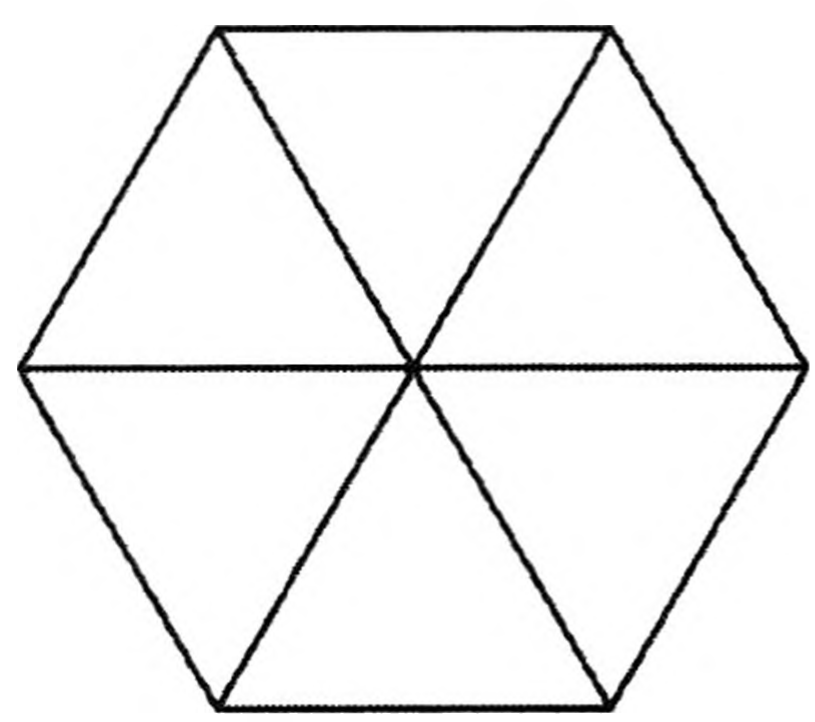
Из прямоугольного треугольника AOS находим, что $OS = h = 1$, $AO = R = \sqrt{3}$. Объем конуса найдем по известной формуле и поделим на π.

Ответ: 3.

15. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30 градусов.



Нарисуйте вид сверху, то есть правильный шестиугольник. У него все стороны равны, все углы тоже равны.



Как найти площадь правильного шестиугольника, если специальную формулу вы не знаете?

Проще всего разбить его на 6 одинаковых равносторонних треугольников. Формула площади равностороннего треугольника вам известна:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60°.$$

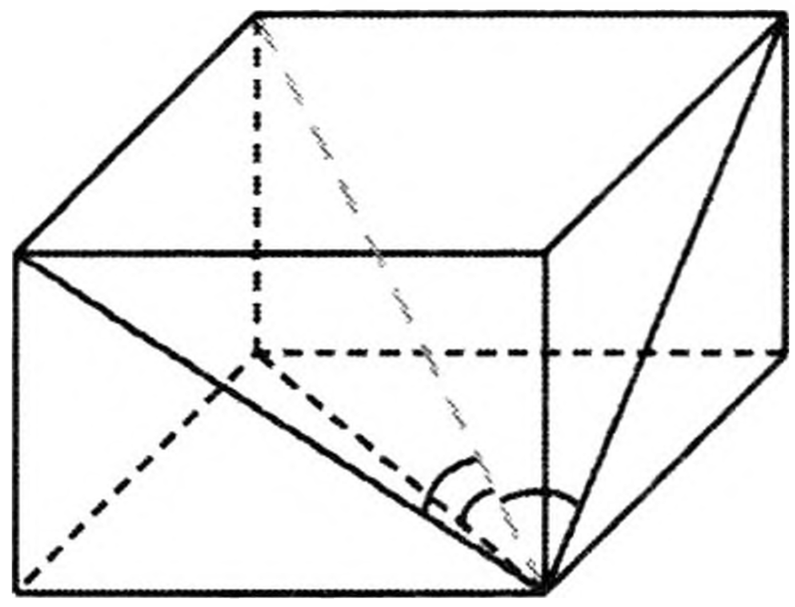
Подставив числа в формулу, получим, что площадь основания равна $12\sqrt{3}$. Теперь найдите высоту и объем.

Высота призмы — это отрезок, перпендикулярный ее основаниям. Из прямоугольного треугольника ACH находим:

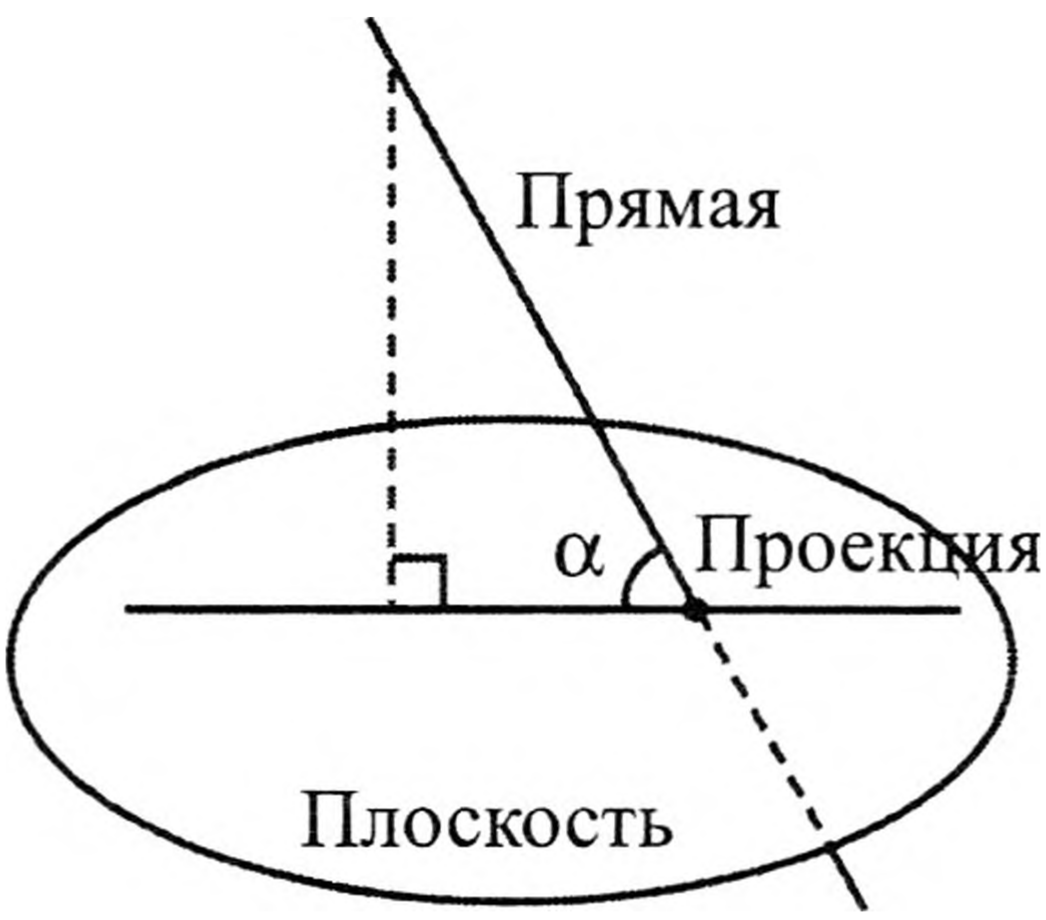
$$h = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}.$$

Ответ: 36.

16. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{2}$ и образует углы 30, 30 и 45 градусов с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

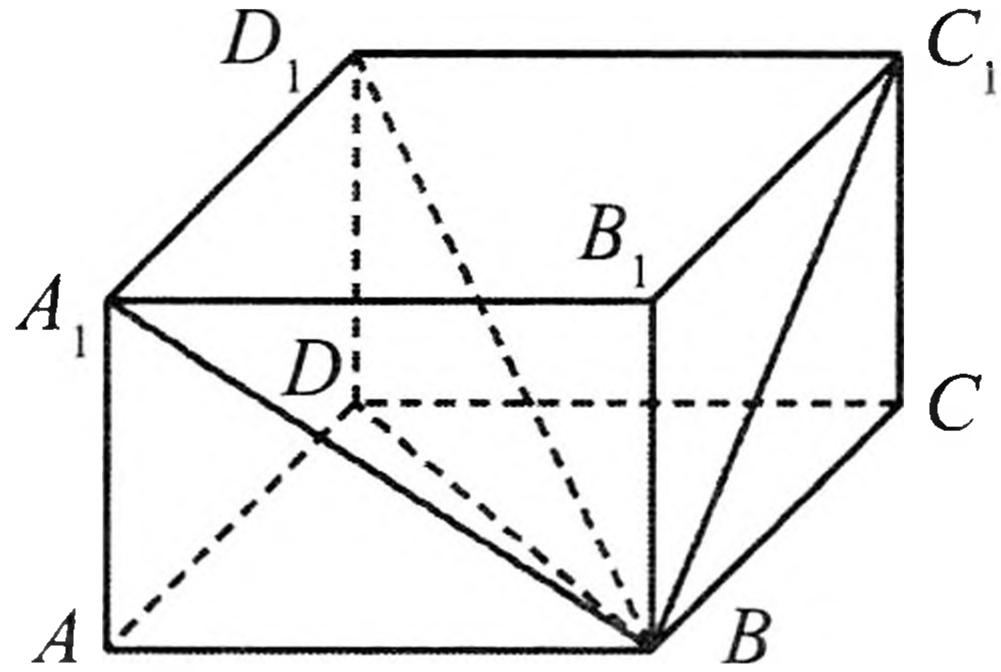


Мы уже говорили, что угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.



Обозначим вершины параллелепипеда.

Проекцией диагонали BD_1 на нижнее основание будет отрезок BD. Пусть диагональ образует угол 45 градусов именно с плоскостью нижнего основания.



Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD_1 и найдем высоту параллелепипеда, а затем его длину и ширину.

$DD_1 = BD_1 \cdot \sin 45° = 1$. Мы нашли высоту параллелепипеда.

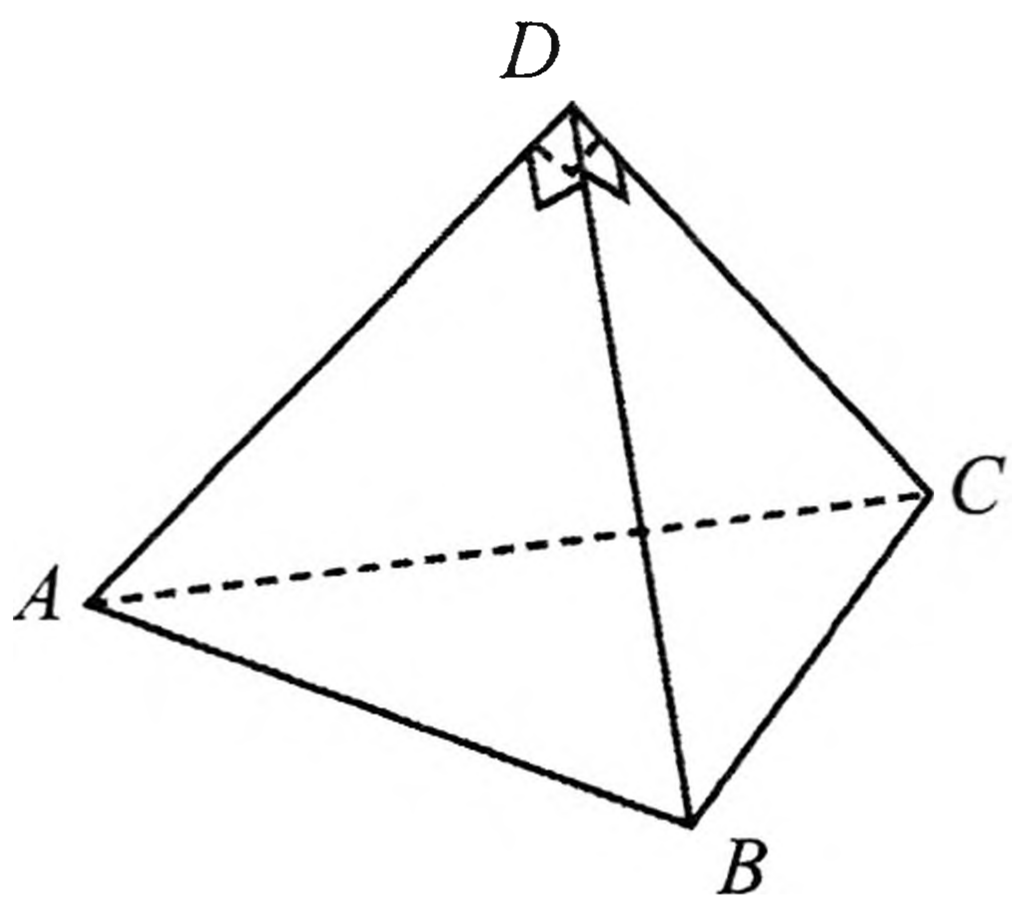
Проекцией BD_1 на переднюю грань будет отрезок A_1B.
Из прямоугольного треугольника A_1BD_1 найдем

$$A_1D_1 = BD_1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

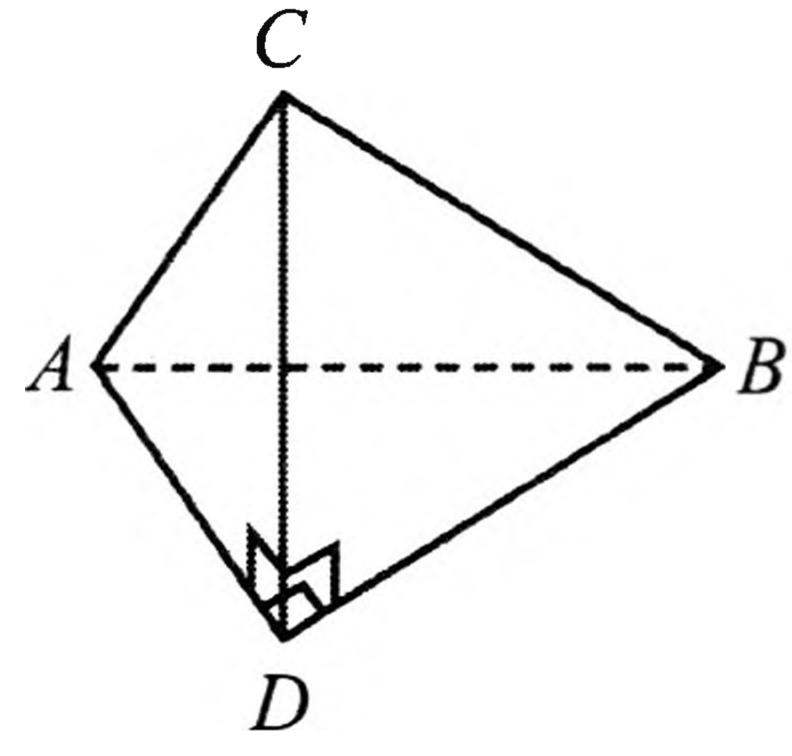
Мы нашли ширину параллелепипеда. А его длина (то есть отрезок C_1D_1) находится аналогично. Она тоже равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем параллелепипеда равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

17. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



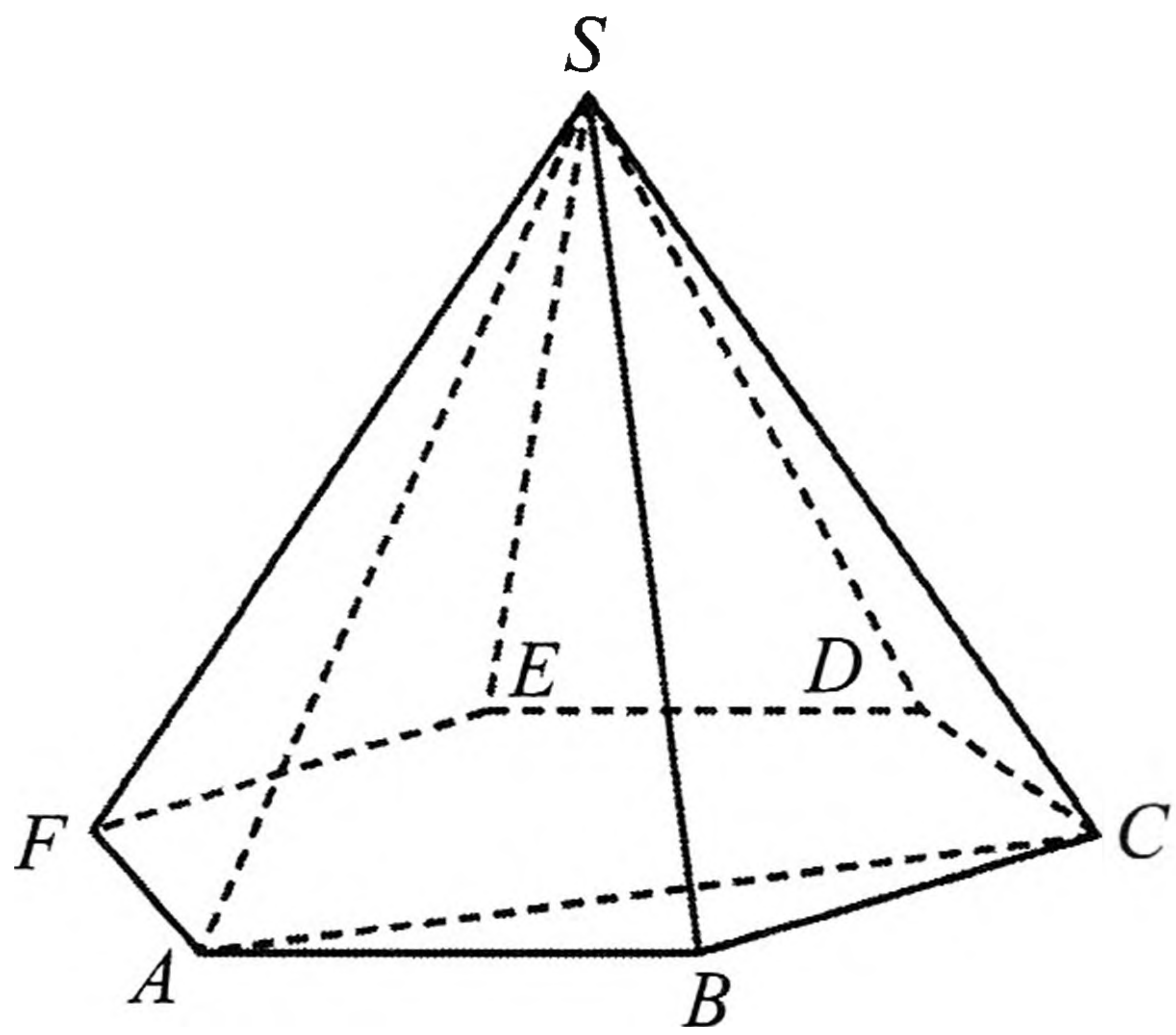
Если действовать «в лоб», считая, что ABC — основание, мы получим стереометрическую задачу из второй части ЕГЭ. Но зачем такие сложности? Переверните чертеж. Посмотрите на него с другой точки зрения.



Объем пирамиды равен $\frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. В основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 4,5. Тогда объем пирамиды равен 4,5.

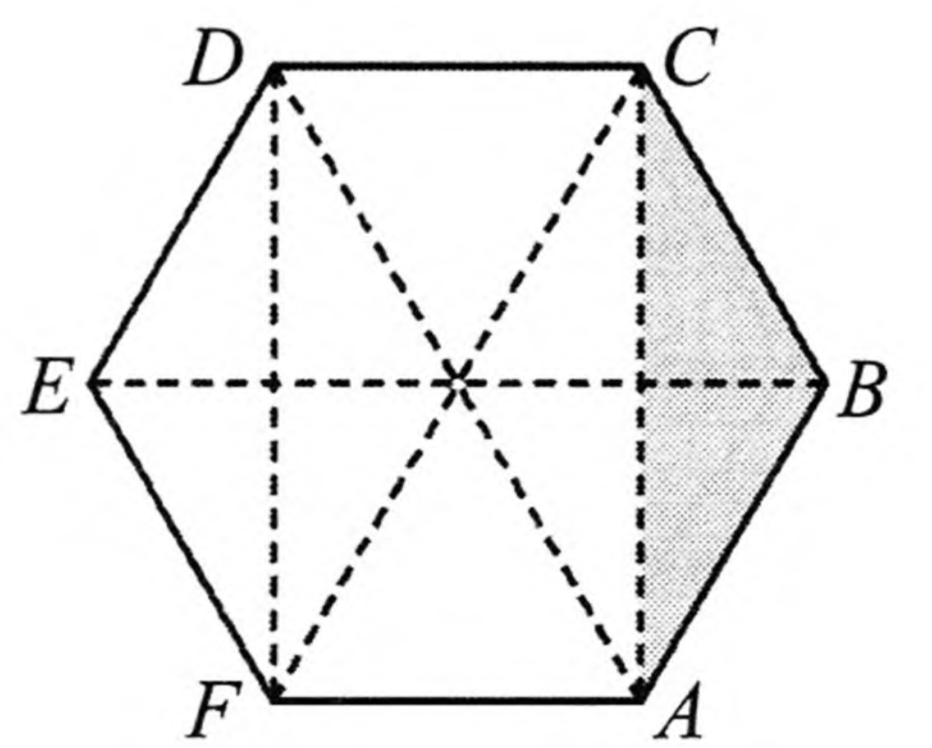
Ответ: 4,5.

18. Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *ABCDEF*, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



Треугольная и шестиугольная пирамиды, о которых говорится в условии задачи, имеют одинаковую высоту. Разные только площади основания. Нарисуйте вид снизу. Во сколько раз площадь основания треугольной пирамиды меньше, чем у шестиугольной?

Обратите внимание, что правильный шестиугольник удобнее всего разбить на треугольники. Если в задаче по стереометрии фигурирует шестиугольная пирамида или призма — вам пригодится этот прием.

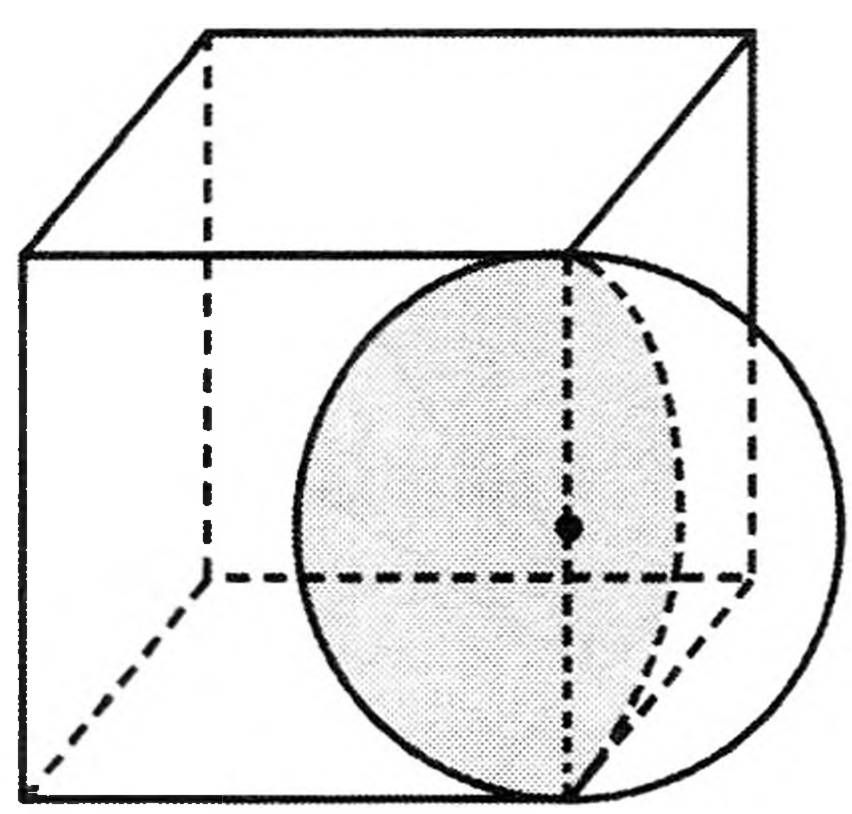


Видим, что площадь основания треугольной пирамиды в 6 раз меньше, чем площадь основания шестиугольной.

Ответ: 6.

Если в условии задачи есть рисунок — значит, повезло. Рисунок — это уже половина решения. А если его нет? Значит, рисуйте сами, как умеете. С каждым разом у вас будет получаться все лучше и лучше. Отговорки «не умею» или «рисование у нас было только в детском саду» — не принимаются. Вам ведь не девочку на шаре надо изобразить, а намного более простые объекты.

19. Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Обратите внимание, что $0{,}95 \cdot 2 = 1{,}9$. Значит, сторона куба является диаметром шара. Осталось понять, какая часть шара лежит внутри куба. Нарисуем чертеж, и все станет понятно.

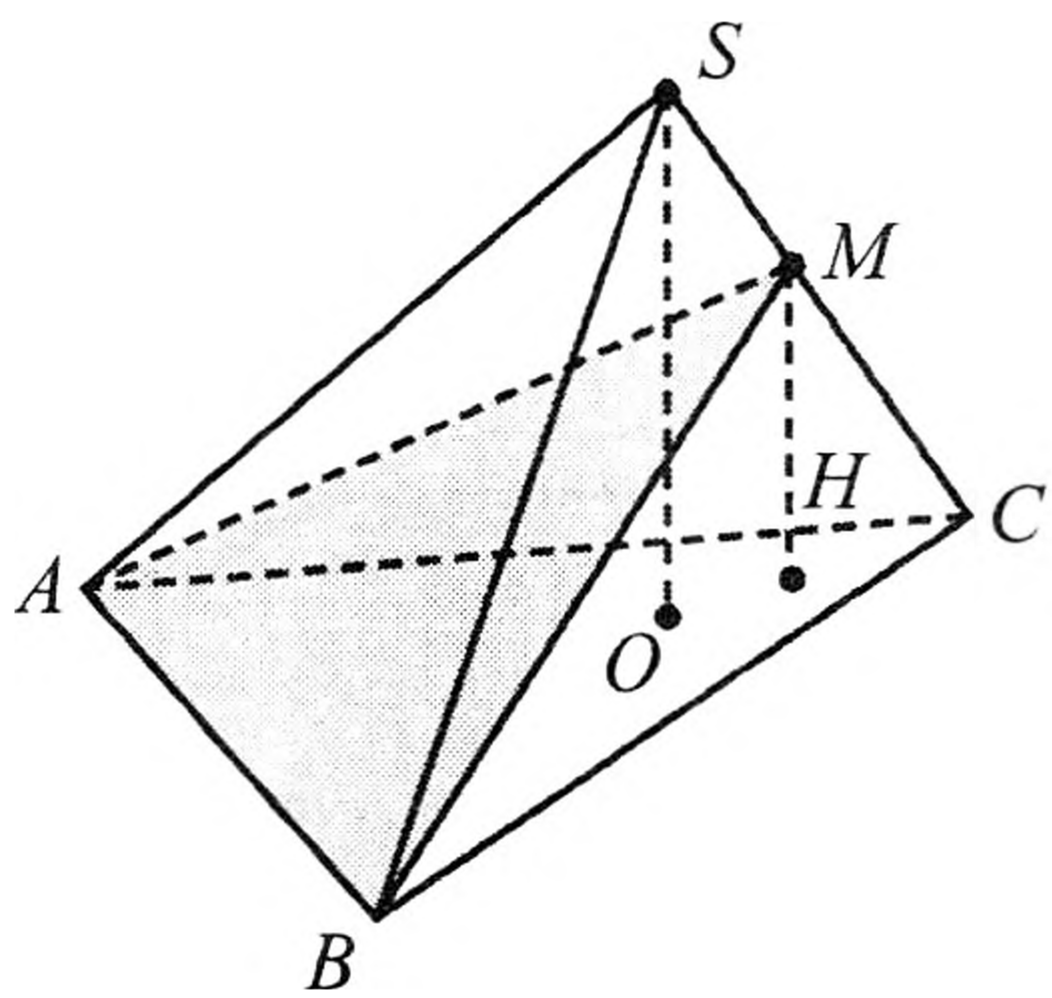
Ответ: 0,9025.

20. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$.

Здесь главное — понять, какая часть шара лежит внутри куба. Порисуйте кубики и шарики. Возьмите яблоко (его форма близка к шарообразной), потренируйтесь. Можете взять большую луковицу. Сделайте это сейчас. Ведь на ЕГЭ вам не дадут килограмма яблок или лука для выработки пространственного мышления. Подсказка в конце главы.

Ответ: 1,28.

21. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



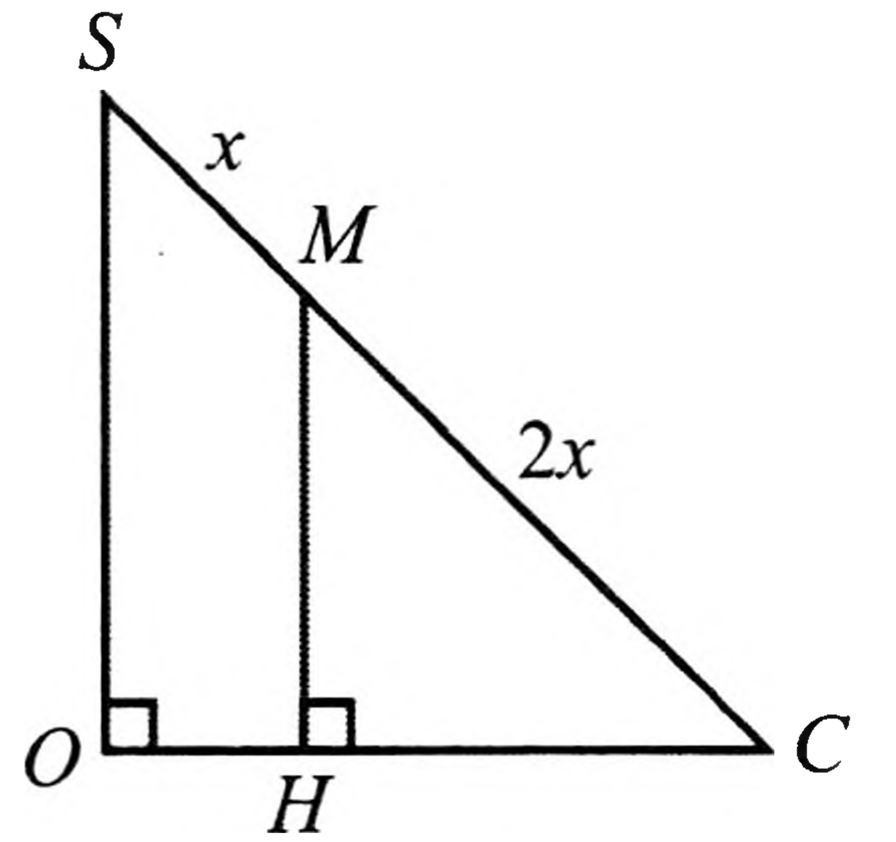
Прежде всего, стоит разобраться, что значит «точка делит боковое ребро в отношении 1:2, считая от вершины»? Это значит, что она делит его на отрезки, длины которых x и $2x$.

Плоскость ABM делит пирамиду $ABCS$ на две. Видите их на рисунке? У пирамид $ABCM$ и $ABCS$ общее основание ABC. Ясно, что отношение их объемов равно отношению высот.

Проведем перпендикуляры SO и MH к плоскости основания пирамиды.

SO — высота пирамиды $ABCS$, MH — высота пирамиды $ABCM$.

Очевидно, что отрезок SO параллелен отрезку MH, поскольку два перпендикуляра к одной плоскости параллельны друг другу. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, причем только одну. Итак, точки S, M, C, O и H лежат в одной плоскости, то есть мы от стереометрической задачи перешли к «плоской», планиметрической.



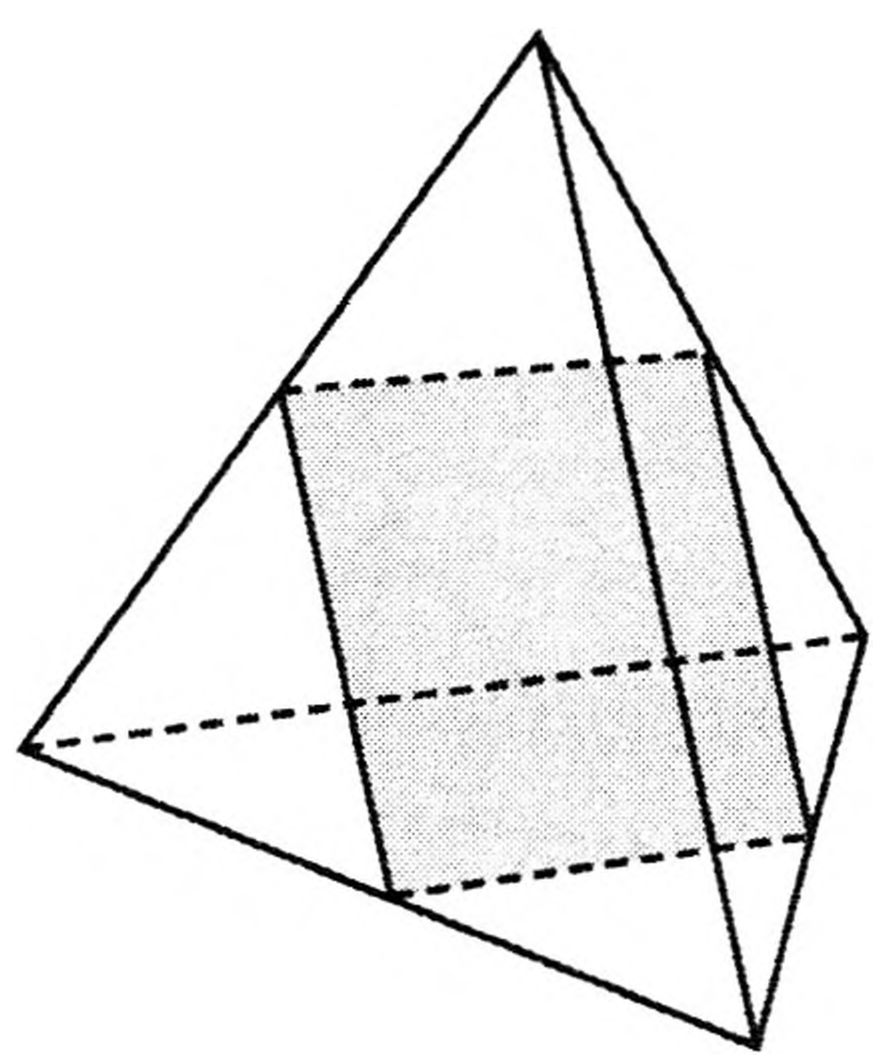
Треугольники SOC и MHC подобны.

$MC : SC = MH : SO = 2 : 3.$

Значит, $MN = \frac{2}{3} SO$. Объем пирамиды $ABCM$ равен $\frac{2}{3}$ объема пирамиды $ABCS$.

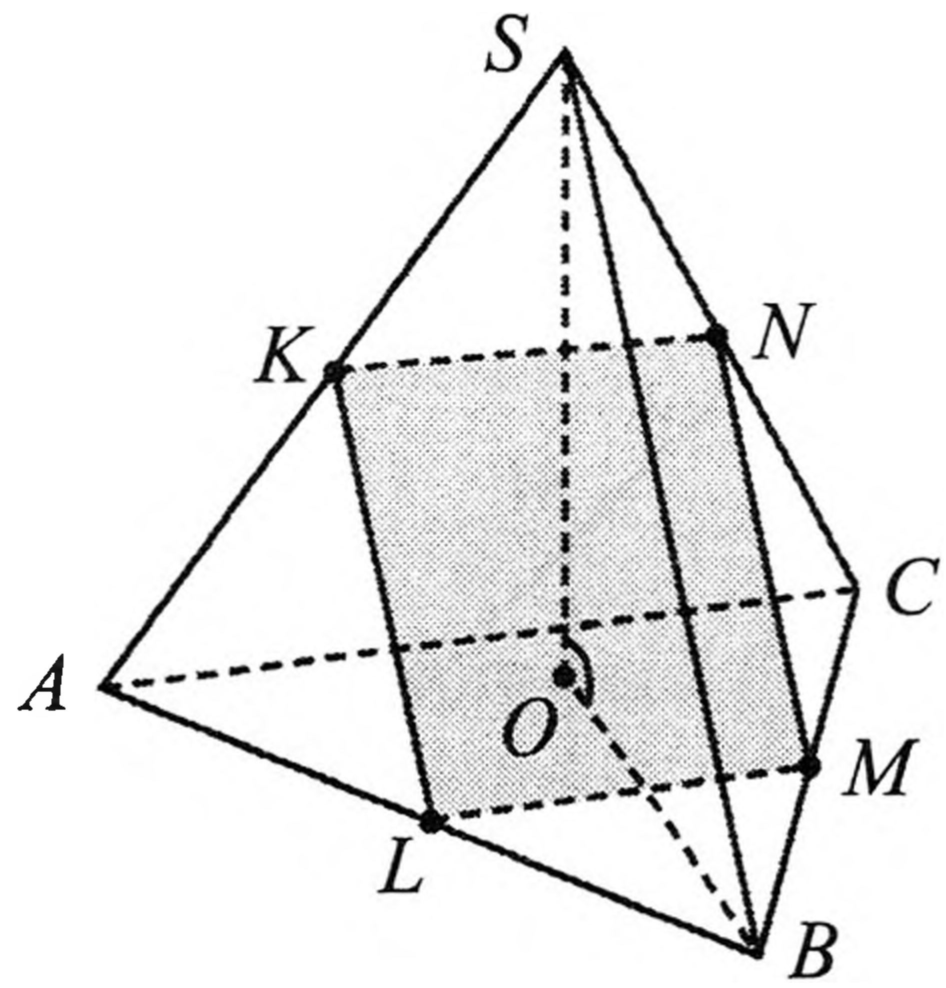
Ответ: 10.

22. Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Все ребра равны, значит, тетраэдр — правильный. Каждая его грань является правильным треугольником.

Как вы думаете, какая фигура получится в сечении?



Заметим, что отрезок KL — средняя линия треугольника ASB.

Тогда $MN = KL$, поскольку MN — средняя линия треугольника BSC.

Аналогично, $LM = KN = MN = KL$. Значит, $KLMN$ — ромб, все стороны которого равны 0,5.

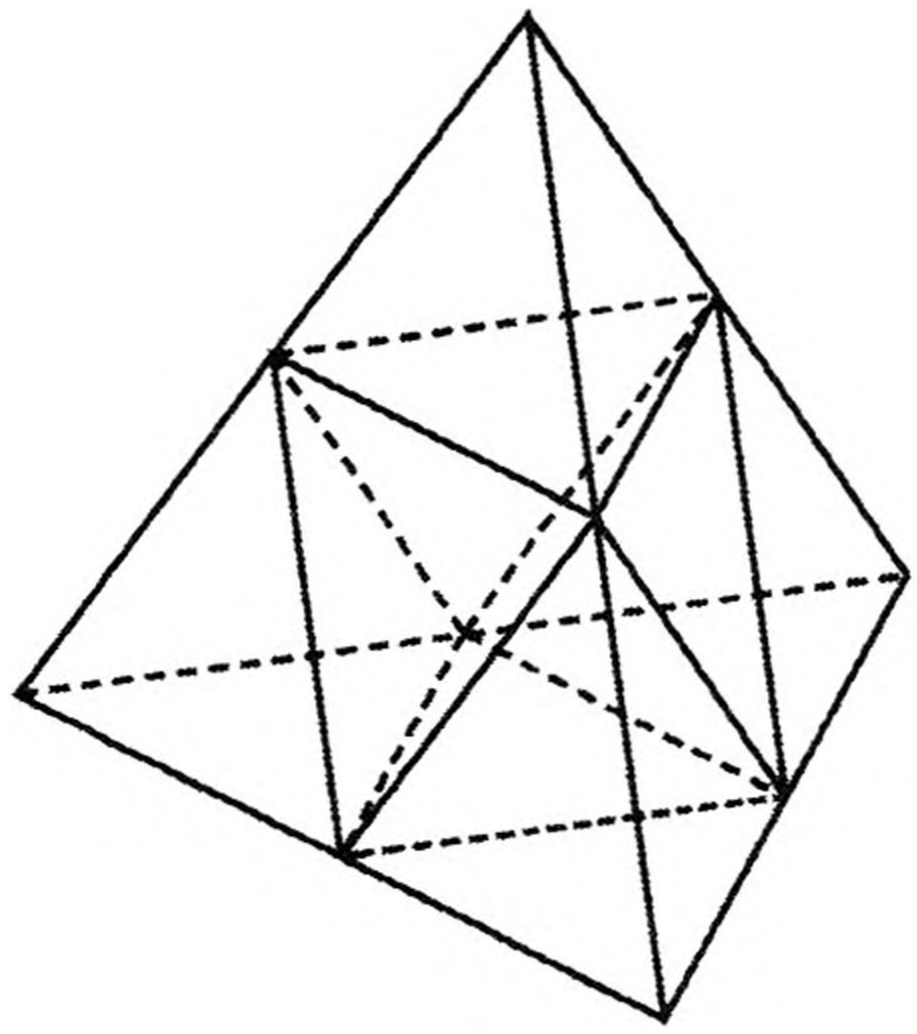
Вспомните теорему о трех перпендикулярах. Постарайтесь доказать, что $KLMN$ квадрат.

Площадь этого квадрата найти легко.

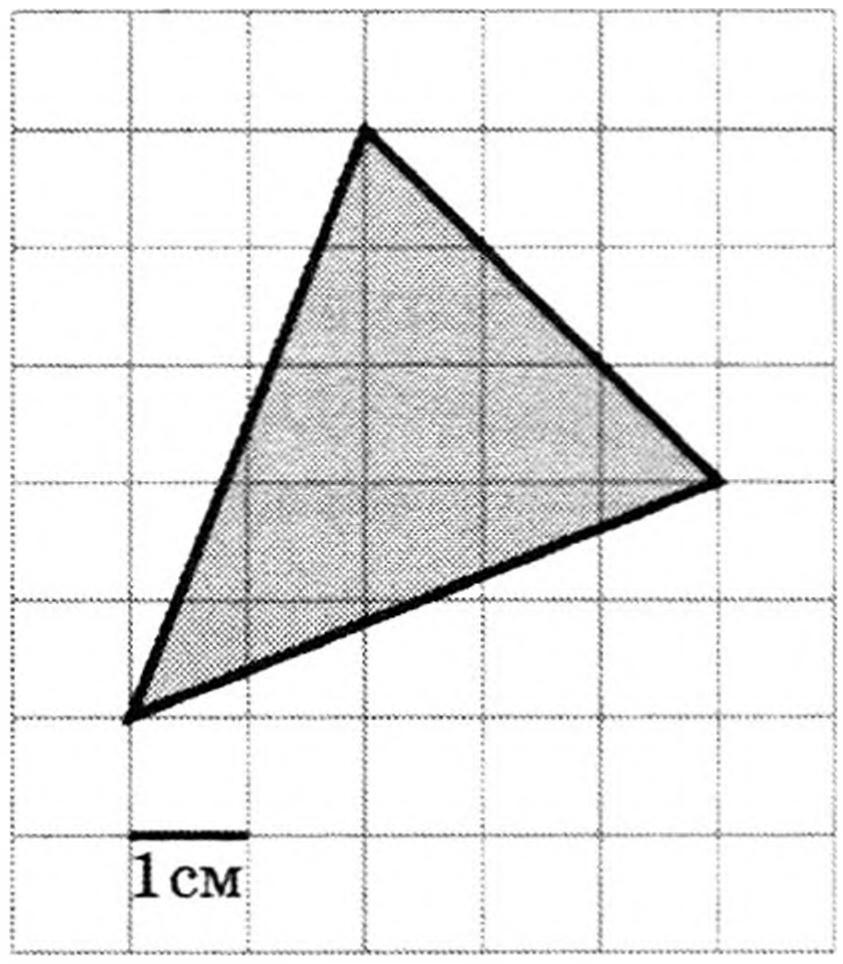
Ответ: 0,25.

Вот мы и дошли до самых сложных задач по стереометрии, а также секретных приемов, применяемых для их решения.

23. Объем тетраэдра равен 1,9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



Можно долго искать формулу объема октаэдра (именно он там и находится, в середине), а можно поступить умнее. Помните, что мы делали, если требовалось найти площадь неудобно расположенной фигуры?



Мы говорили, что проще всего посчитать площадь квадрата со стороной 5, в который вписан данный треугольник. И вычесть из нее площади трех прямоугольных треугольников. Видите их на рисунке?

В нашей задаче про тетраэдр и многогранник можно поступить аналогично. Сделайте это.

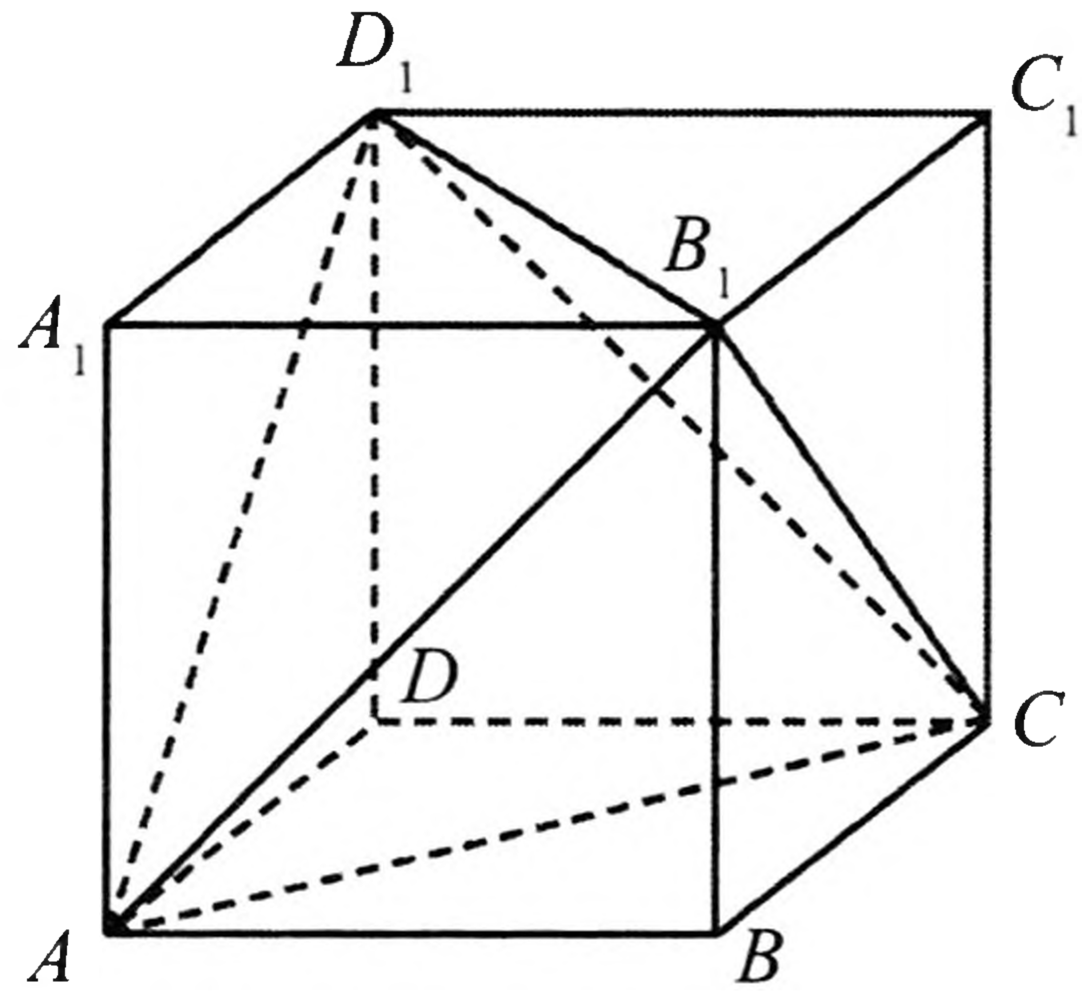
Как получился многогранник в серединке? От исходного тетраэдра отрезали четыре маленьких тетраэдра, объем каждого из которых в 8 раз меньше, чем объем большого (поскольку сторона основания в два раза меньше). Получаем:

$$V-\frac{4}{8}V=\frac{1}{2}V.$$

Ответ: 0,95.

24. Объем параллелепипеда равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

Обратите внимание, нарисован куб, а написано — параллелепипед. Мы знаем, что его объем равен 4,5, но не знаем, чему равны его длина, ширина и высота. Обозначим их a, b и c. Не так-то просто найти площадь основания и высоту пирамиды AD_1CB_1. Так может, и не надо этого делать?



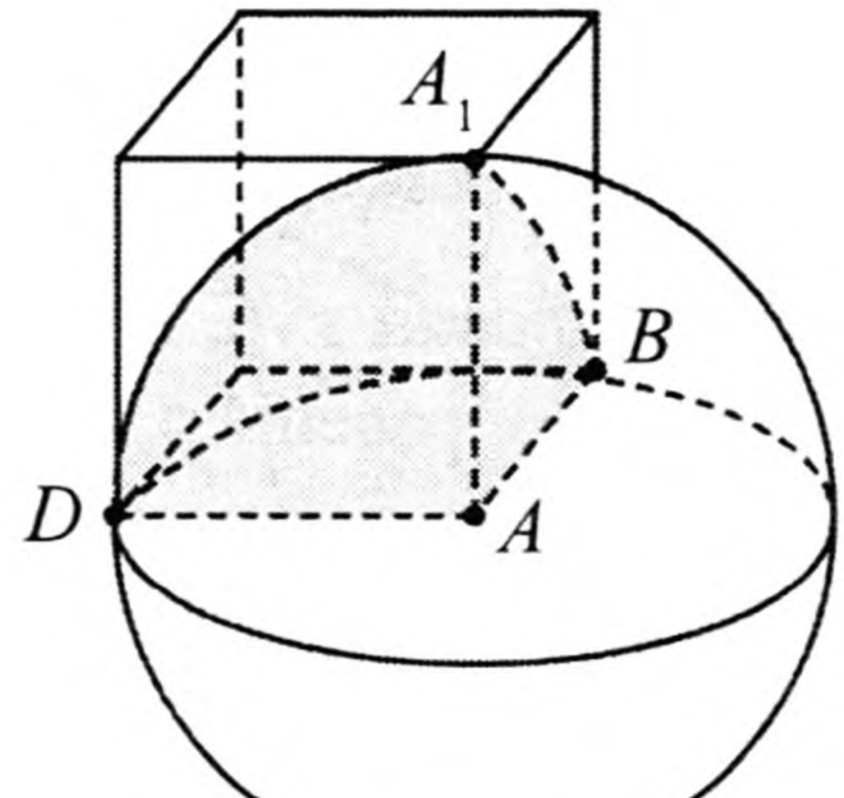
Есть более удобный способ — тот же, что и в предыдущей задаче. Найдите объем пирамиды AD_1CB_1 как разность объемов. Что нужно отрезать от куба, чтобы получилась пирамида AD_1CB_1?

Пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрежем от параллелепипеда четыре пирамиды по углам — $ABCB_1$, D_1, B_1CC_1, A, $A_1D_1B_1$ и $ADCD_1$. А объем каждой из них легко посчитать — так, как мы делали в первой задаче этой главы. Например, объем пирамиды $ABCB_1$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Объем всех четырех пирамид, которые отрезали, равен $\frac{2}{3}$ объема параллелепипеда.

Значит, объем пирамиды AD_1CB_1 равен $\frac{1}{3}$ объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

Подсказка к задаче 20



Понятие функции. Линейная, квадратичная, дробно-рациональная функция

Числовые множества

ЕГЭ по математике — экзамен практический. Однако основные математические понятия надо знать четко. Поэтому — небольшая лекция о том, какие бывают числа.

Первые числа, которыми люди начали пользоваться в доисторические еще времена, **натуральные**, то есть целые и положительные: 1, 2, 3... Натуральные числа применяются для счета предметов. Они могут быть использованы в качестве номеров.

Число ноль не является натуральным. В самом деле, вряд ли вы скажете: «На столе стоит ноль чашек».

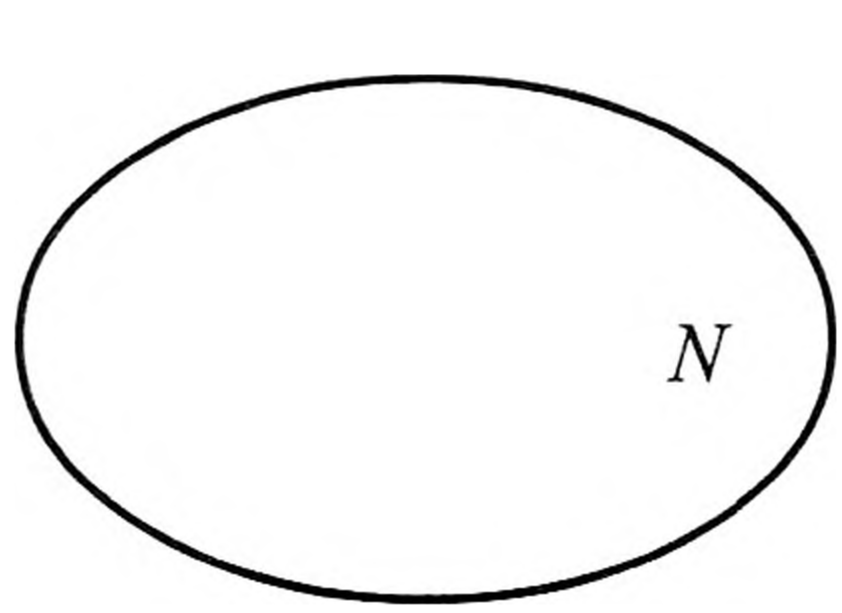
Наименьшее натуральное число — единица. Числа 15, 475, 98 764 — натуральные. Все вместе они составляют **множество** натуральных чисел, обозначаемое буквой N.

Что такое множество? Это одно из **первичных** понятий математики, то есть таких, которые лежат в основе логической системы и уже не определяются через другие понятия.

Попробуйте объяснить, что такое точка.

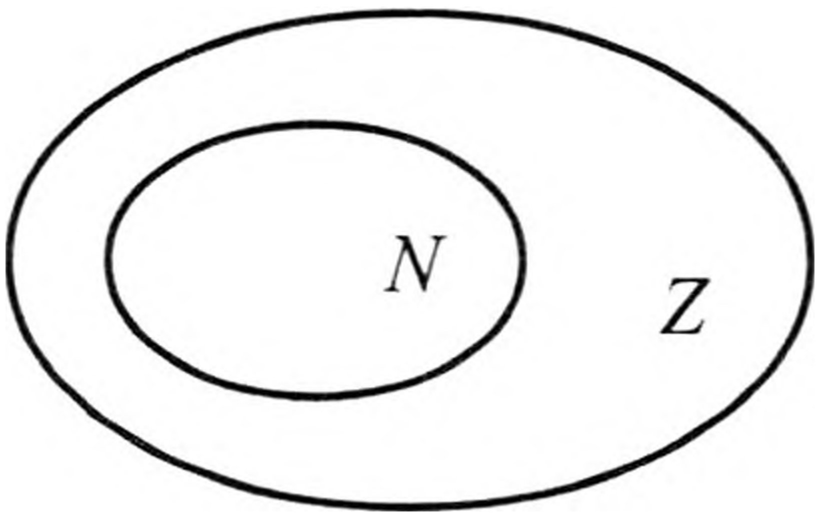
Или — что такое время? Ни один человек в мире еще не дал ответа на этот вопрос! Время, точка, множество — примеры первичных понятий.

Интуитивно мы понимаем, что множество — это набор или совокупность элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Множества обычно обозначаются заглавными буквами. Множество натуральных чисел мы условно изобразим вот так — как будто все натуральные числа поместили внутрь нарисованного овала:



Конечно же, числа бывают не только натуральными. Тысячи лет назад индийцы открыли (или изобрели) число «ноль» и отрицательные числа. Теперь они для нас привычны. Проверьте баланс своего мобильного телефона. Он может быть положительным, отрицательным или нулевым. А когда-то европейцы — древние греки и римляне — долгое время обходились без нуля. Сейчас нам трудно это представить, не правда ли?

Натуральные числа, целые отрицательные числа и ноль вместе составляют множество целых чисел, которое обозначается Z:



Обратите внимание, что множество целых чисел включает в себя множество натуральных.

Кроме целых чисел есть еще и дроби. Напомним, что дробь — это часть, доля, выражение вида $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. Например, $\frac{1}{7}$ — это одна часть из семи, 0,25 — это двадцать пять сотых. Десятичные дроби также можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Об этом мы говорили в самом начале книги, в первой главе. Например, $0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

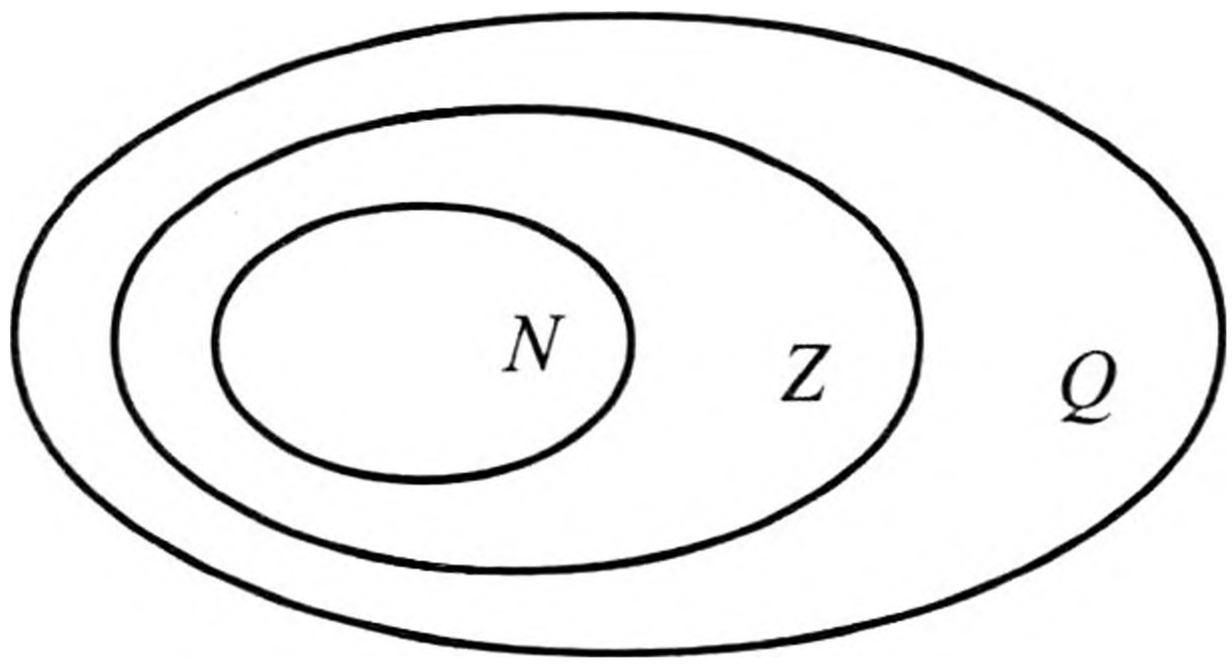
Целые числа (положительные и отрицательные) также можно записать в виде $\frac{p}{q}$ — хотя бы в виде дроби со знаменателем 1:

$$2=\frac{2}{1};\ 0=\frac{0}{1};\ -5=\frac{-5}{1}.$$

Все числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, называются **рациональными**.

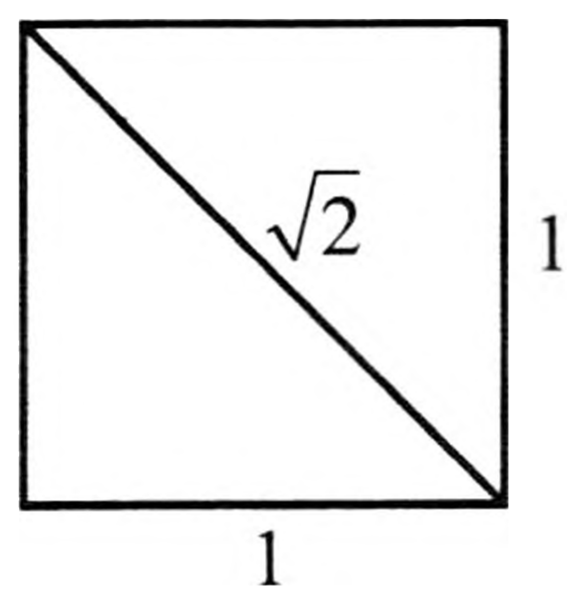
$4;\ -1,2;\ \frac{7}{8};\ 1,26$ — примеры рациональных чисел.

Множество рациональных чисел обозначается буквой Q. Ясно, что оно включает в себя множество целых чисел.



Хорошо, но любое ли число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$? Иными словами, все ли числа являются рациональными? Долгое время (в античности) считалось, что любое число можно записать в виде дроби с числителем и знаменателем. Дело в том, что для древних греков числа и их соотношения были почти священны. Пифагорейцы говорили: «Числа правят миром». Они верили, что все основные принципы мироздания можно выразить языком математики, что соотношения чисел определяют гармонию, закон и порядок природы, перед которым склоняют голову даже олимпийские боги. Греческое искусство, особенно архитектура, подчинялось правилам, канонам. Греки точно установили, какими должны быть пропорции в архитектуре — например, отношение диаметра колонны к ее длине, — чтобы здание было гармоничным. И все эти пропорции были отношениями целых чисел.

Но однажды в стройной и гармоничной системе божественных пропорций наметилась досадная брешь. Оказалось, что если нарисовать квадрат со стороной 1, его диагональ не выражается никакой дробью вида $\frac{p}{q}$.



По теореме Пифагора диагональ такого квадрата равна $\sqrt{2}$, то есть положительному числу, квадрат которого равен двум.

Можно доказать, что это число не является рациональным. Но сами пифагорейцы не сразу смогли смириться с тем, что $\sqrt{2}$ невозможно записать в виде $\frac{p}{q}$ — ведь это наносило удар всей их философской системе!

Открытие долго держалось в тайне, пока наконец ученик Пифагора Гиппас не разгласил его. За это Гиппас был изгнан из школы Пифагора, бежал из города и утонул во время кораблекрушения. Греки увидели в этом возмездие богов и решили, что от таких чисел, как $\sqrt{2}$, лучше держаться подальше. Числа, которые невозможно записать в виде $\frac{p}{q}$, такие, как $\sqrt{2}$, назвали **иррациональными**, то есть неразумными, неправильными.

По другой легенде, Гиппаса во время морского похода выбросили за борт возмущенные коллеги-пифагорейцы.

Но иррациональные числа ничуть не хуже рациональных! Они отнюдь не ограничиваются выражениями вида $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$. К **иррациональным** относятся также

- число π — отношение длины окружности к ее диаметру;
- число e, названное в честь Эйлера (об этом числе вы узнаете, изучая функции и производные);
- задающее золотое сечение число φ — удивительное число Фибоначчи, вокруг которого построен весь детективный сюжет фильма «Код да Винчи»;
- числа вида $\log_2 5$, $\sin 23°$;
- необозримое количество других чисел.

Давайте еще раз повторим, в чем разница между рациональными и иррациональными числами. Рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, например, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{11}$. А если мы просто поделим в столбик 7 на 11 — обнаружим интересную закономерность:

$$7 : 11 = 0{,}636363636363\ldots$$

Мы видим, что цифры повторяются, то есть дробь является **периодической**. Таким образом, любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической. А вот в числе $\pi = 3{,}1415926...$ цифры не заканчиваются и не повторяются. Иррациональные числа — это бесконечные **непериодические** дроби. Вместе оба множества — рациональных и иррациональных чисел — образуют множество **действительных** (или вещественных) чисел, которое обозначается R (от слова *real*).

Возникает вопрос: это всё? Все ли числа, какие только могут быть, содержатся во множестве действительных чисел? Или за его пределами еще что-то есть?

Для успешной сдачи ЕГЭ других чисел не нужно. Да и, казалось бы, мы назвали все возможные числа. Но вот какой парадокс: положительные и отрицательные числа симметрично расположены на числовой прямой, верно? И при этом из положительных чисел можно извлечь квадратный корень, а из отрицательных — нельзя! Не существует действительного числа, которое при возведении в квадрат дает -1.

Оказывается, однако, что существует числовое множество, содержащее в себе множество R и бесконечное множество других чисел, не являющихся действительными. В этом множестве находится мнимая единица i, для которой верно равенство $i^2 = -1$. И называется оно *множеством комплексных чисел*.

Комплексные числа служат естественным языком описания многих физических явлений. Те из вас, кто выбрал инженерную специальность (в особенности связанную с распространением волн, электротехникой и радиофизикой), непременно встретятся с ними. В отличие от действительных («вещественных») чисел, применяемых для описания материального, плотного мира «вещей», комплексные числа оказываются удобным инструментом для построения математических моделей волн и колебаний всевозможной природы.

Ну а будущим физикам наверняка интересно будет узнать, что элементарные частицы живут и взаимодействуют по законам именно комплексных чисел. Наукой, описывающей комплексный микромир, является квантовая физика.

Что такое функция?

Понятие **функции** — одно из основных в математике. Без него невозможно освоить более сложные темы ЕГЭ.

На уроках математики вы часто слышите слово «функция». Вы строите графики функций, занимаетесь исследованием функции, находите наибольшее или наименьшее значение функции. Но для понимания всех этих действий давайте определим, что такое функция.

Определение функции можно дать несколькими способами. Все они будут дополнять друг друга.

1. Функция — это **зависимость одной переменной величины от другой**. Другими словами, **взаимосвязь** между величинами. Любой физический закон, любая формула отражает такую взаимосвязь величин.

Например, формула $p = \rho gh$ — это зависимость давления жидкости p от глубины h.

Чем больше глубина, тем больше давление жидкости. Можно сказать, что давление жидкости является функцией от глубины, на которой его измеряют.

Знакомое вам обозначение $y = f(x)$ как раз и выражает идею такой зависимости одной величины от другой. Величина y зависит от величины x по определенному закону, или правилу, обозначаемому f.

Другими словами: меняем x (независимую переменную, или **аргумент**) — и по определенному правилу меняется y.

Совсем необязательно обозначать переменные x и y. Например, $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$ — зависимость длины L от температуры t, то есть закон теплового расширения. Сама запись $L(t)$ означает, что величина L зависит от t.

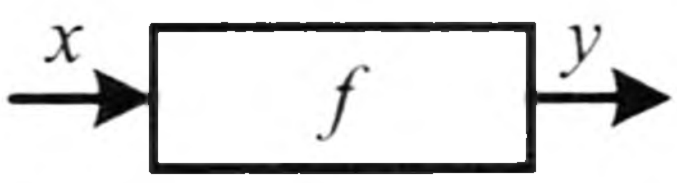
2. Можно дать и другое определение.

Функция — это определенное **действие** над переменной.

Это означает, что мы берем величину x, по определенному правилу $f(x)$ делаем с ней некоторое действие (например, возводим в квадрат или вычисляем ее логарифм) — и получаем величину y.

Узнаете в этом описании свой калькулятор? На одной кнопке написано $\sqrt{}$, на другой — log, на третьей — sin... Нажимаете кнопку — и калькулятор совершает предписанное действие с тем числом, которое вы ввели.

В технической литературе встречается определение функции как устройства, на вход которого подается x — а на выходе получается y.



Итак, функция — это действие над переменной. В этом значении слово «функция» применяется и в областях, далеких от математики. Например, можно говорить о функциях мобильного телефона, о функциях головного мозга или функциях депутата. Во всех этих случаях речь идет именно о совершаемых действиях.

3. Дадим еще одно определение функции — то, что чаще всего встречается в учебниках.

Функция — это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Например, функция $y = 2x$ каждому действительному числу x ставит в соответствие число, в два раза большее, чем x.

Повторим еще раз: каждому элементу множества X по определенному правилу мы ставим в соответствие элемент множества Y. Множество X называется **областью определения функции**. Множество Y — **областью значений**.

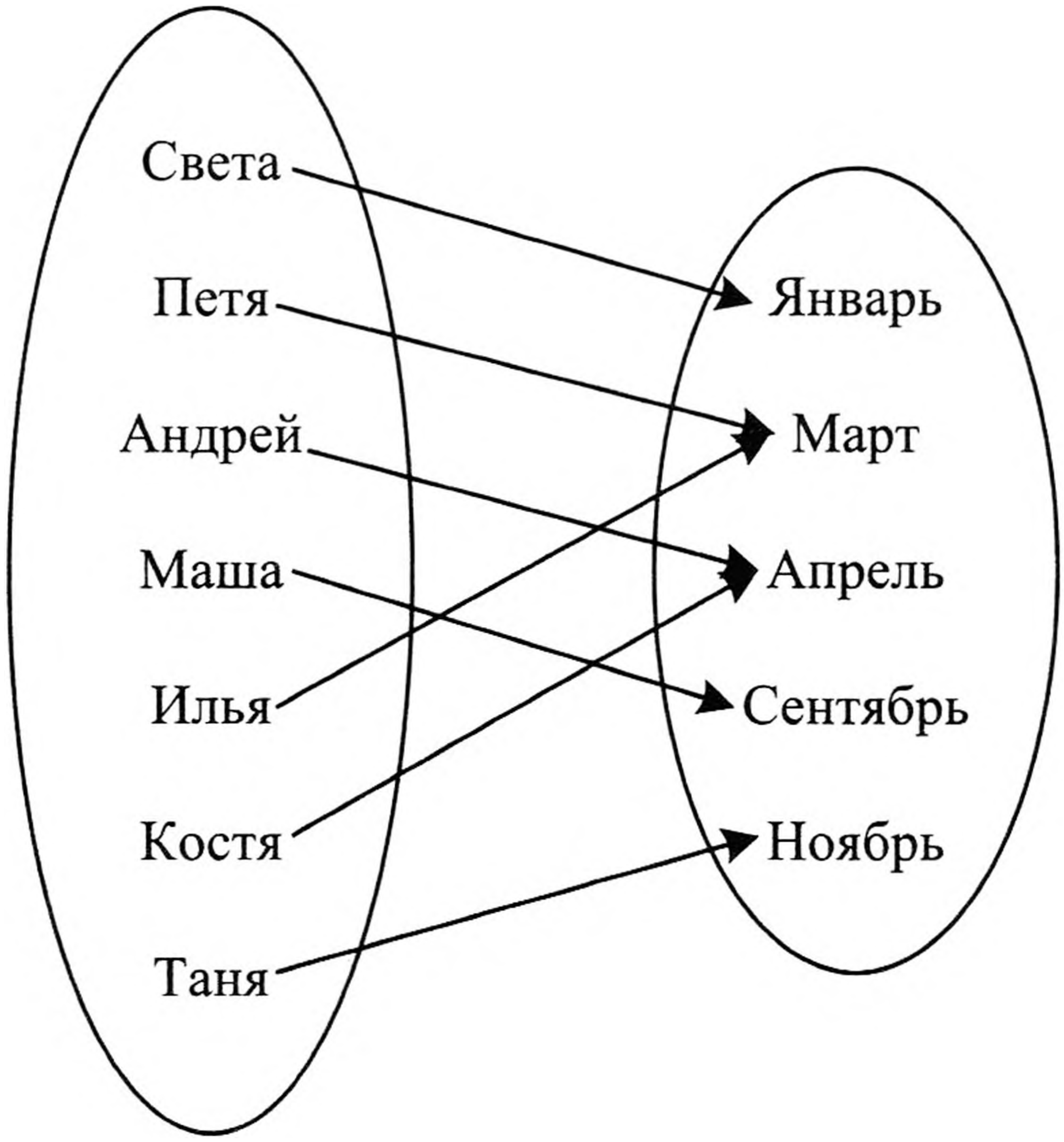
Но зачем здесь такое длинное уточнение: «каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго»? Оказывается, что соответствия между множествами тоже бывают разные.

Рассмотрим в качестве примера соответствие между двумя множествами — гражданами России, у которых есть паспорта, и номерами их паспортов. Ясно, что это соответствие взаимно однозначное — у каждого гражданина только один российский паспорт. И наоборот — по номеру паспорта можно найти человека.

В математике тоже есть такие взаимно однозначные функции. Например, линейная функция $y = 3x + 2$. Каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. И наоборот — зная y, можно однозначно найти x.

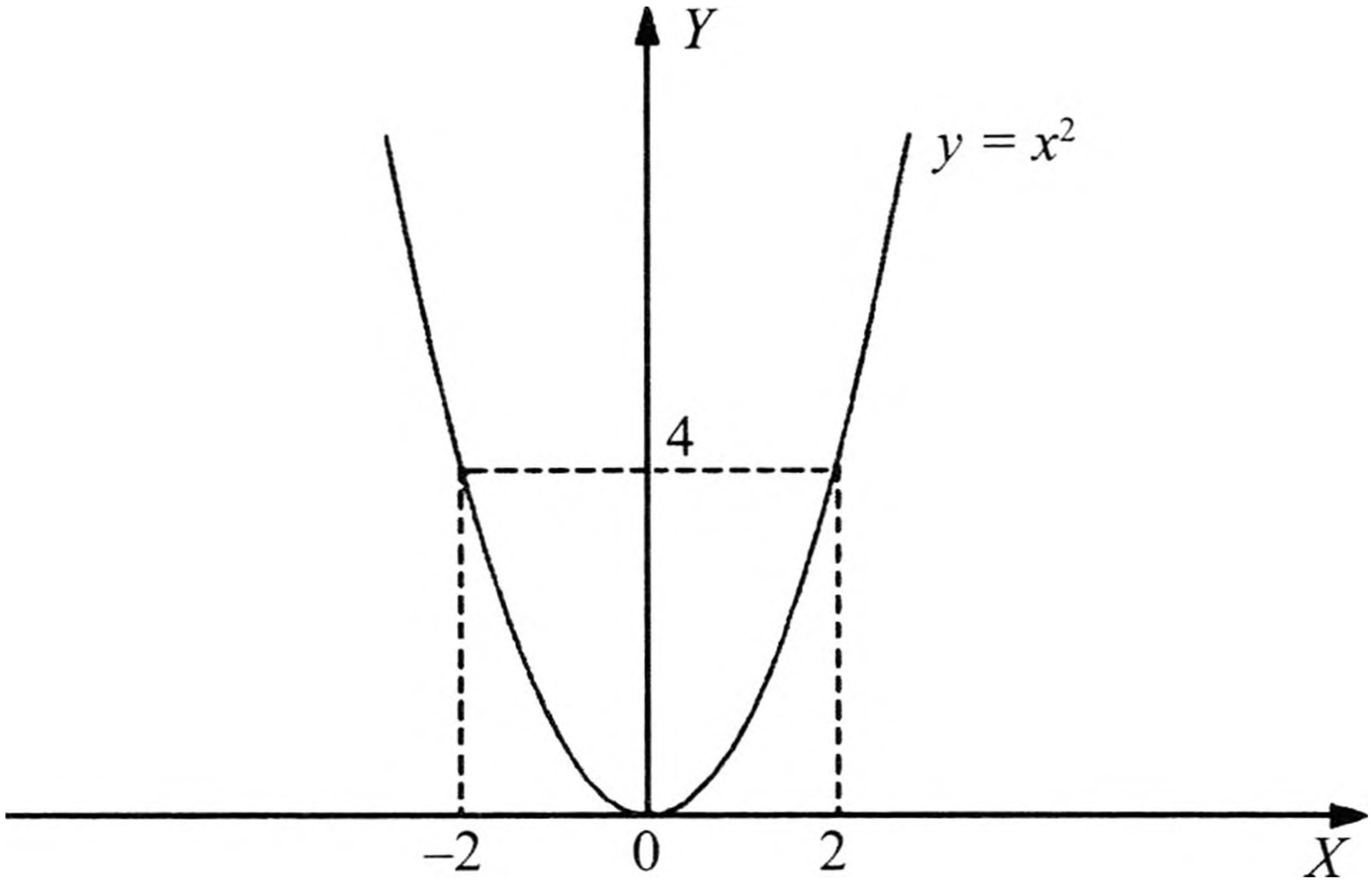
x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = 3x + 2$	-7	-4	-1	2	5	8

Вот другой вид соответствия между множествами: компания друзей и месяцы, в которые они родились.

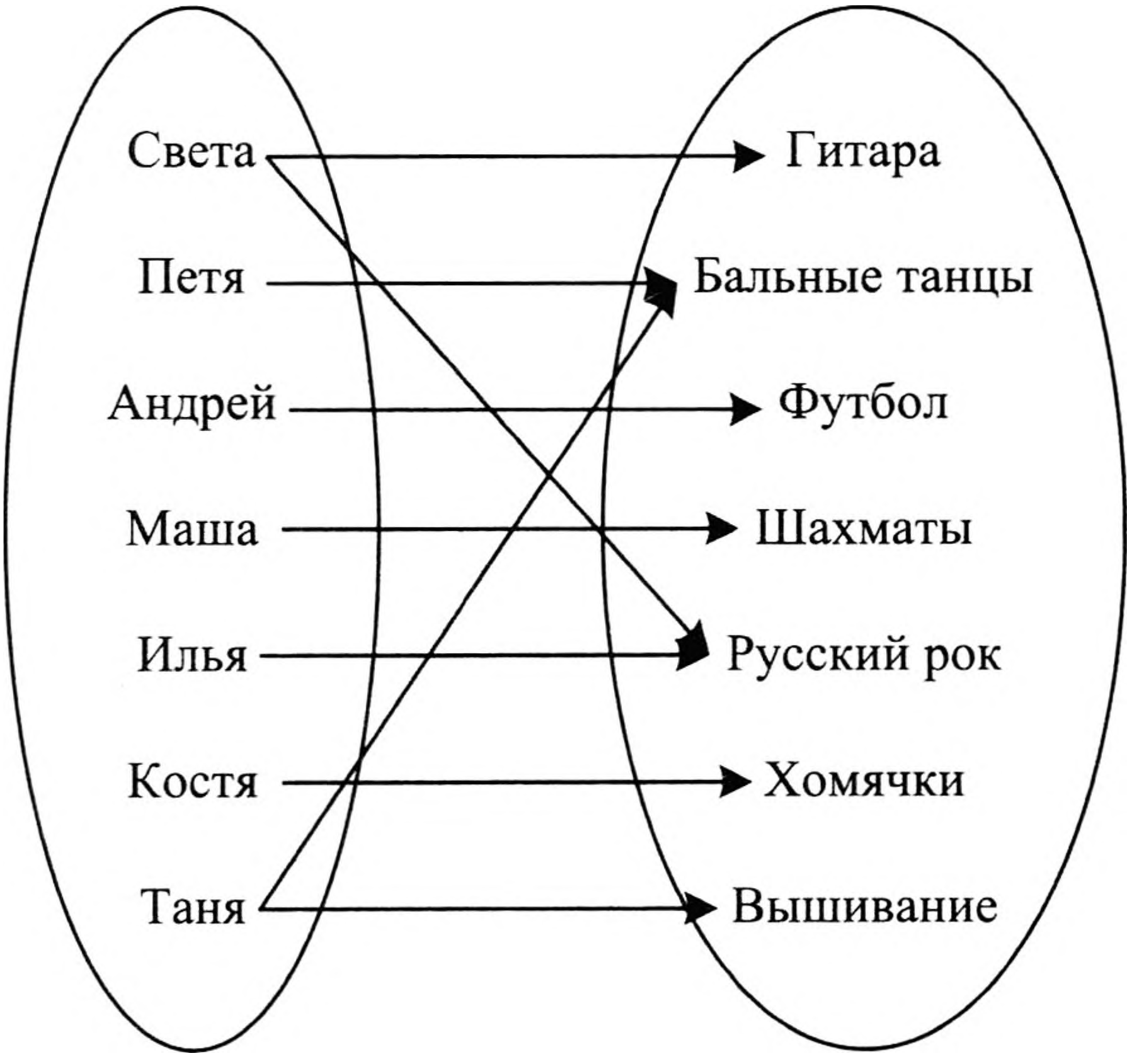


Каждый человек родился в какой-то определенный месяц, то есть каждому элементу из первого множества соответствует один и только один элемент из второго множества. Но при этом есть месяцы, соответствующие нескольким людям (например, в марте родились Петя и Илья). Стало быть, данное соответствие не является взаимно однозначным.

Пример такого соответствия в математике — функция $y = x^2$. Один и тот же элемент второго множества $y = 4$ соответствует двум разным элементам первого множества: $x = 2$ и $x = -2$.

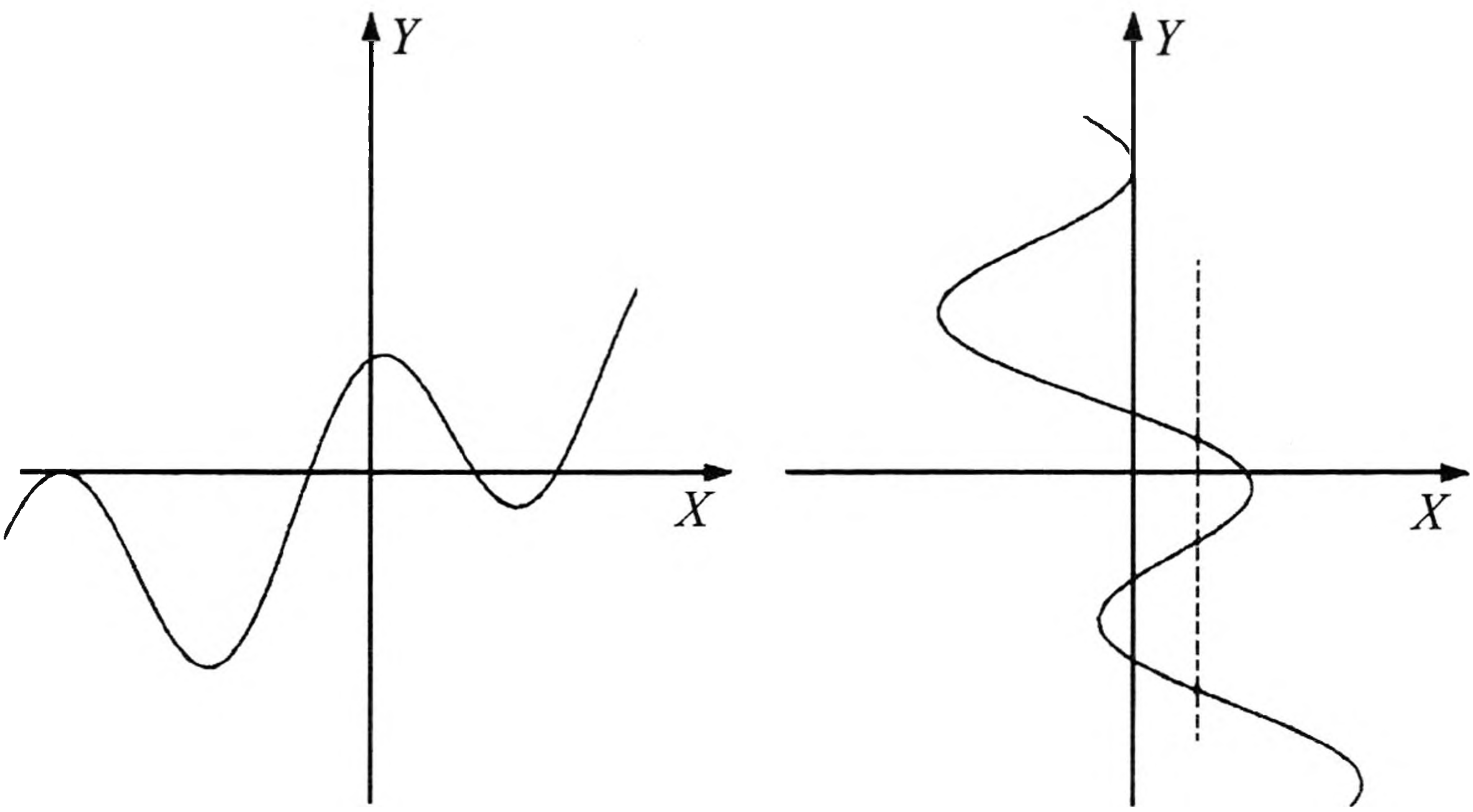


А каким должно быть соответствие между двумя множествами, чтобы оно не являлось функцией? Очень просто! Возьмем ту же компанию друзей и их хобби:



Как видим, в первом множестве есть элементы, которым соответствует более одного элемента второго множества. Например, Света увлекается гитарой и русским роком. Очень сложно было бы описать такое соответствие математически, не правда ли?

Вот другой пример. На рисунках изображены кривые. Как вы думаете, какая из них является графиком функции, а какая — нет?



Ответ очевиден. Первая кривая — это график некоторой функции, а вторая — нет. Ведь на ней есть точки, где каждому значению x соответствует не одно, а целых три значения y.

Перечислим *способы задания функции.*

1. С помощью формулы. Это удобный и привычный для нас способ.

$$y = \cos x;$$

$$y = x^3 - 2x^2;$$

$$z = f(t);$$

$$L(t) = L_0(1 + \alpha t).$$

Это примеры функций, заданных формулами.

2. Графический способ. Он является самым наглядным. На графике сразу видно все — возрастание и убывание функции, наибольшие и наименьшие значения, точки максимума и минимума. Дальше я расскажу об исследовании функции с помощью графика.

К тому же не всегда легко вывести точную формулу функции. Например, курс доллара (то есть зависимость стоимости доллара от времени) можно показать только на графике.

3. С помощью таблицы. В школе с этого способа вы когда-то начинали изучение темы «Функция» — строили таблицу и только после этого — график. А при экспериментальном исследовании какой-либо новой закономерности, когда еще не известны ни формула, ни график, этот способ будет единственно возможным.

4. С помощью описания того, как устроено соответствие. Бывает, что на разных участках функция задается разными формулами. Известная вам функция модуль, то есть $y = |x|$, задается описанием:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Кстати, обратите внимание на определение модуля. Оно означает, что модуль положительного числа равен самому этому числу. Модуль нуля равен нулю, а модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному. Таким образом, $|x|$ — величина всегда неотрицательная. Например,

$$|14| = 14;$$
$$|-9| = 9;$$
$$|0| = 0.$$

Понятие «функция» необходимо для решения уравнений, неравенств, задач с параметрами. Математический анализ, который ждет вас на первом курсе, — это наука именно о функциях. И даже в первой части ЕГЭ есть задачи на тему «функция».

1. Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

Прежде всего, что означают выражения $g(2-x)$ и $g(2+x)$?

По условию, функция $g(x)$ задана формулой: $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$.

Подставляя различные значения аргумента, мы будем получать соответствующие значения функции.

Подставим вместо x число 1.

$$g(1) = \sqrt[3]{1 \cdot (4-1)} = \sqrt[3]{3}.$$

Рассуждаем дальше:

$g(5)=\sqrt[3]{5\cdot(4-5)}=\sqrt[3]{-5}$ — вместо x подставили 5.

А теперь в качестве аргумента (т. е. вместо x) подставим $2-x$.

$$g(2-x)=\sqrt[3]{(2-x)(4-(2-x))}=\sqrt[3]{(2-x)(2+x)}.$$

Аналогично, подставим в формулу функции $2+x$ в качестве аргумента.

$$g(2+x)=\sqrt[3]{(2+x)(4-(2+x))}=\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}.$$

Получили, что $g(2-x)=g(2+x)$ — очень удачно! Таким образом,

$$\frac{g(2-x)}{g(2+x)}=\frac{\sqrt[3]{(2-x)(2+x)}}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}}=1.$$

Ответ: 1.

Вот еще одна задача, где применяется определение функции.

2. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t)=l_0(1+\alpha\cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ — коэффициент теплового расширения, — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Прежде чем читать дальше, решите эту задачу самостоятельно. Посмотрим, что у вас получится.

Я даю эту задачу на собеседовании, чтобы насладиться фантастическими ответами учеников. Например, мне говорят, что при температуре 6500 градусов рельс удлинится на 3 миллиметра. Но ведь 6500 градусов — это температура на поверхности Солнца! И рельс, и все вокруг при такой температуре просто расплавится.

Разберем правильное решение:

Что представляет собой данная в условии зависимость $l(t) = l_0(1+\alpha\cdot t)$? Теперь мы знаем, что это функция длины рельса от температуры.

Еще раз: длина рельса зависит от температуры по определенному правилу. Мы помним из физики, что при нагревании тела расширяются, а при охлаждении — сжимаются, и особенно это заметно для металлов. То есть при изменении температуры длина металлического рельса может измениться на несколько миллиметров.

Подставим в эту формулу начальные значения: $l_0 = 10$ м и $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$. Также нам известно, что рельс удлинился на 3 мм. То есть в какой-то момент его длина стала на 3 мм больше. Значит, при определенной температуре длина рельса $l(t)$ стала равной 10 м + 3 мм.

Теперь переведем миллиметры в метры. Один миллиметр — это одна тысячная часть метра (1 мм = 0,001 м = 10^{-3} м).

$$l(t) = 10 + 3 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}).$$

Получим:

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot t).$$

Это линейное уравнение с одной переменной t. Раскроем скобки в правой части

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10 + 12 \cdot 10^{-5} \cdot t.$$

Находим t:

$$t = \frac{3\cdot 10^{-3}}{12\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{4}\cdot 10^2 = \frac{100}{4} = 25.$$

При вычислении мы применили правило действия со степенями: $\frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^{-3+5} = 10^2$. О действиях со степенями мы еще поговорим более подробно.

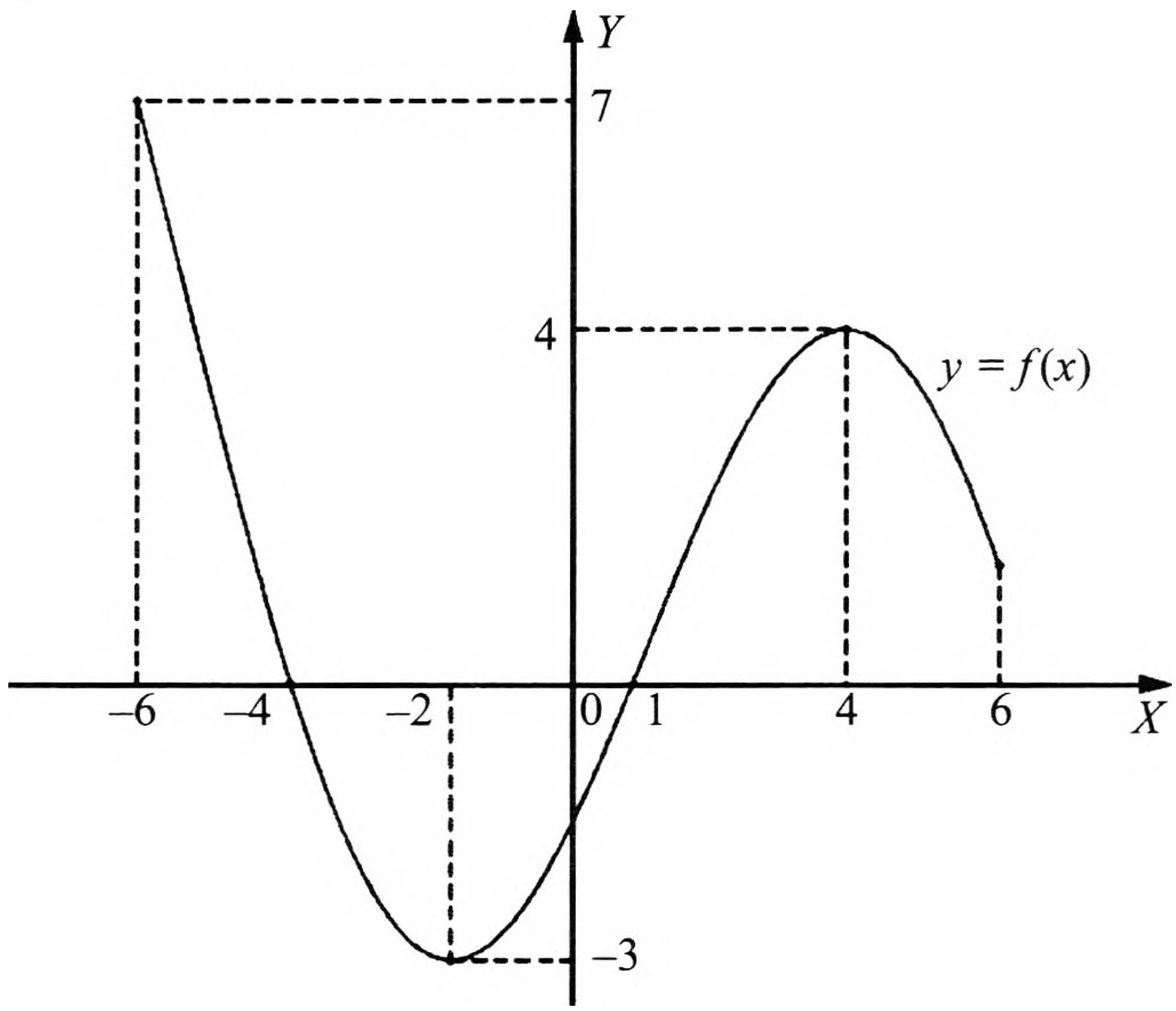
Полученный ответ 25 °C в бланк ответов записываем без размерности.

Ответ: 25.

Исследование графика функции

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Посмотрим, как исследовать функцию с помощью графика. Оказывается, глядя на график, можно узнать все, что нас интересует, а именно:

- область определения функции;
- область значений функции;
- нули функции;
- промежутки возрастания и убывания;
- точки максимума и минимума;
- наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.



Уточним терминологию:

Абсцисса — это координата точки по горизонтали.

Ордината — координата по вертикали.

Ось абсцисс — горизонтальная ось, чаще всего называется ось X.

Ось ординат — вертикальная ось, или ось Y.

Аргумент — независимая переменная, от которой зависят значения функции. Чаще всего обозначается x.

Другими словами, мы сами выбираем x, подставляем в формулу функции и получаем y. **Область определения функции** — множество тех (и только тех) значений аргумента x, при которых функция существует.

Обозначается: $D(f)$ или $D(y)$.

На нашем рисунке область определения функции $y = f(x)$ — это отрезок $[-6; 6]$. Именно на этом отрезке нарисован график функции. Только здесь данная функция существует.

Область значений функции — это множество значений, которые принимает переменная y. На нашем рисунке это отрезок $[-3; 7]$ — от самого нижнего до самого верхнего значения y.

Нули функции — точки, где значение функции равно нулю, то есть $y = 0$. На нашем рисунке это точки $x = -4$ и $x = 1$.

Значения функции положительны там, где $y > 0$. На нашем рисунке это промежутки $[-6; -4)$ и $(1; 6]$.

Значения функции отрицательны там, где $y < 0$. У нас это промежуток (или интервал) от -4 до 1.

Важнейшие понятия — **возрастание и убывание функции** на некотором множестве M. В качестве множества M можно взять отрезок $[a; b]$, интервал $(a; b)$, объединение промежутков или всю числовую прямую.

Функция $y = f(x)$ *возрастает* на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Иными словами, чем больше x, тем больше y, то есть график идет вправо и вверх.

Функция $y = f(x)$ *убывает* на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Для убывающей функции большему значению x соответствует меньшее значение y. График идет вправо и вниз.

На нашем рисунке функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[-2; 4]$ и убывает на промежутках $[-6; -2]$ и $[4; 6]$.

Определим, что такое **точки максимума и минимума функции**.

***Точка максимума* — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.**

Другими словами, точка максимума — такая точка, значение функции в которой больше, чем в соседних. Это локальный «холмик» на графике.

На нашем рисунке $x = 4$ — точка максимума.

***Точка минимума* — внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.**

То есть точка минимума — такая, что значение функции в ней меньше, чем в соседних.

На графике это локальная «ямка».

На нашем рисунке $x = -2$ — точка минимума.

Точка $x = -6$ — граничная. Она не является внутренней точкой области определения и потому не подходит под определение точки максимума. Ведь у нее нет соседей слева. Точно так же и $x = 6$ на нашем графике не может быть точкой минимума.

Точки максимума и минимума вместе называются *точками экстремума функции*. В нашем случае это $x = 4$ и $x = -2$.

А что делать, если нужно найти, например, ***минимум*** *функции* $y = f(x)$ на отрезке $[-4; 0]$? В данном случае ответ: $y = -3$. Потому что ***минимум функции* — это ее значение в точке минимума**.

Аналогично, максимум нашей функции равен 4. Он достигается в точке $x = 4$.

Можно сказать, что экстремумы функции равны 4 и -3.

Иногда в задачах требуется найти **наибольшее и наименьшее значения** функции на заданном отрезке. Они не обязательно совпадают с экстремумами.

В нашем случае *наименьшее значение функции* на отрезке $[-6; 6]$ равно -3 и совпадает с минимумом функции. А вот наибольшее ее значение на этом отрезке равно 7. Оно достигается в левом конце отрезка.

В любом случае наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке достигаются либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

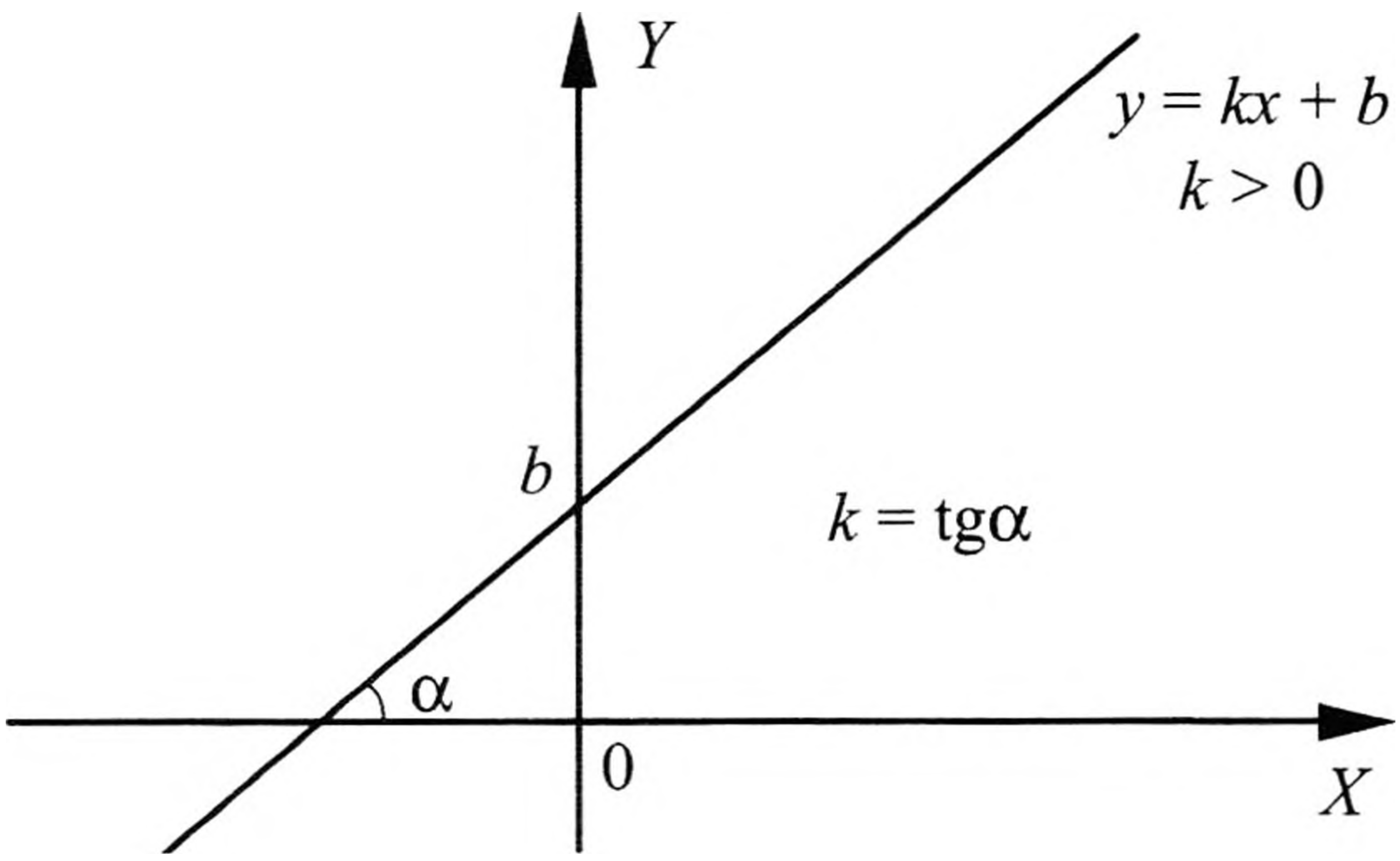
При решении уравнений и неравенств мы постоянно будем пользоваться свойствами функций. Вы узнаете о том, что есть всего 5 типов элементарных функций. Из них, как из составных элементов, строятся все функции, которые вы изучаете в школе. Для начала повторим, какие функции вам уже знакомы.

Линейная функция

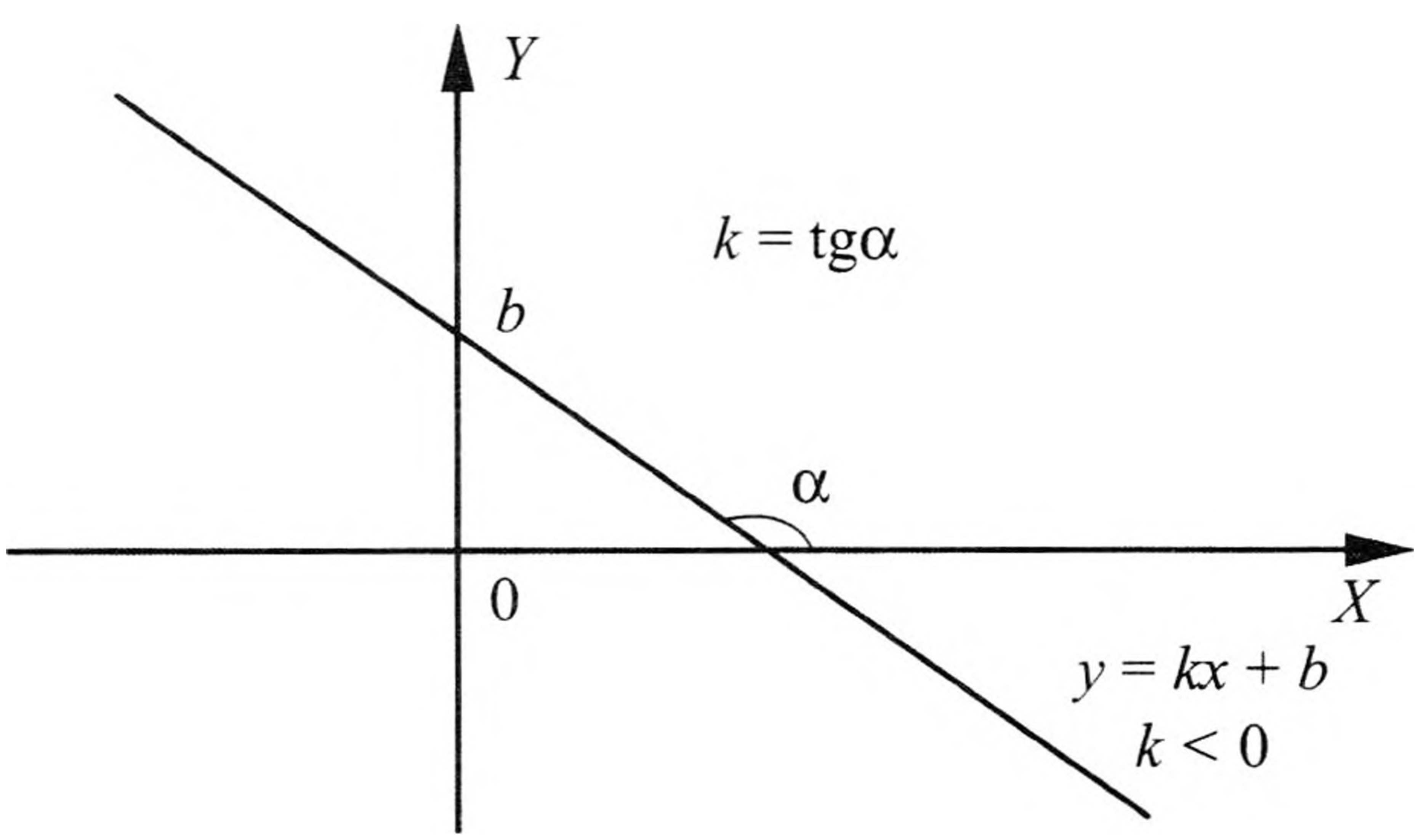
Линейная функция задается уравнением $y = kx + b$. График — прямая линия. Для ее построения достаточно двух точек.

Если $k > 0$, линейная функция возрастает. Чем больше k, тем круче идет график.

Число k называется *угловым коэффициентом прямой* и равно тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси X:

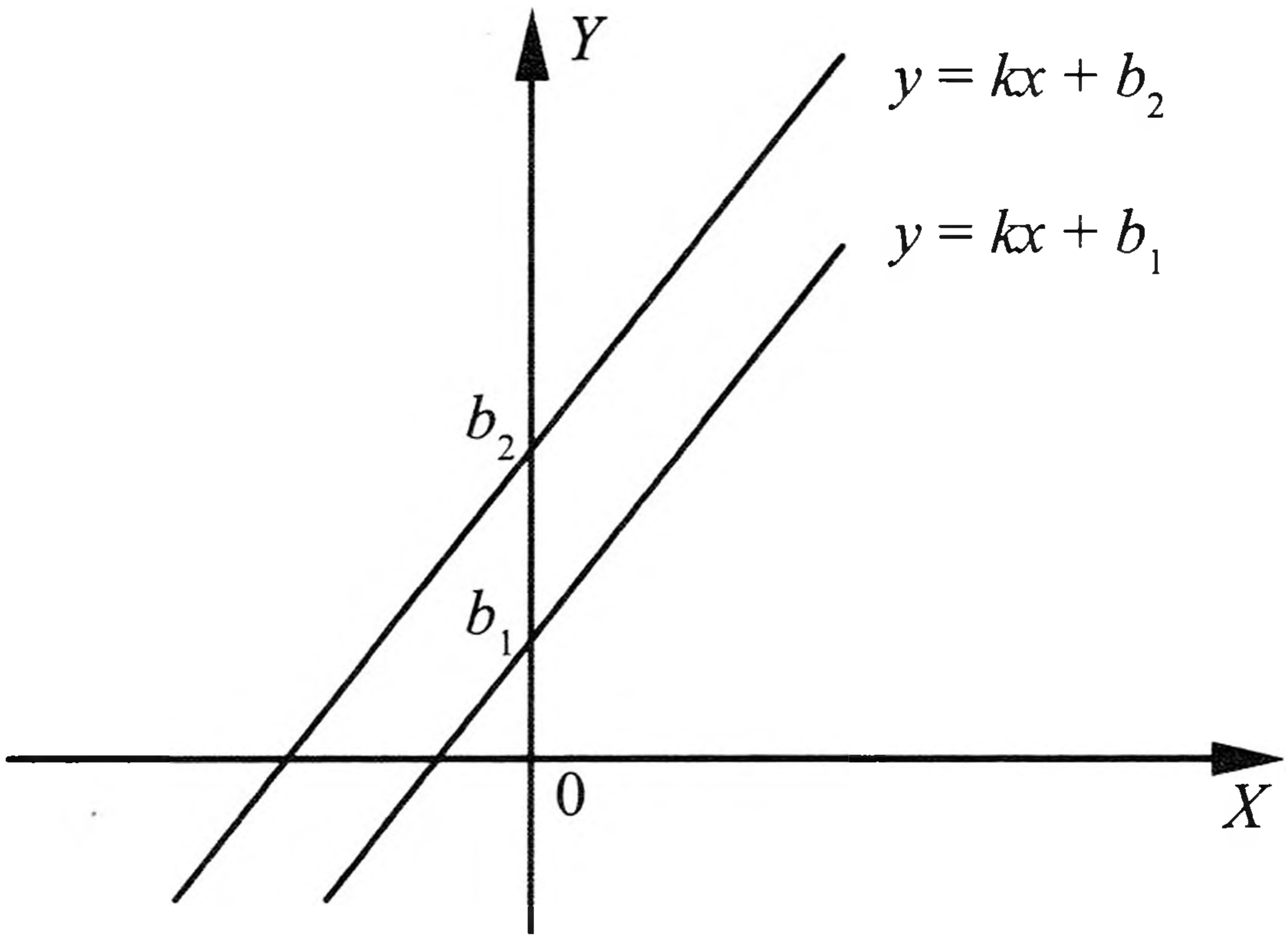


Если $k < 0$, линейная функция убывает. Очевидно, в этом случае угол α — тупой и $\mathrm{tg}\alpha < 0$.



Если $k = 0$, мы получим прямую $y = b$, параллельную оси X.

Если угловые коэффициенты прямых равны — прямые параллельны.



Внимание. Для тех, кто намерен решать задачи с параметрами, сообщим еще один полезный факт.

Если прямые перпендикулярны, для их угловых коэффициентов k_1 и k_2 можно записать соотношение:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

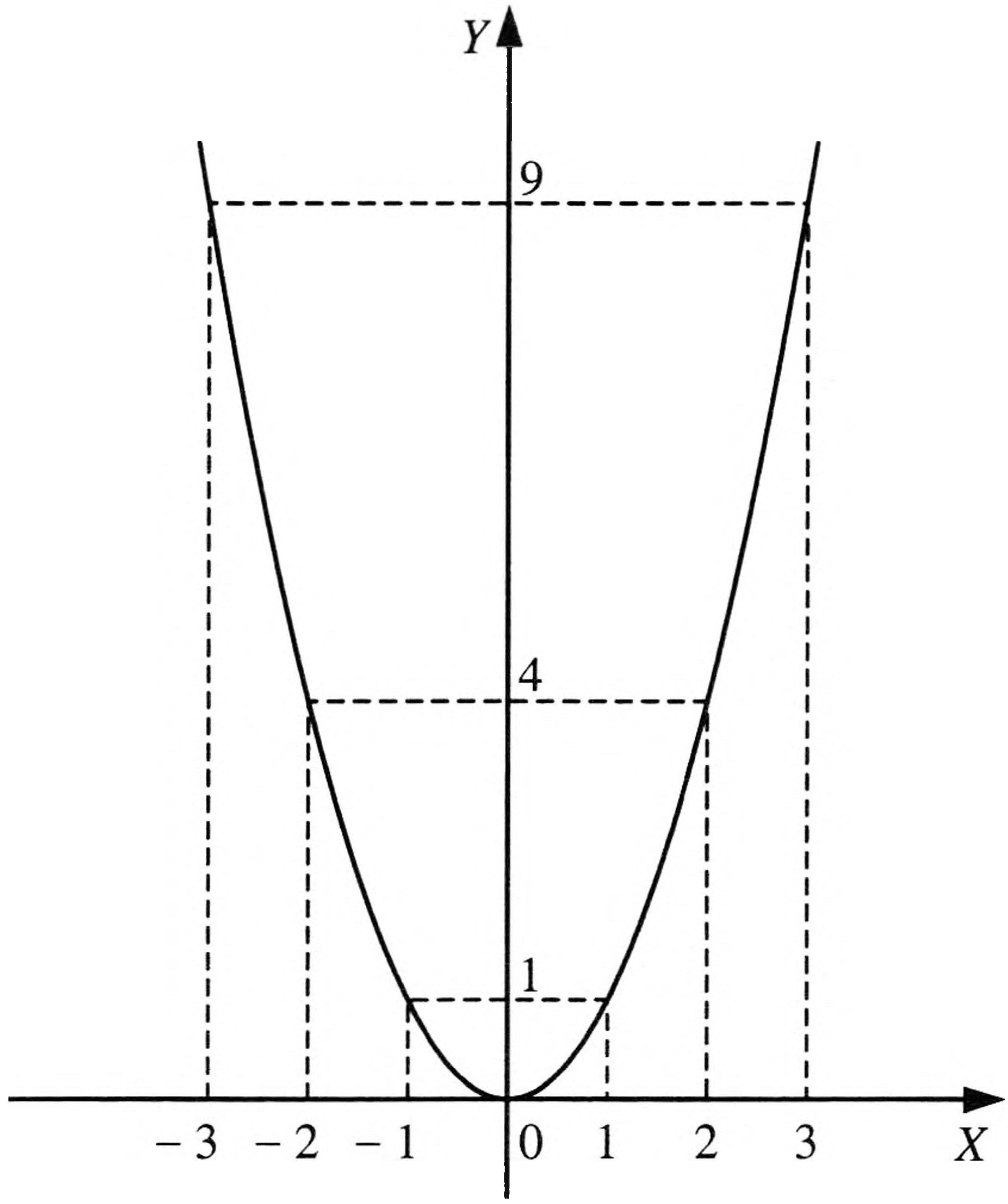
Обратите внимание, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла ее наклона к положительному направлению оси X. Мы вернемся к этому в теме «Производная».

Квадратичная функция

Все знают, как выглядит график функции $y = x^2$. Это парабола. В седьмом классе вы рисовали таблицу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

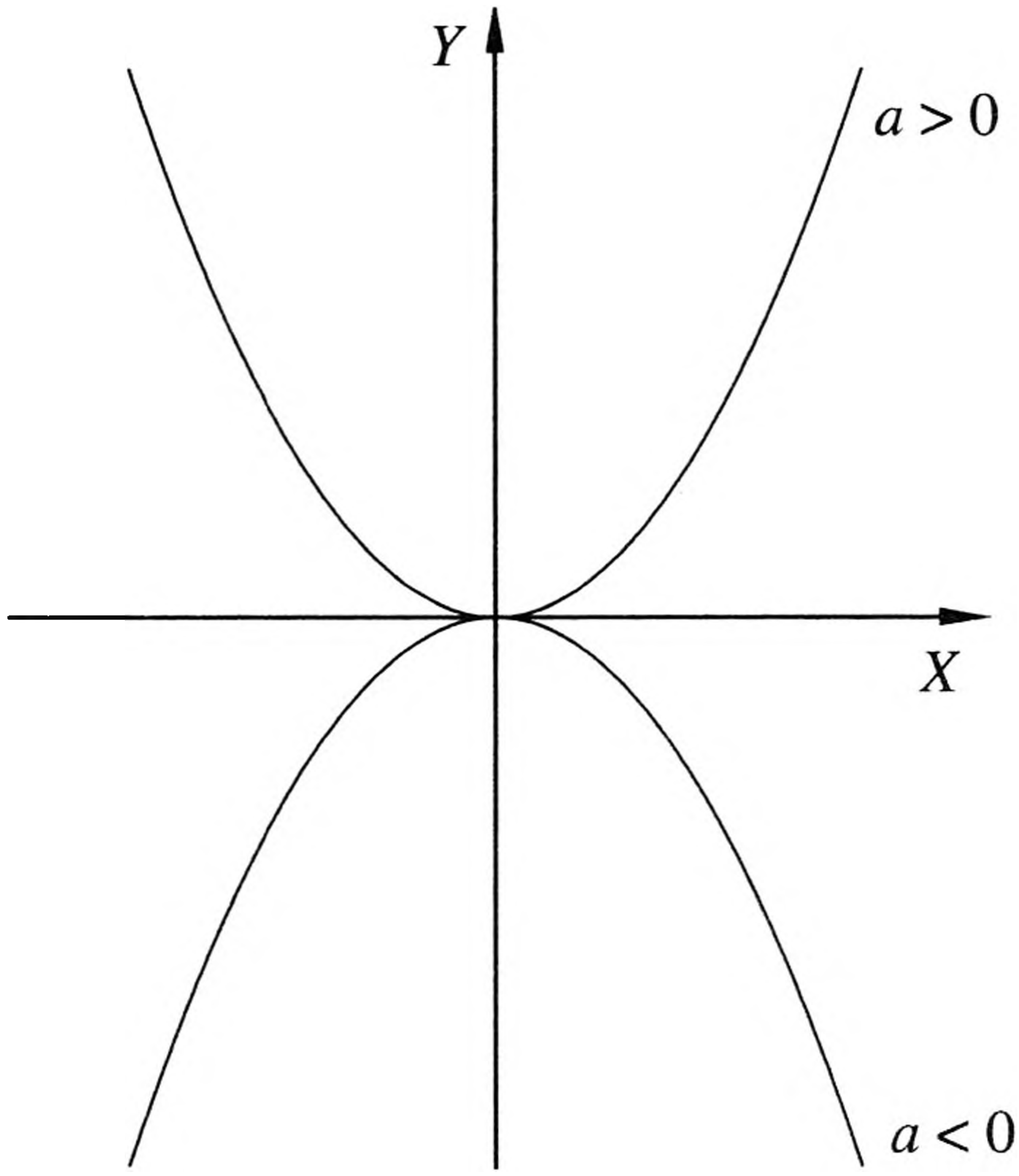
После этого по точкам строили график:



Параболу $y = ax^2 + bx + c$ мы не станем строить каждый раз «по точкам» — для выпускника школы это несерьезно. Важнее запомнить и использовать закономерности поведения данной функции:

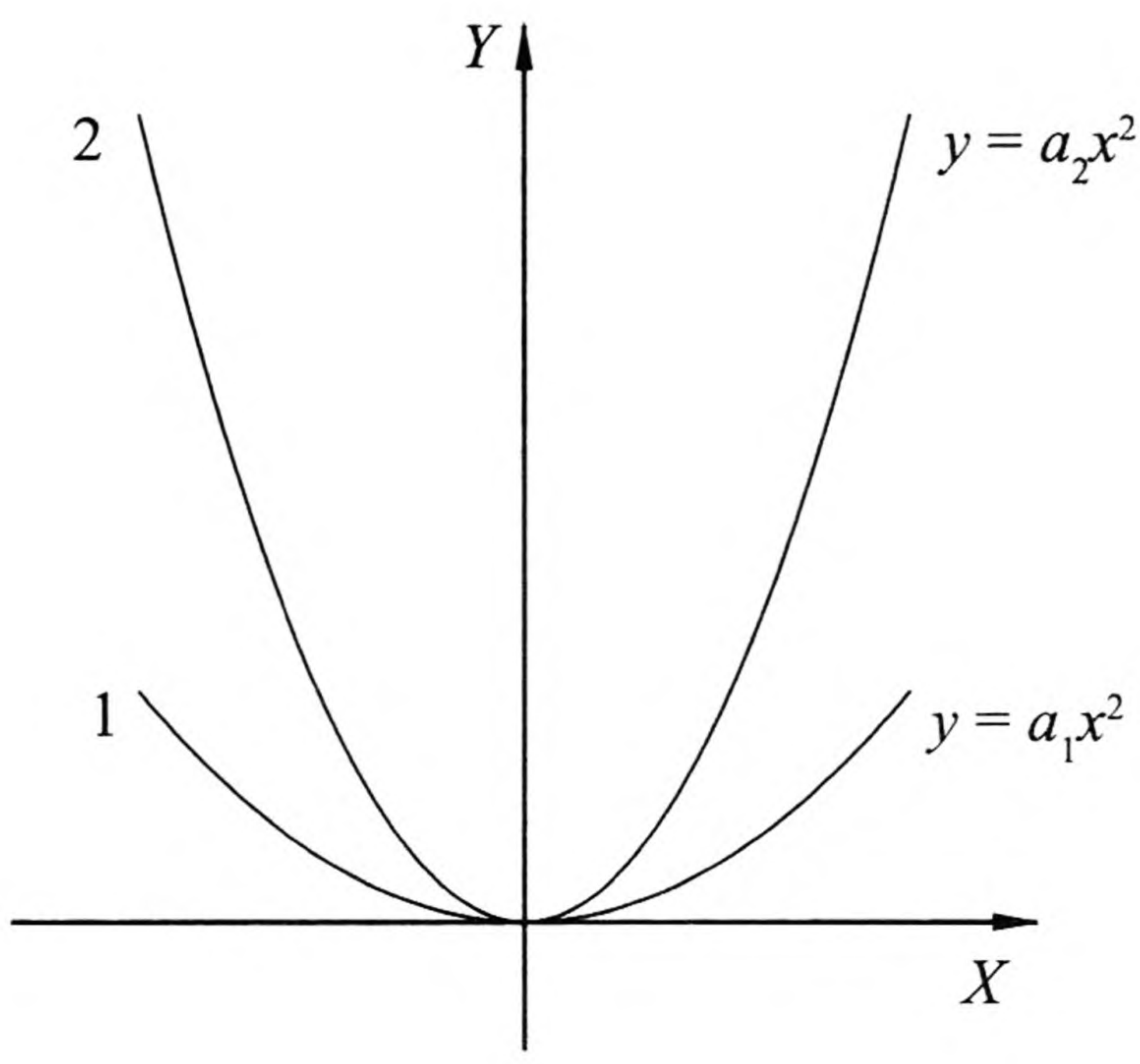
1. Знак коэффициента a отвечает за направление ветвей. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

На рисунке приведены две параболы $y = ax^2$ с равными по модулю, но противоположными по знаку значениями a.

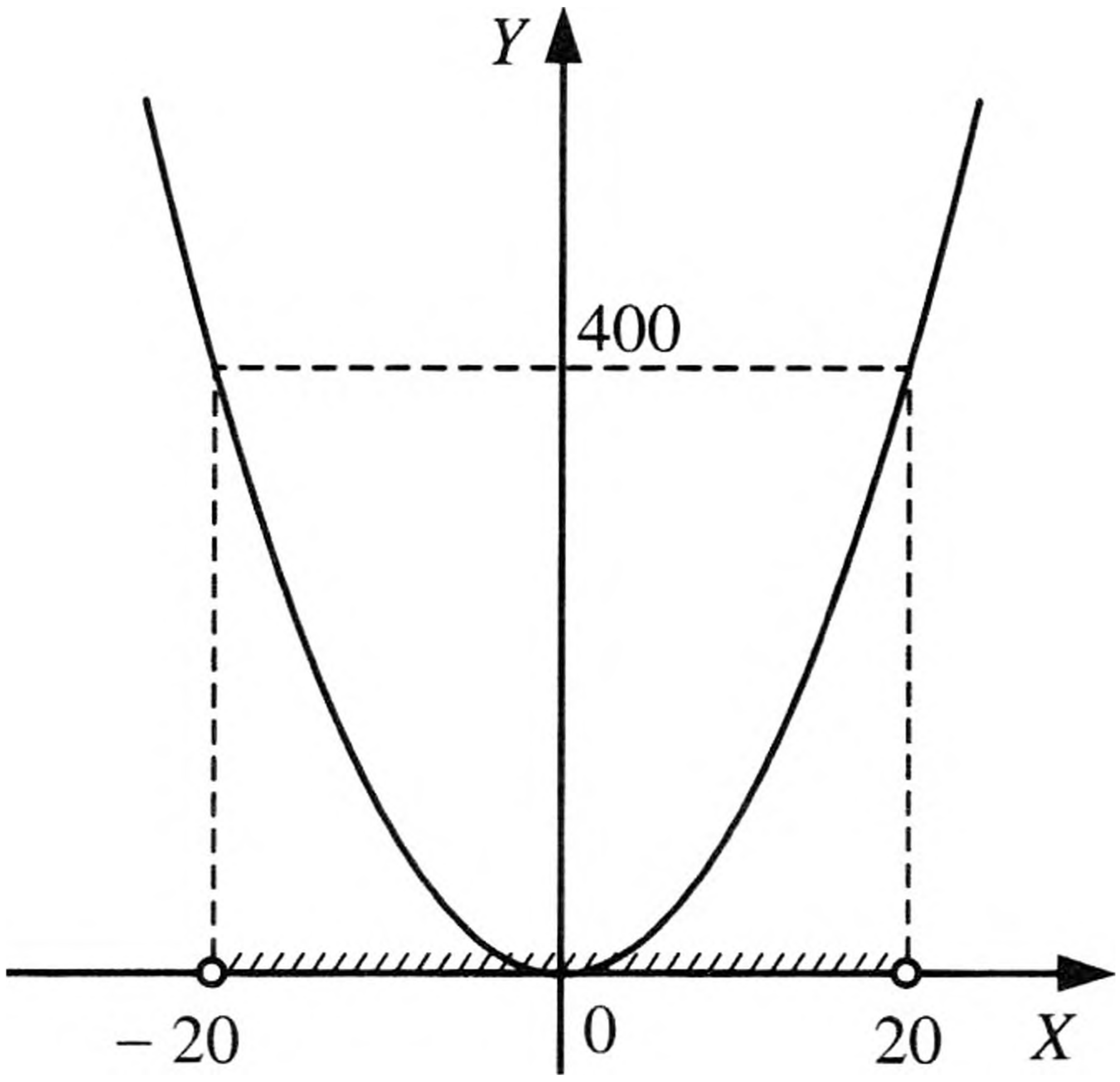


2. Абсолютная величина коэффициента a отвечает за «раскрыв» параболы. Чем больше $|a|$, тем более узкой будет парабола (больше прижата к оси Y). Наоборот, чем меньше $|a|$, тем шире парабола (больше прижата к оси X).

На рисунке приведены две параболы $y = a_1x^2$ и $y = a_2x^2$, у которых $a_2 > a_1 > 0$.



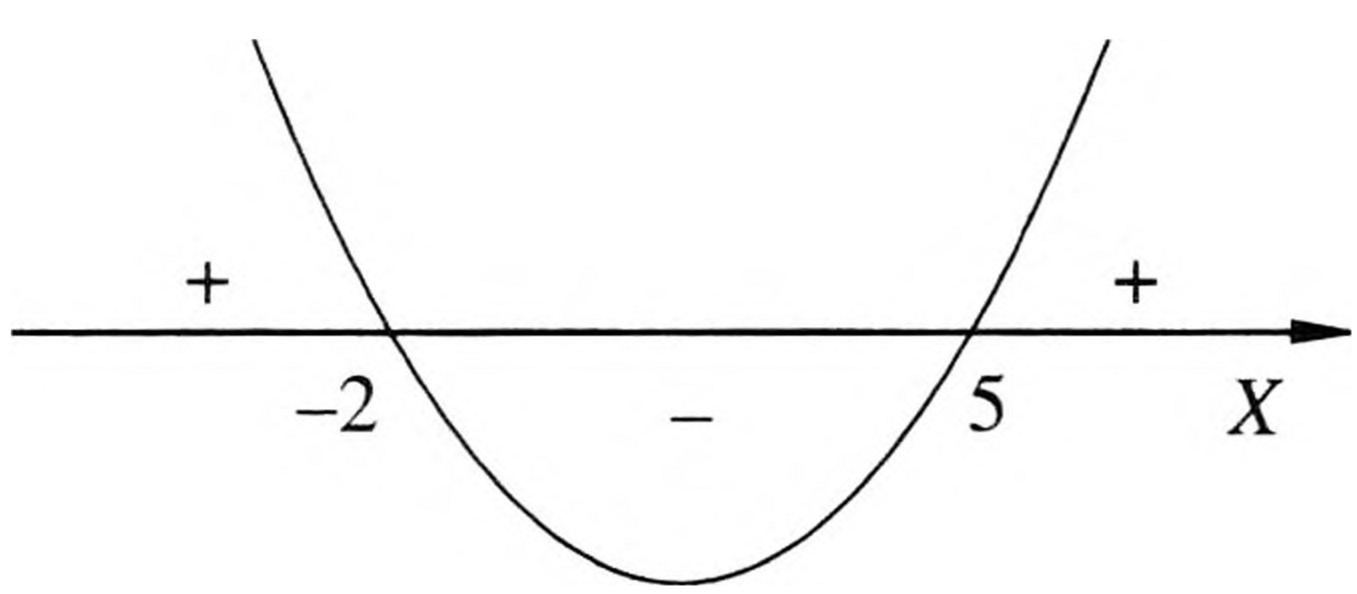
Давайте решим это неравенство с помощью графика. Изобразим схематично график функции $y = x^2$ и отметим все значения x, для которых $y < 400$.



Теперь мы видим правильный ответ: $x \in (-20; 20)$.

1. Решим неравенство: $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Графиком функции $y = x^2 - 3x - 10$ служит парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, находим $x_1 = -2$ и $x_2 = 5$ — в этих точках парабола пересекает ось X. Нарисуем схематично нашу параболу:



Мы видим, что при $x \in (-2; 5)$ значения функции отрицательны (график проходит ниже оси X). В точках –2 и 5 функция обращается в нуль, а при $x < -2$ и $x > 5$ значения функции положительны. Следовательно, наше неравенство выполняется при $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

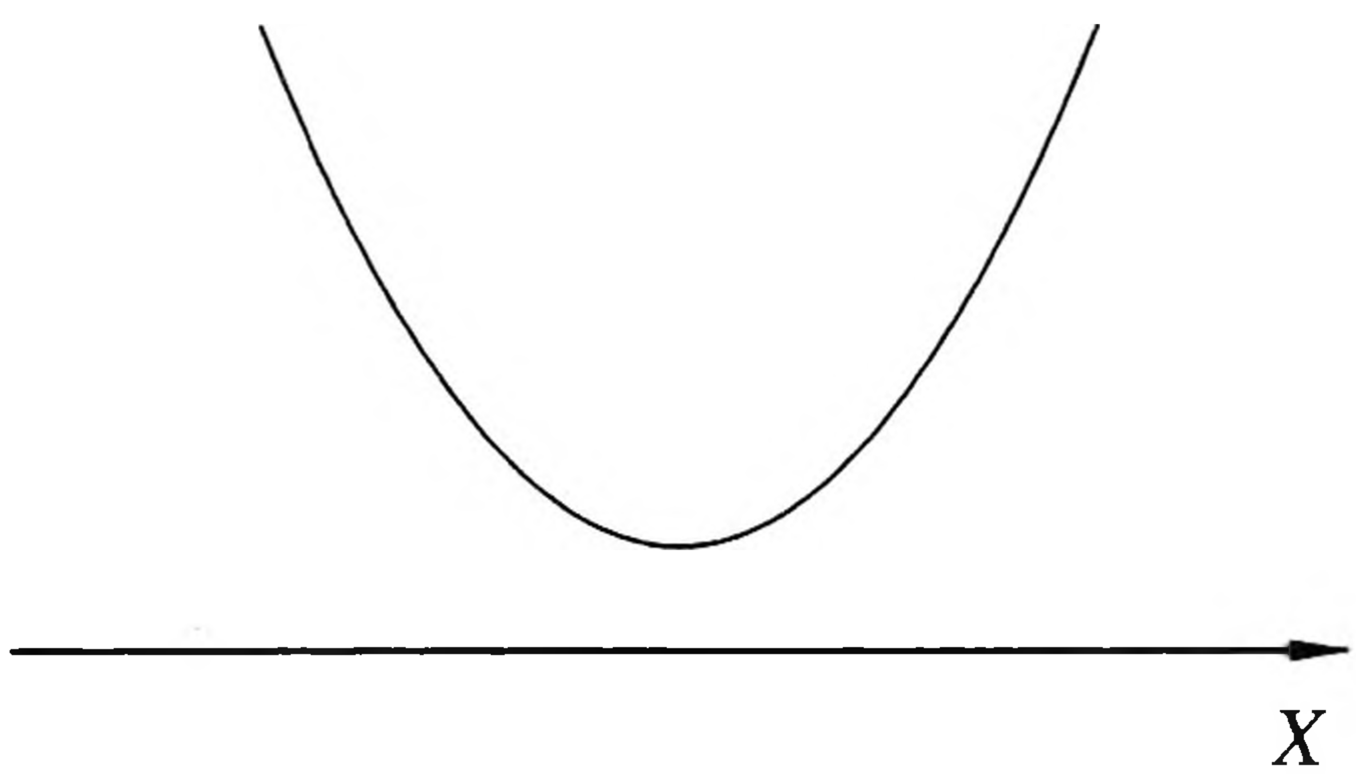
Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

Обратите внимание, что для решения неравенства нам достаточно было схематично изобразить параболу. Ось Y вообще не понадобилась!

2. Еще одно неравенство: $x^2 + 2x + 4 > 0$.

Ветви параболы $y = x^2 + 2x + 4$ направлены вверх. Дискриминант отрицателен, то есть уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0$ не имеет корней. Стало быть, нет и точек пересечения параболы с осью X.

Раз ветви параболы направлены вверх и она не пересекает ось X — значит, парабола расположена *над* осью X.



Получается, что значения функции положительны при всех возможных x. Иными словами, решения нашего неравенства — это все действительные числа.

Ответ: $(-\infty, +\infty)$.

Разберем несколько задач ЕГЭ на тему «Квадратные неравенства». Все это — так называемые задачи с физическим содержанием из части 1.

Сначала напомним важное правило, которое вам (надеюсь!) известно из школьной программы.

При делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется.

3. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

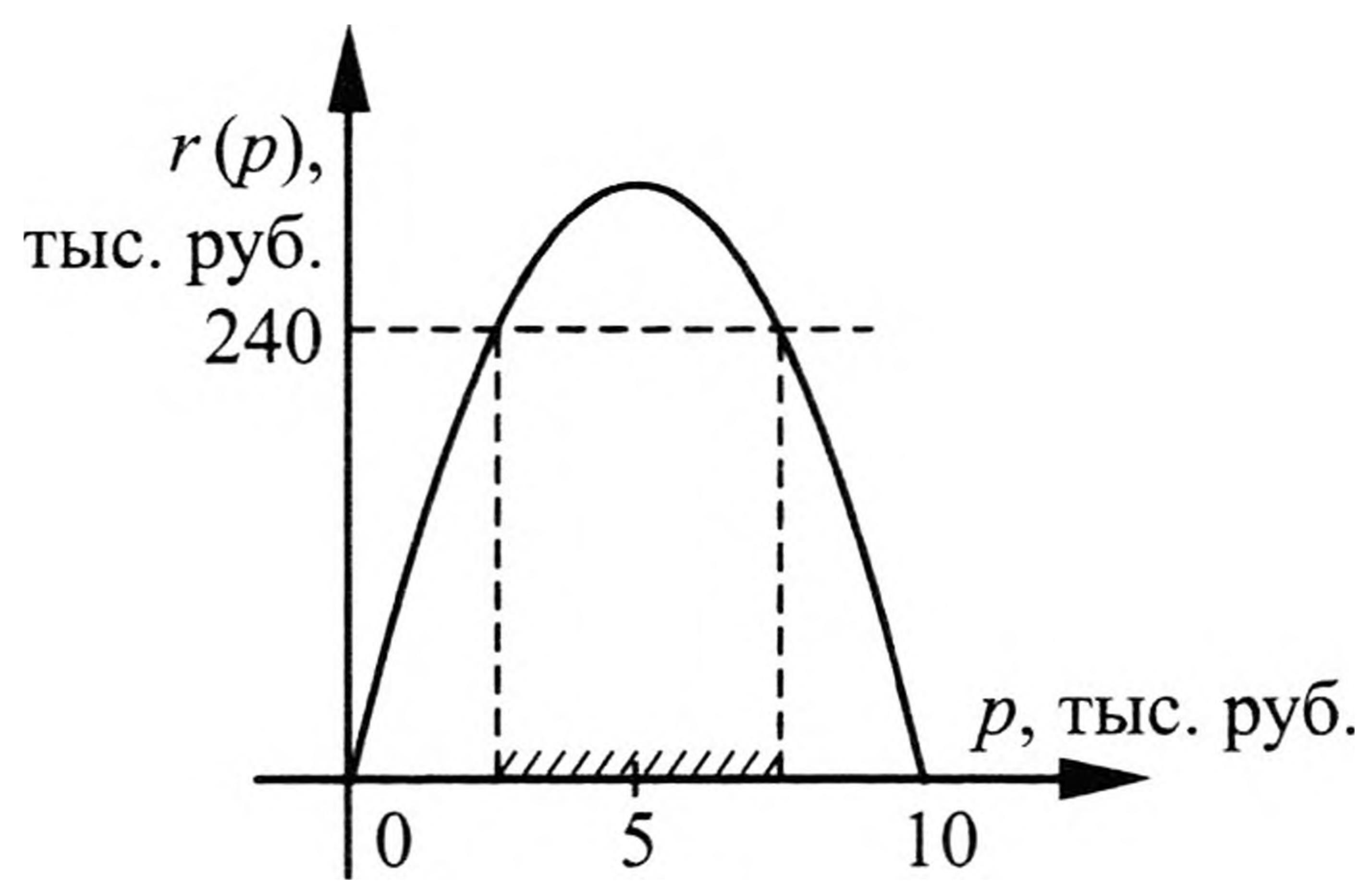
Подставим выражение для q в формулу выручки:

$$r(p) = qp = (100 - 10p)\,p = 100p - 10p^2.$$

Выручка должна быть не менее (то есть больше или равна) 240 тысяч рублей. Поскольку цена p уже выражена в тысячах рублей, мы можем записать это условие в виде неравенства:

$$100p - 10p^2 \geq 240.$$

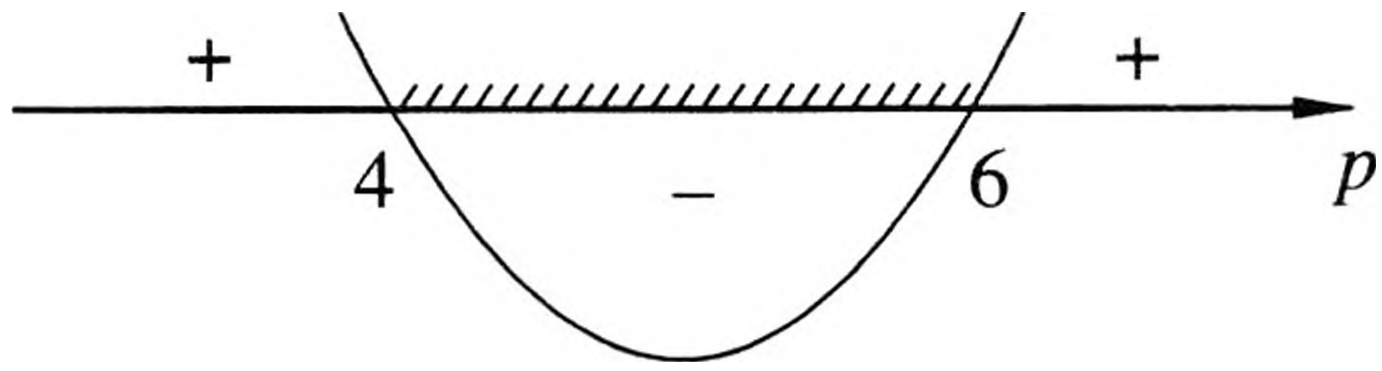
Левая часть неравенства — зависимость $r(p)$ выручки от цены. Что мы видим на графике? Вначале при увеличении цены выручка растет и достигает своего максимального значения при $p = 5$ — в вершине параболы, то есть при значении цены, равном 5 тысяч рублей. При дальнейшем увеличении цены выручка уменьшается. Это логично — ведь с увеличением цены уменьшился спрос. Заметим, что если цена равна 10 тысяч рублей, выручка равна нулю — при такой цене этот товар просто не покупают.



Вернемся к неравенству. Переносим все влево и делим на -10. При этом знак неравенства меняется!

$$p^2 - 10p + 24 \leq 0.$$

Для схематичного построения параболы находим корни уравнения $p^2 - 10p + 24 = 0$. Они равны 4 и 6. Остается сделать рисунок.



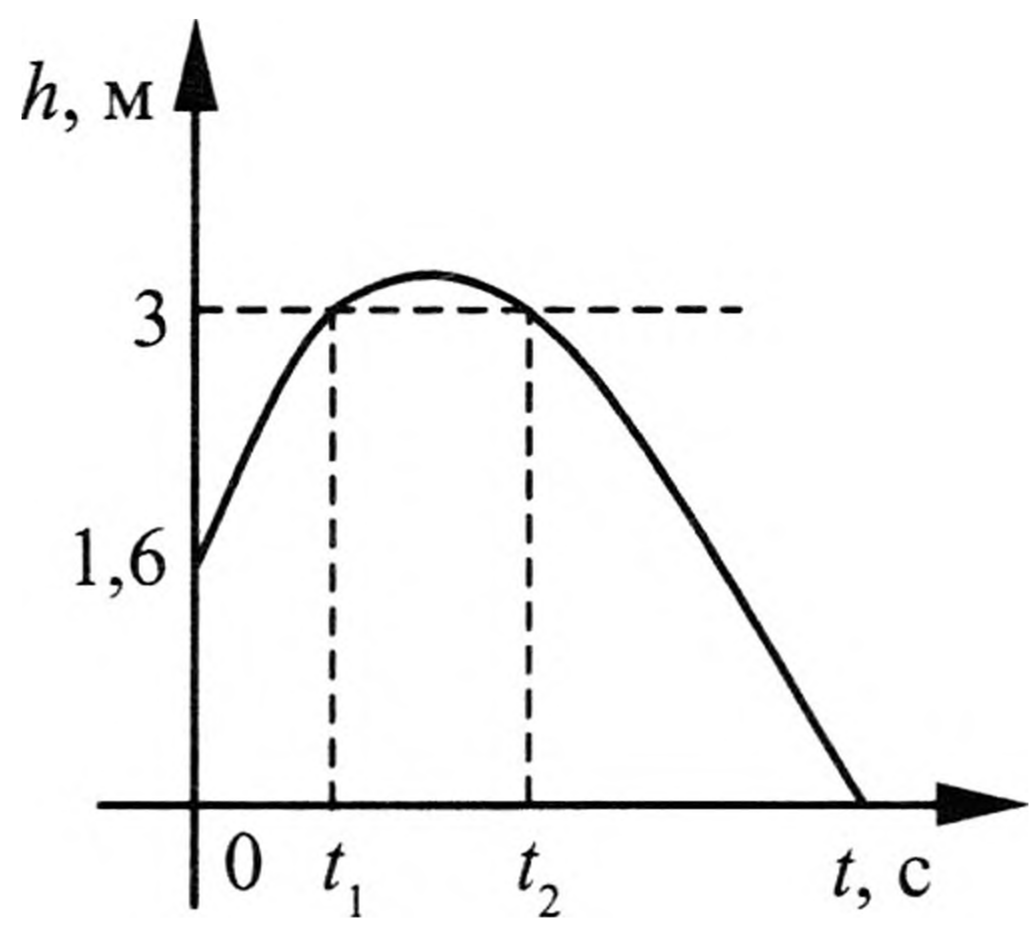
Решением нашего неравенства служит отрезок [4; 6]. В условии требовалось найти наибольшее p. Оно равно 6.

Ответ: 6.

4. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

Итак, $h(t) \geq 3$. Подставляем сюда выражение для h:

$$1{,}6 + 8t - 5t^2 \geq 3.$$



Построим график функции в левой части — то есть зависимость высоты мяча от времени. Мы видим, что через t_1 секунд после начала полета мяч оказался на высоте 3 метра. Мяч продолжал лететь вверх, высота увеличивалась. Затем началось снижение, высота уменьшалась, и в момент времени t_2 снова стала равна трем метрам над землей. Получается, что мяч находился на высоте не менее трех метров в течение $t = t_2 - t_1$ секунд.

Осталось найти разность $t_2 - t_1$.

Соберем все в правой части неравенства:

$$5t^2 - 8t + 1{,}4 \leq 0.$$

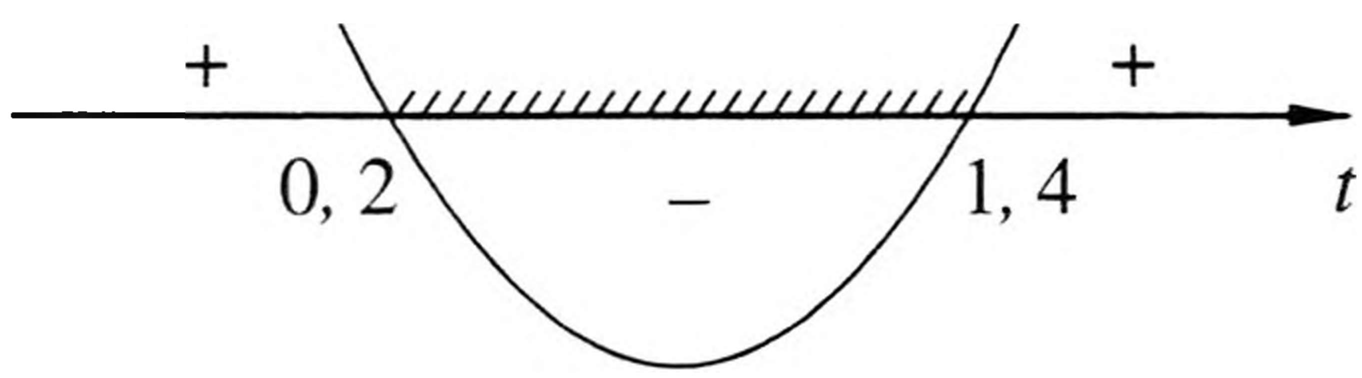
Работать с дробными коэффициентами неудобно. Умножим обе части неравенства на 5:

$$25t^2 - 40t + 7 \le 0.$$

Найдем корни соответствующего уравнения $25t^2 - 40t + 7 = 0$.

$$t_1 = 0{,}2;\ t_2 = 1{,}4.$$

Как действовать дальше — мы знаем.

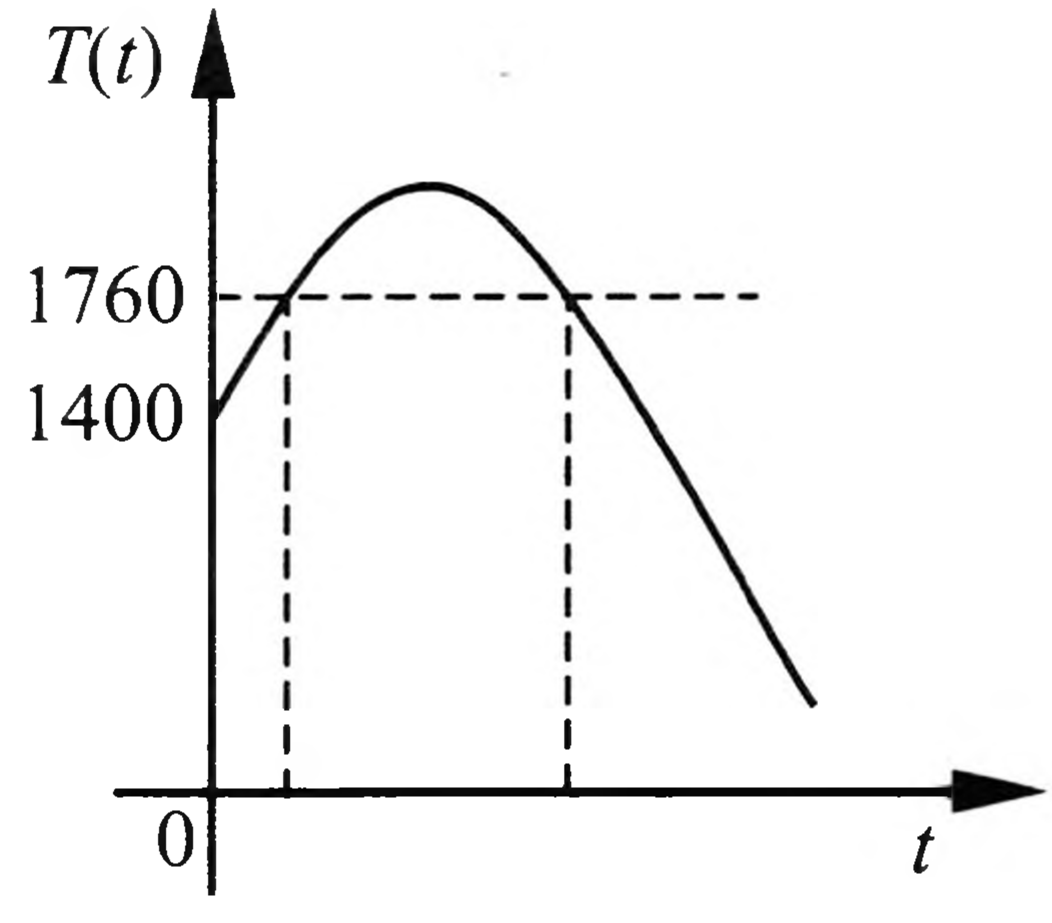


Разность $t_2 - t_1 = 1{,}4 - 0{,}2 = 1{,}2$.
В бланк ответов вписываем десятичную дробь 1,2.

5. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

По условию, зависимость температуры нагревательного элемента от времени определяется формулой:

$$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2.$$



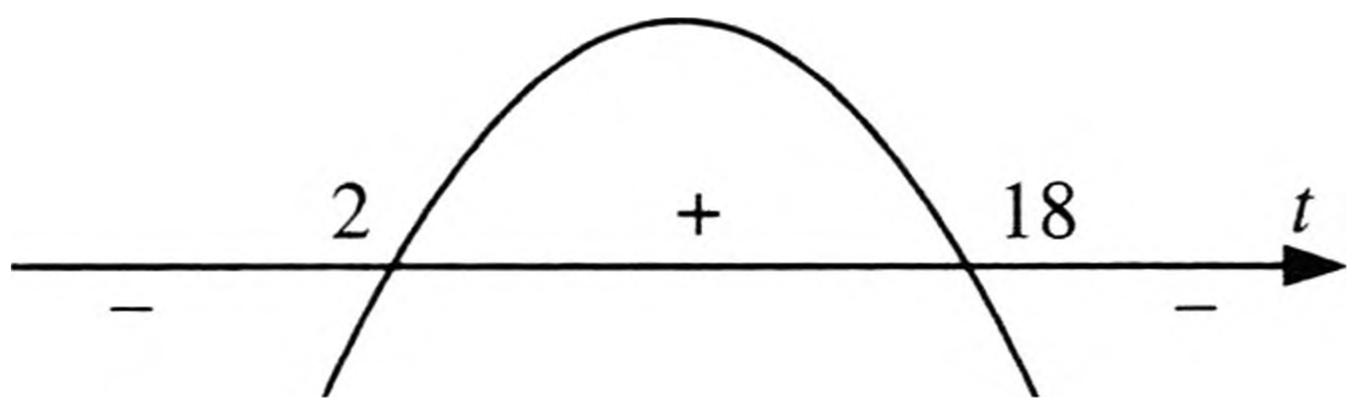
В нормальном режиме работы прибора должно выполняться неравенство $T \leq 1760$, или

$$1400 + 200t - 10t^2 \leq 1760.$$

Переносим все влево и делим на 10:

$$-t^2 + 20t - 36 \leq 0.$$

Находим корни соответствующего квадратного уравнения: $t_1 = 2$, $t_2 = 18$.



Получаем решения нашего неравенства: $t < 2$ или $t > 18$.

Остается понять: в какой же момент отключать прибор? Для этого надо представить физическую картину процесса.

Мы включаем прибор в момент времени $t = 0$. Температура нагревателя повышается и при $t = 2$ мин достигает 1760 К. Затем повышение температуры продолжается, и если нагреватель не отключили, прибор, как сказано в условии, портится. Попросту — он сгорит!

Поэтому ясно, что отключать его надо при $t = 2$.

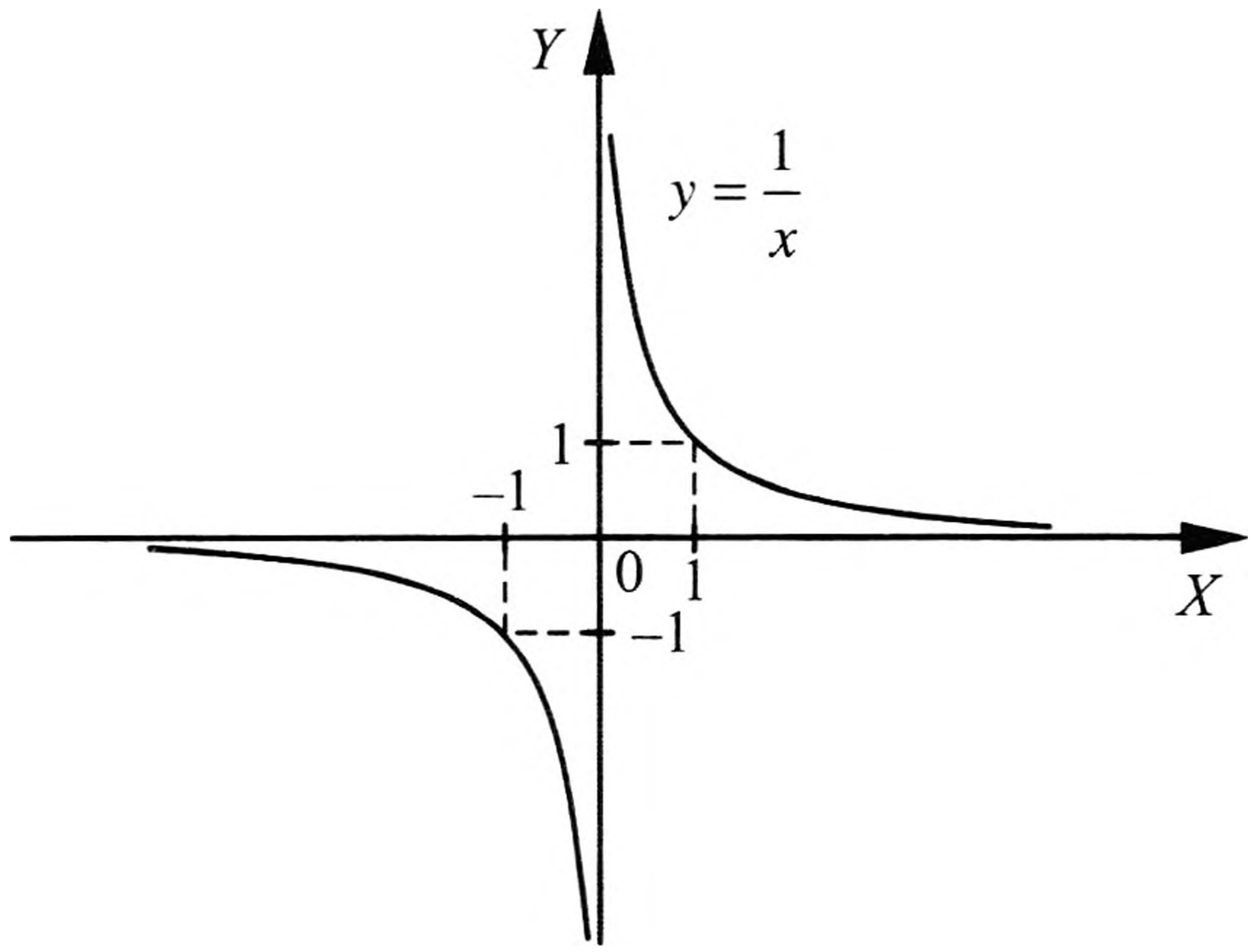
А что же решения $t > 18$? Они не имеют физического смысла. Войдя в зону температур $T > 1760$, прибор сгорит. Повалит вонючий дым, и формула $T(t) = 1400 + 200t - 10t^2$, справедливая для исправного прибора, перестанет адекватно отражать реальность. Поэтому в бланк ответов вписываем число 2.

Обратная пропорциональность. Асимптоты

Еще одна хорошо известная вам функция — обратная пропорциональность, или гипербола. Она задается формулой $y = \dfrac{k}{x}$.

На рисунке изображен частный случай гиперболы — функция $y = \dfrac{1}{x}$.

Поскольку знаменатель не должен обращаться в ноль, эта функция не определена при $x = 0$. Обратите внимание — график гиперболы симметричен относительно начала координат.



И еще важный момент. Посмотрите, как ведет себя график функции $y = \frac{1}{x}$, когда x бесконечно близко подходит к нулю.

На ноль, как мы знаем, делить нельзя. А мы и не делим! Мы вычисляем значения функции $y = \frac{1}{x}$ в точках, близких к нулю.

Пусть $x > 0$.

Если $x = 0{,}01$, то $y = \frac{1}{0{,}01} = 100$. При $x = 0{,}001$ получим, что $y = \frac{1}{0{,}001} = 1000$.

Чем ближе x приближается к нулю, тем выше в бесконечность уходит график функции $y = \frac{1}{x}$. Другими словами, если x стремится к нулю, то y стремится к бесконечности.

Аналогично для отрицательных значений x: если x стремится к нулю, то y стремится к минус бесконечности.

Обратите внимание, что график функции $y=\frac{1}{x}$ при x, стремящемся к нулю, бесконечно близко подходит к оси Y, но не пересекает ее и не сливается с ней. Такая прямая, к которой бесконечно близко подходит график функции, называется **асимптотой**.

А что будет, если x стремится к бесконечности? Тогда значение функции $y=\frac{1}{x}$ стремится к нулю. Например, при $x = 10\,000$ получим, что $y = 0{,}0001$.

Для функции $y=\frac{1}{x}$ ось Y — вертикальная асимптота, а ось X — горизонтальная асимптота.

Дробно-рациональная функция и метод интервалов

Следующая функция, с которой мы познакомимся, — дробно-рациональная.

Это функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Например, $y=\frac{2x}{x-5}$; $y=\frac{(x-3)(x^2+8)}{x(x+7)}$ — дробно-рациональные функции.

Очевидно, что область определения функции состоит из всех x, для которых $Q(x)$ не равно нулю.[1]

Метод интервалов — простой способ решения дробно-рациональных неравенств. Так называются неравенства, содержащие рациональные (или дробно-рациональные) выражения, зависящие от переменной.

[1] Делить на ноль нельзя. Деление на 0 не определено.

1. Рассмотрим, например, такое неравенство $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-7)(x+5)} \geq 0.$

Метод интервалов позволяет решить его за пару минут.

В левой части этого неравенства — дробно-рациональная функция. Рациональная, потому что не содержит ни корней, ни синусов, ни логарифмов — только рациональные выражения. В правой — ноль.

Метод интервалов основан на следующем свойстве дробно-рациональной функции.

Дробно-рациональная функция может менять знак только в тех точках, в которых она равна нулю или не существует.

Найдем нули функции в левой части нашего неравенства. Для этого разложим числитель на множители. (Если вы не помните, что такое нули функции и знак функции на промежутке, — читайте главу «Исследование функции»).

Напомним, как раскладывается на множители квадратный трехчлен, то есть выражение вида $ax^2 + bx + c$.

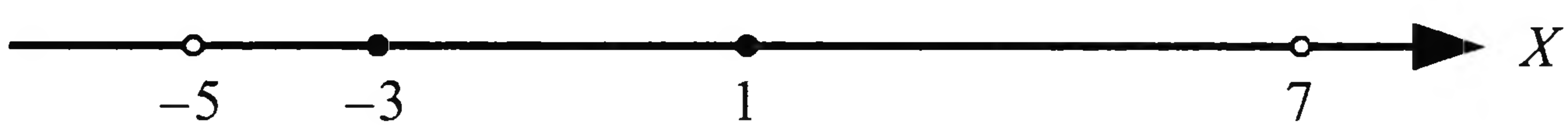
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Получим:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-7)(x+5)} \geq 0.$$

Рисуем ось X и расставляем точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в ноль.



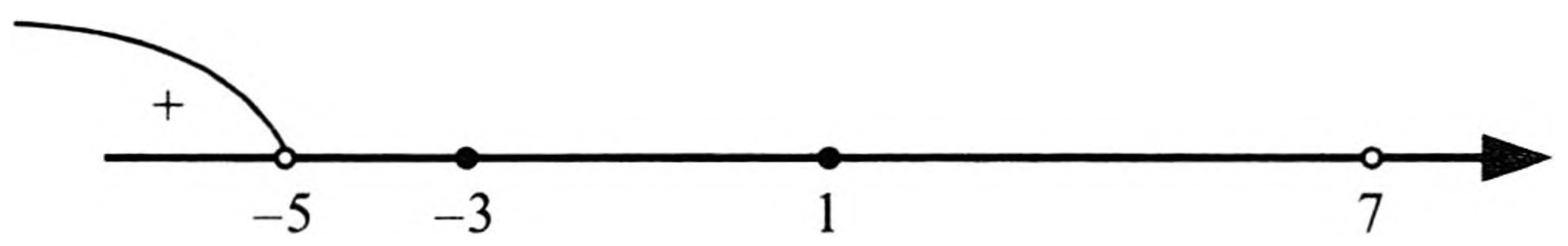
Нули знаменателя –5 и 7 — выколотые точки, так как в этих точках функция в левой части неравенства не определена (на нуль делить нельзя). Нули числителя –3 и 1 — закрашены, так как неравенство нестрогое. При $x = -3$ и $x = 1$ наше неравенство выполняется, так как обе его части равны нулю.

Эти точки разбивают ось X на 5 промежутков.

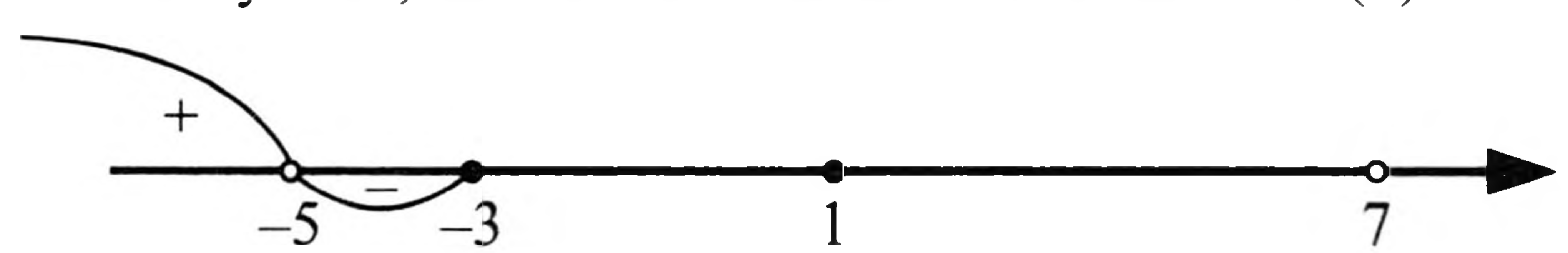
Определим знак дробно-рациональной функции в левой части нашего неравенства на каждом из этих промежутков. Мы помним, что **дробно-рациональная функция может менять знак только в тех точках, в которых она равна нулю или не существует.** Это значит, что на каждом из промежутков между точками, где числитель или знаменатель обращаются в ноль, знак выражения в левой части неравенства будет постоянным — либо «плюс», либо «минус».

И поэтому для определения знака функции на каждом таком промежутке мы берем любую точку, принадлежащую этому промежутку. Ту, которая нам удобна.

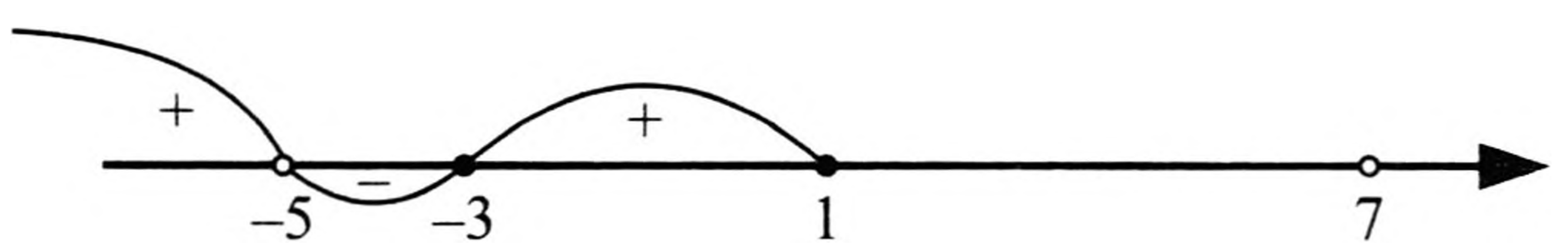
1) $x < -5$. Возьмем, например, $x = -10$ и проверим знак выражения в левой части неравенства. Каждая из «скобок» отрицательная. Левая часть имеет знак (+).



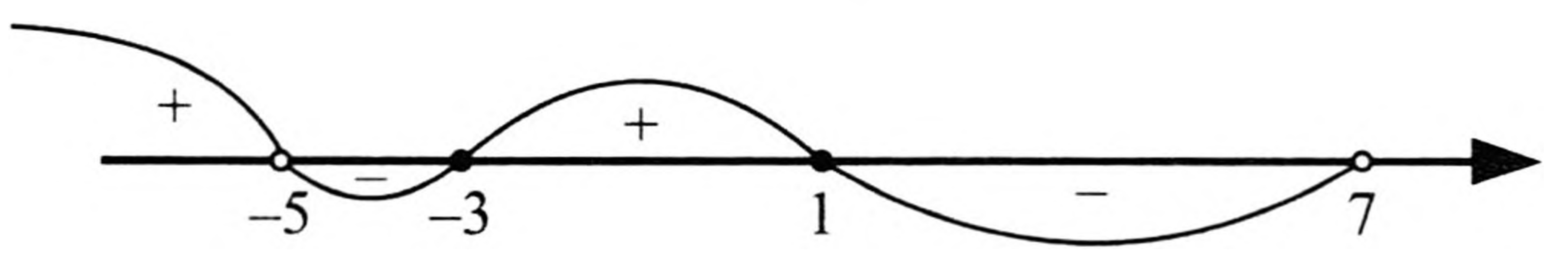
2) Следующий промежуток: $-5 < x < -3$. Проверим знак при $x = -4$. Получаем, что левая часть поменяла знак на (–).



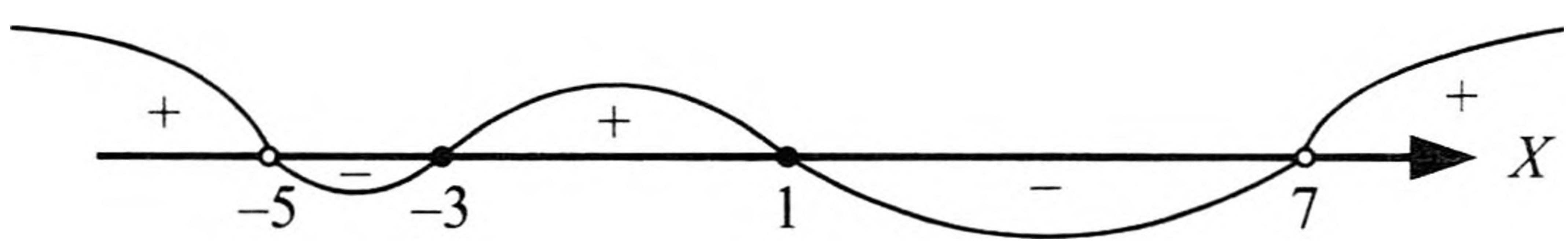
3) $-3 < x < 1$. Возьмем $x = 0$. При $x = 0$ выражение положительно — следовательно, оно положительно на всем промежутке от –3 до 0.



4) При $1 < x < 7$ левая часть неравенства отрицательна.



5) И, наконец, $x > 7$. Подставим $x = 10$ и проверим знак выражения в левой части неравенства. Каждая «скобочка» положительна. Следовательно, левая часть имеет знак (+).



Мы нашли, на каких промежутках выражение положительно. Осталось записать ответ.

Ответ: $(-\infty; -5)\cup[-3; 1]\cup(7; +\infty)$.

Обратите внимание: знаки на промежутках чередуются. Это произошло потому, что *при переходе через каждую точку ровно один из линейных множителей поменял знак, а остальные сохранили его неизменным.*

Мы видим, что метод интервалов очень прост. Чтобы решить дробно-рациональное неравенство методом интервалов, приводим его к виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \text{ или } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \text{ или } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \text{ или } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

(в левой части — дробно-рациональная функция, в правой — ноль).

Затем — отмечаем на числовой прямой точки, в которых числитель или знаменатель обращаются в ноль.

Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки, на каждом из которых дробно-рациональная функция сохраняет свой знак.

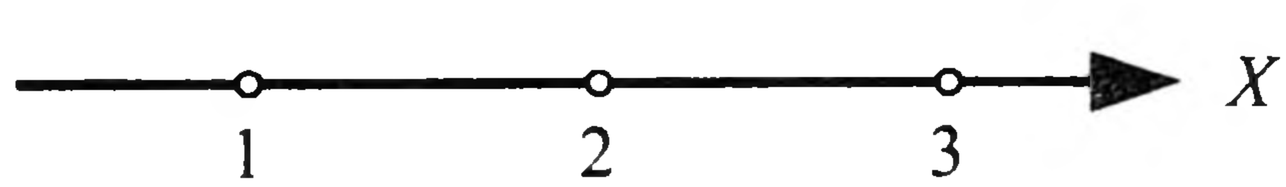
Остается только выяснить ее знак на каждом промежутке.

Мы делаем это, проверяя знак выражения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в любой точке, принадлежащей данному промежутку. После этого записываем ответ. Вот и все.

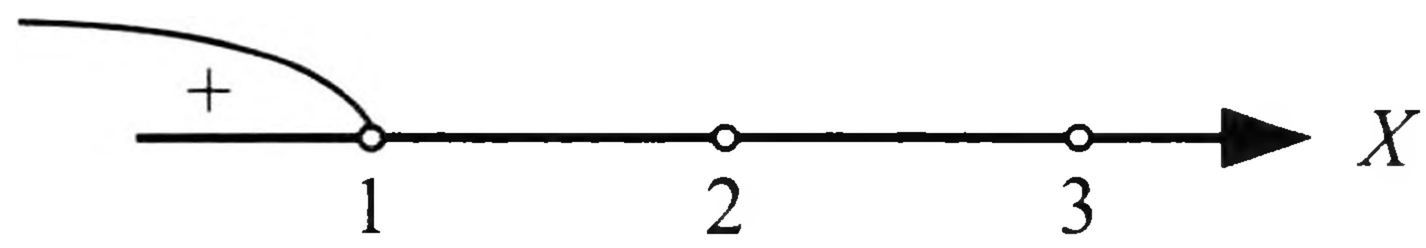
Но возникает вопрос: всегда ли знаки чередуются? Нет, не всегда! Надо быть внимательным и не расставлять знаки механически и бездумно.

2. Рассмотрим еще одно неравенство $\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)} > 0.$

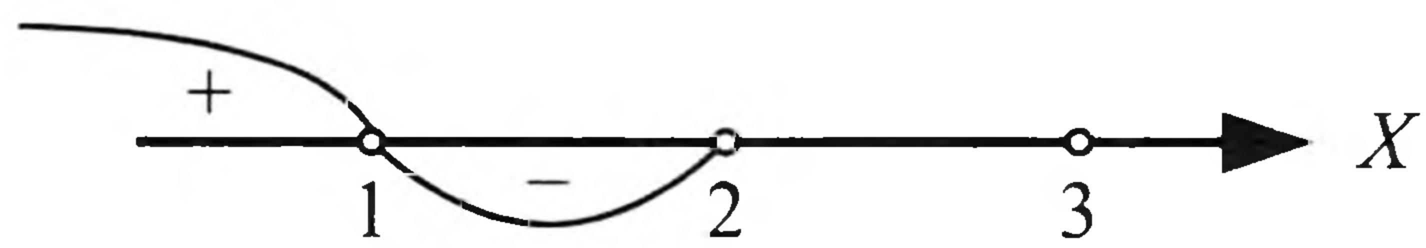
Снова расставляем точки на оси X. Точки 1 и 3 — выколотые, поскольку это нули знаменателя. Точка 2 — тоже выколота, поскольку неравенство строгое.



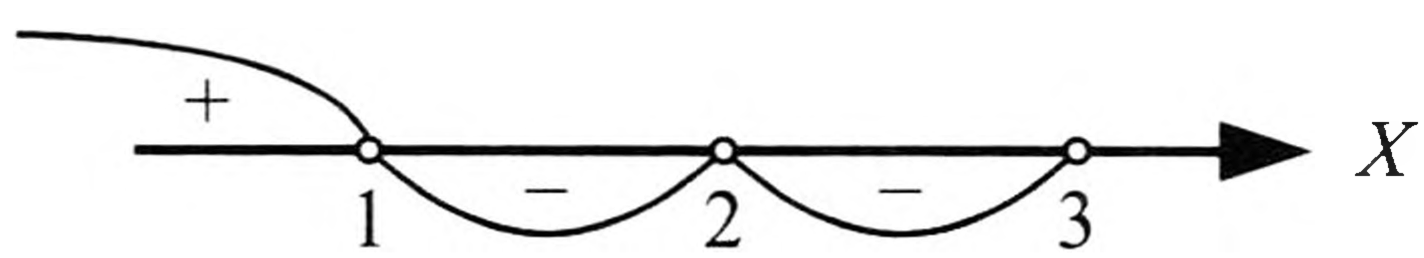
При $x < 1$ числитель положителен, оба множителя в знаменателе отрицательны. Это легко проверить, взяв любое число с данного промежутка, например, $x = 0$. Левая часть имеет знак (+).



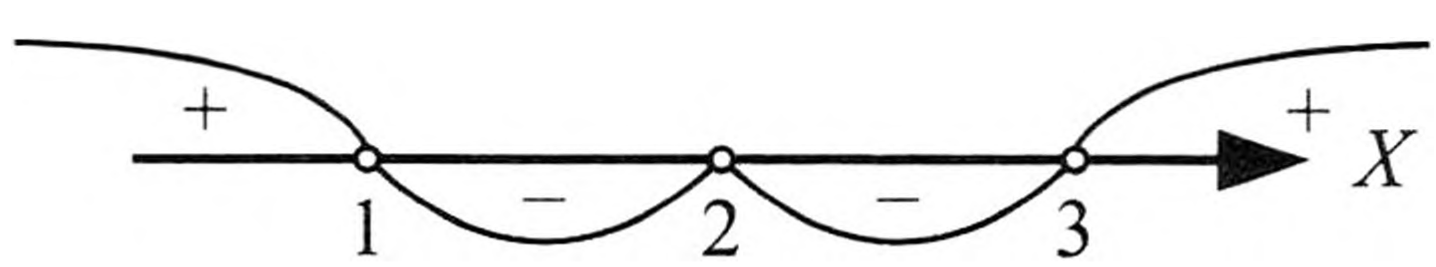
При $1 < x < 2$ числитель положителен; первый множитель в знаменателе положителен, второй множитель отрицателен. Левая часть имеет знак (–).



При $2 < x < 3$ ситуация та же! Числитель положителен, первый множитель в знаменателе положителен, второй отрицателен. Левая часть имеет знак (–).



Наконец, при $x > 3$ все множители положительны, и левая часть имеет знак (+).



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

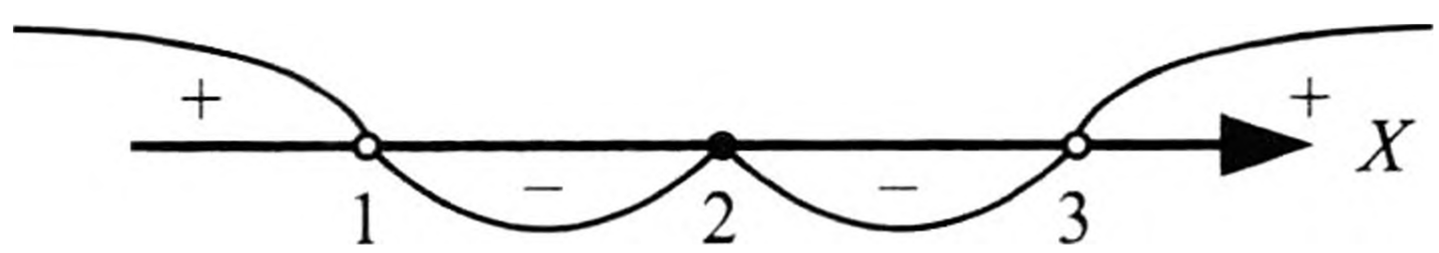
Почему нарушилось чередование знаков? Потому что при переходе через точку 2 «ответственный» за нее множитель $(x-2)^2$ *не изменил знак*. Следовательно, не изменила знак и вся левая часть нашего неравенства.

Вывод: *если линейный множитель $(x - c)$ стоит в четной степени (например, в квадрате), то при переходе через точку $x = c$ знак выражения в левой части не меняется*. В случае нечетной степени знак, разумеется, меняется.

3. Рассмотрим более сложный случай. От предыдущего отличается тем, что неравенство нестрогое.

$$\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)} \geq 0.$$

Левая часть та же, что и в предыдущей задаче. Та же будет и картина знаков.



Может, и ответ будет тем же? Нет! Добавляется решение $x = 2$. Это происходит потому, что при $x = 2$ и левая, и правая части неравенства равны нулю — следовательно, эта точка является решением.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

В неравенствах второй части ЕГЭ по математике такая ситуация встречается часто. Здесь абитуриенты попадают в ловушку и теряют баллы. Будьте внимательны!

4. Что делать, если числитель или знаменатель не удается разложить на линейные множители? Рассмотрим такое неравенство:

$$\frac{(x+2)(x^2-4x+7)}{x-5} < 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 7$ на множители разложить нельзя: дискриминант отрицателен, корней нет. Но ведь это и хорошо! Это значит, что знак выражения $x^2 - 4x + 7$ при всех x одинаков, а конкретно — положителен. Подробнее об этом можно прочитать в главе о свойствах квадратичной функции.

И теперь мы можем поделить обе части нашего неравенства на величину $x^2 - 4x + 7$, положительную при всех x. Придем к равносильному неравенству:

$$\frac{x+2}{x-5} < 0,$$

которое легко решается методом интервалов.

Обратите внимание — мы поделили обе части неравенства на величину, о которой точно знали, что она положительна. Конечно, в общем случае не стоит умножать или делить неравенство на переменную величину, знак которой неизвестен.

5. Рассмотрим еще одно неравенство, на вид совсем простое:

$$\frac{2}{x}<1.$$

Так и хочется умножить его на x. Но мы умные и не будем этого делать. Ведь x может быть как положительным, так и отрицательным. А мы знаем, что **если обе части неравенства умножить на отрицательную величину — знак неравенства меняется.**

Мы поступим по-другому — соберем все в одной части и приведем к общему знаменателю. В правой части останется ноль:

$$\frac{2}{x}-1<0;$$

$$\frac{2-x}{x}<0;$$

$$\frac{x-2}{x}>0.$$

И после этого — применим **метод интервалов**.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$.

Корни и степени. Степенная функция

Понятие степени

Степенью называется выражение вида a^c.

Здесь a — **основание** степени, c — **показатель** степени.

Степень с натуральным показателем

Проще всего определяется степень с натуральным (то есть целым положительным) показателем.

По определению, $a^1 = a$.

Выражения «возвести в квадрат» и «возвести в куб» вам знакомы.

Возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя.

$$a^2 = a \cdot a.$$

Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n}.$$

Степень с целым показателем

Показатель степени может быть не только натуральным (то есть целым положительным), но и равным нулю, а также целым отрицательным.

По определению, $a^0 = 1$.

Это верно для $a \neq 0$. Выражение 0^0 не определено.

Определим также, что такое степень с целым отрицательным показателем.

$$a^{-1} = \frac{1}{a};\ a^{-2} = \frac{1}{a^2};\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Конечно, все это верно для $a \neq 0$, поскольку на ноль делить нельзя.

Например,

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}; \ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2; \ \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2}.$$

Заметим, что **при возведении в минус первую степень дробь переворачивается.**

Показатель степени может быть не только целым, но и *дробным*, то есть рациональным числом. В главе «Числовые множества» мы говорили, что такое рациональные числа. Это числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое, q — натуральное.

Оказывается, корни и степени — две взаимосвязанные темы. Корни n-й степени удобно записывать в виде степеней с дробным показателем. Сейчас мы поговорим более подробно о корнях n-степени и начнем с хорошо знакомого вам арифметического квадратного корня.

Арифметический квадратный корень

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два решения: $x = 2$ и $x = -2$.

Это числа, квадрат которых равен 4.

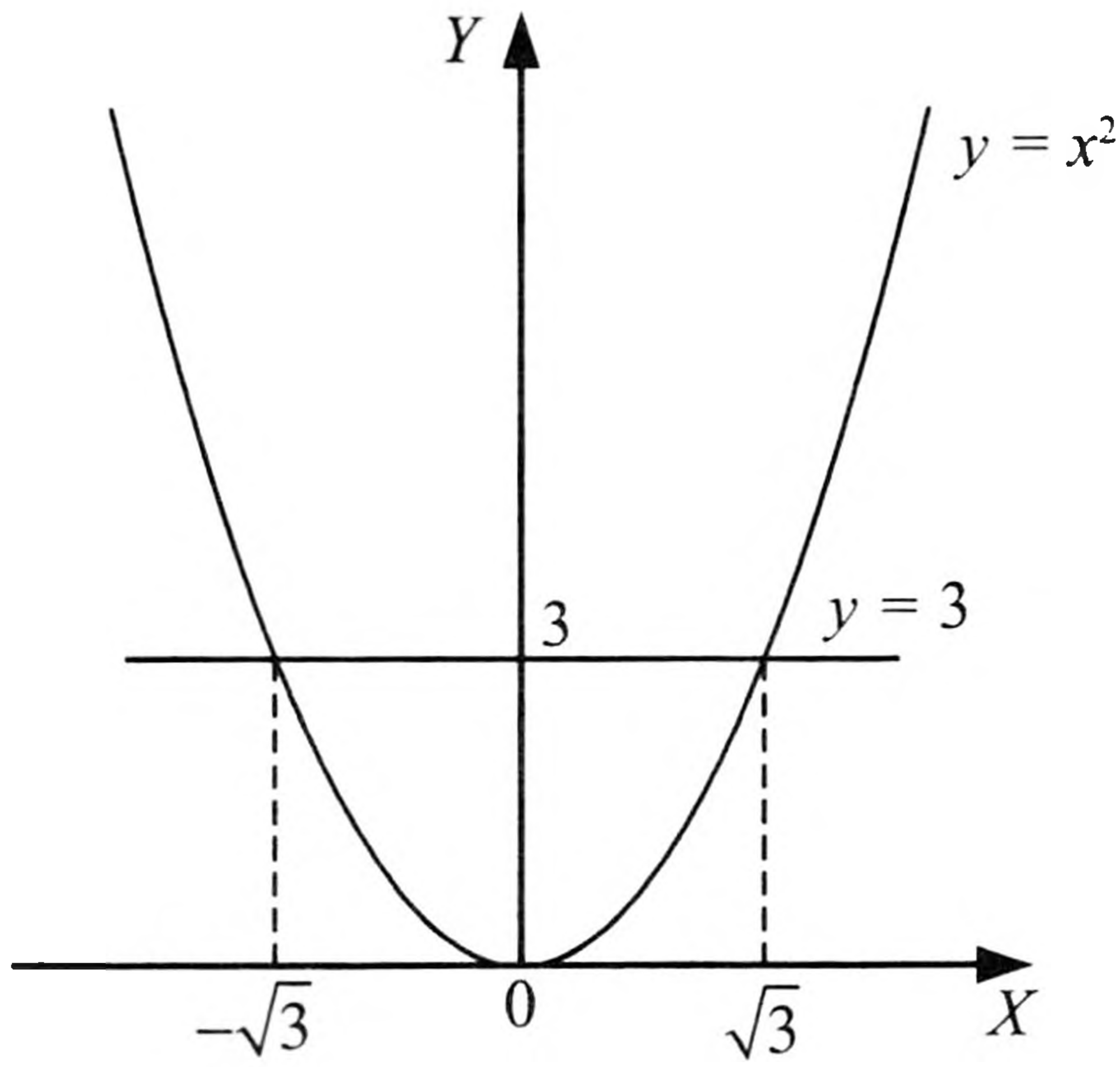
А как решить уравнение $x^2 = 3$?

Если мы нарисуем график функции $y = x^2$, то увидим, что и у этого уравнения есть два решения, одно из которых положительно, а другое отрицательно.

Но эти решения не являются целыми числами. Более того, они не являются рациональными. Для того чтобы записать эти решения, мы вводим специальный символ квадратного корня: $\sqrt{}$.

Арифметический квадратный корень из числа *a* — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

Запомним это определение.



Арифметический квадратный корень обозначается $\sqrt{a}$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Например,

$\sqrt{9} = 3.$

$\sqrt{0} = 0.$

$\sqrt{49} = 7.$

$\sqrt{169} = 13.$

Обратите внимание:

1) Квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел.

2) Выражение $\sqrt{a}$ всегда неотрицательно. Например, $\sqrt{25} = 5.$

Конечно же, число $\sqrt{a}$ не для каждого a будет целым или рациональным. Мы уже говорили, что $\sqrt{2}$, например, — число иррациональное. Его не запишешь в виде обыкновенной дроби. Калькулятор дает приближенный, округленный ответ.

$$\sqrt{2} = 1,41421... \approx 1,41.$$

$\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ — тоже иррациональные числа. Ни одно из них нельзя записать в виде целого числа или обыкновенной дроби.

Перечислим свойства арифметического квадратного корня:

1. $\sqrt{a} \geq 0$.
2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Запомним, что выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не равно $\sqrt{a+b}$. Легко проверить:

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ — совсем другой ответ.

Кубический корень

Аналогично, *кубический корень из a* — это такое число, которое при возведении в третью степень дает число a.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

$\sqrt[3]{1000} = 10$, так как $10^3 = 1000$;

$\sqrt[3]{-\dfrac{1}{125}} = -\dfrac{1}{5}$, так как $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^3 = -\dfrac{1}{125}$.

Обратите внимание, что корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Теперь мы можем дать определение корня n-й степени для любого целого n.

Корень n-й степени

Корень n-й степени из числа a — это такое число, при возведении которого в n-ю степень получается число a. При этом корень четной степени (n = 2, 4, 6 ...) — число неотрицательное.

Например,

$\sqrt[5]{32} = 2$.

$\sqrt[4]{81} = 3$.

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$.

Заметим, что корень третьей, пятой, девятой — словом, любой нечетной степени, — можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Квадратный корень, а также корень четвертой, десятой, в общем, любой четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел. Сам корень четной степени при этом также является неотрицательным числом.

Что значит «извлечь корень n-й степени»? Покажем, как это делать, на примерах из вариантов ЕГЭ:

1. $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$

2. $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3.$

3. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{5^4}}=\dfrac{1}{5}.$

4. $\sqrt[7]{(-128)}=\sqrt[7]{-1\cdot 2^7}=-2.$

Итак, $\sqrt[n]{a}$ — такое число, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$

А теперь о связи понятий «корни» и «степени». Оказывается, корни можно записывать в виде степеней с рациональным показателем. Это удобно.

По определению,

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a};$

$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a};$

в общем случае $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$

Сразу договоримся, что основание степени a больше 0.

Например,

$25^{\frac{1}{2}}=5.$

$8^{\frac{1}{3}}=2.$

$81^{\frac{1}{4}}=3.$

$100\ 000^{\frac{1}{5}}=10.$

$0{,}001^{\frac{1}{3}}=0{,}1.$

Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ по определению равно $\sqrt[n]{a^m}.$

При этом также выполняется условие $a > 0$.

Запомним **правила действий со степенями:**

$a^m a^n = a^{m+n}$ — при перемножении степеней показатели складываются.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — при делении степени на степень показатели вычитаются.

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$ — при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$a^n b^n = (ab)^n$

$$\frac{a^n}{a^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Разберем задания на вычисление по теме «Корни и степени» из вариантов ЕГЭ. Считаем без калькулятора! Обращаем внимание на приемы, которыми мы пользуемся.

Найдите значение выражения:

5. $\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{2,8\cdot 4,2}{0,24}} = \sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}} = \sqrt{\frac{7\cdot 4\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 6}} = \sqrt{7\cdot 7} = 7.$

Внесли все под общий корень, разложили на множители, сократили дробь и извлекли корень.

6. $\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14} = \frac{2^2\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2}{14} = \frac{4\cdot 7}{14} = 2.$

7. $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{9}}\cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$

8. $\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$

Записали корень в знаменателе в виде степени и аккуратно применили правила действий со степенями.

9. $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot 9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{6}}=5\cdot 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=5\cdot 9^{\frac{1}{2}}=5\cdot\sqrt{9}=5\cdot 3=15.$

10. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m=64$.

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}=\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{9}}\cdot m^{\frac{1}{18}}}=m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{18}}=m^{\frac{1}{3}}.$$

Если $m=64$, то $m^{\frac{1}{3}}=4$.

11. $5^{0,36}\cdot 25^{0,32}$.

Приведем степени к одному основанию. Выбираем самое простое. В данном случае это основание 5.

$$5^{0,36}\cdot 25^{0,32}=5^{0,36}\cdot 5^{0,64}=5^{0,36+0,64}=5^{1}=5.$$

12. $\dfrac{35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}}{5^{-3,7}}=\dfrac{5^{-4,7}\cdot 7^{-4,7}\cdot 7^{5,7}}{5^{-3,7}}=7\cdot 5^{-1}=\dfrac{7}{5}=1,4.$

Мы разложили число 35 на множители, записали выражение в виде дроби и сократили ее.

13. $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}.$

Переведем смешанные числа в неправильные дроби. Вынесем все, что можно, из-под корня.

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right):\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right):\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}:\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=2.$$

14. $0,8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}}.$

Приведем степени к одному основанию. Число 0,8 запишем в виде обыкновенной дроби.

$$0,8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot (4\cdot 5)^{\frac{6}{7}}=\frac{4^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 4^{\frac{6}{7}}\cdot 5^{\frac{6}{7}}}{5^{\frac{1}{7}}}=4\cdot 5=20.$$

15. $(4a)^3:a^7\cdot a^4=\dfrac{4^3\cdot a^3\cdot a^4}{a^7}=4^3=64.$

16. $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}.$

Пользуемся формулой квадрата суммы и сокращаем дробь.

$$\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{\left(\sqrt{13}\right)^2+2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}+7}{10+\sqrt{91}}=$$

$$=\frac{20+2\cdot\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2\cdot\left(10+\sqrt{91}\right)}{10+\sqrt{91}}=2.$$

17. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ при $m>0$.

Не пугаемся! Записываем корни в виде степеней, применяем правила действий со степенями.

$$\frac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}=\frac{\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{9}}}{\left(16\cdot m^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{m^{\frac{1}{18}}}{4\cdot m^{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{4}=0,25.$$

Все эти вычислительные приемы мы применяем для упрощения выражений с корнями и степенями. Для решения степенных, иррациональных и показательных уравнений их может быть недостаточно. Для того чтобы успешно решать эти уравнения, познакомимся со свойствами соответствующих функций.

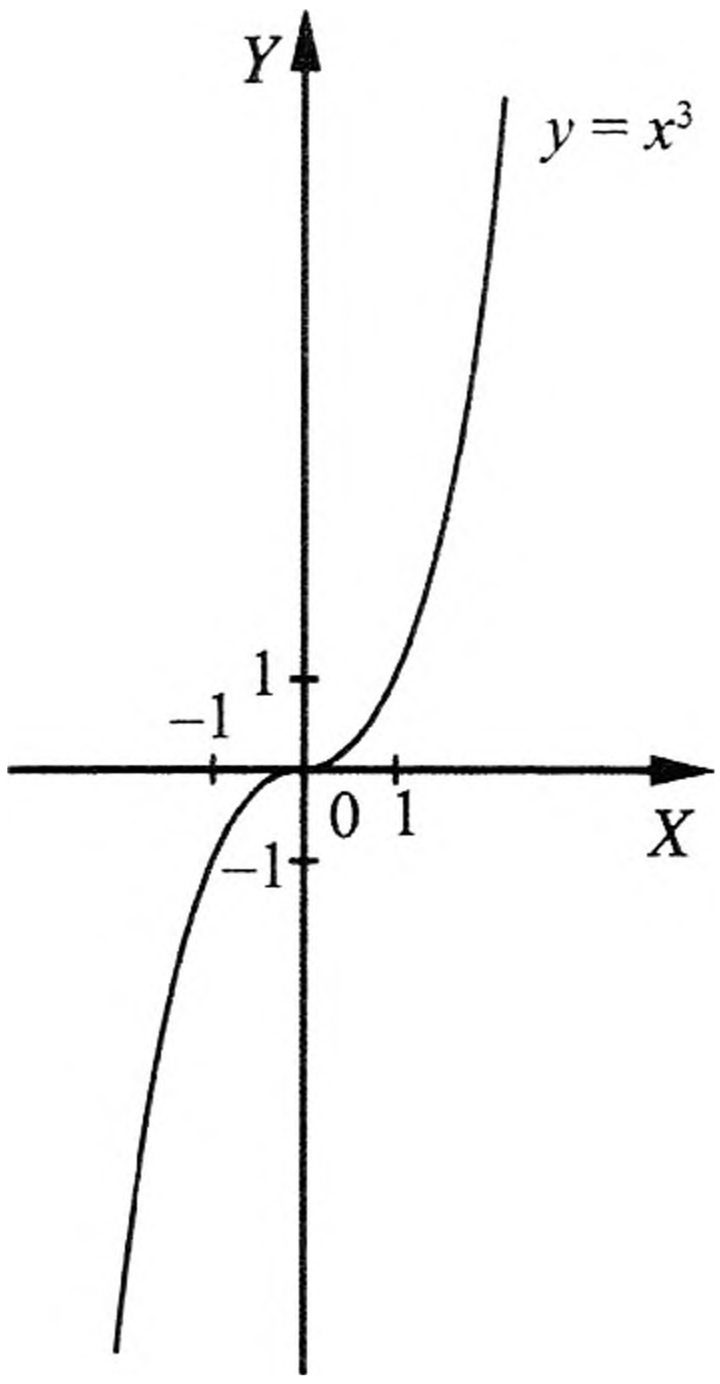
Степенная функция

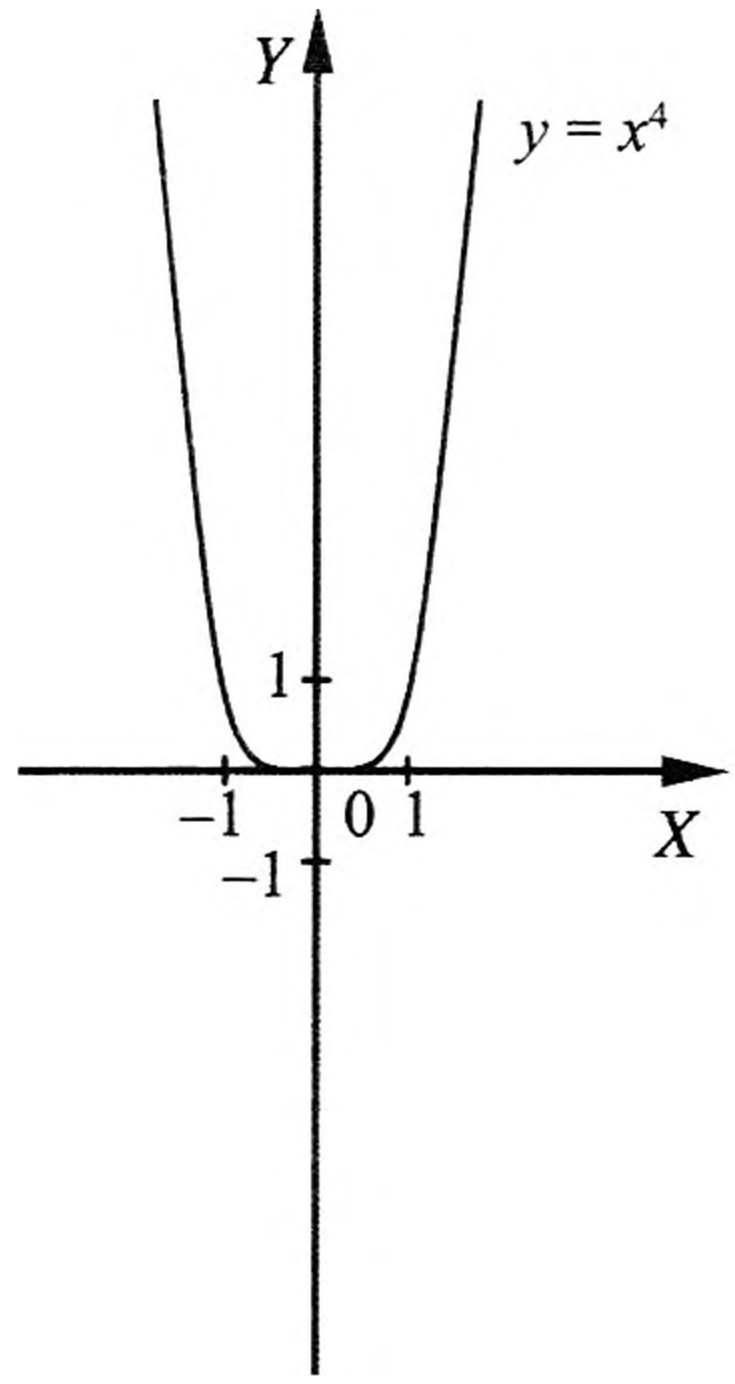
Степенными называют функции вида x^{α}, где α может быть целым, дробным, положительным или отрицательным. К ним относятся уже знакомая нам линейная функция $y = x$, квадратичная парабола $y = x^2$, кубическая парабола $y = x^3$. Степенными являются также гипербола $y=\dfrac{1}{x}$, которую можно представить как $y = x^{-1}$, функция $y=\sqrt{x}$ (ведь $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$), $y=\sqrt[3]{x}$ и многие другие.

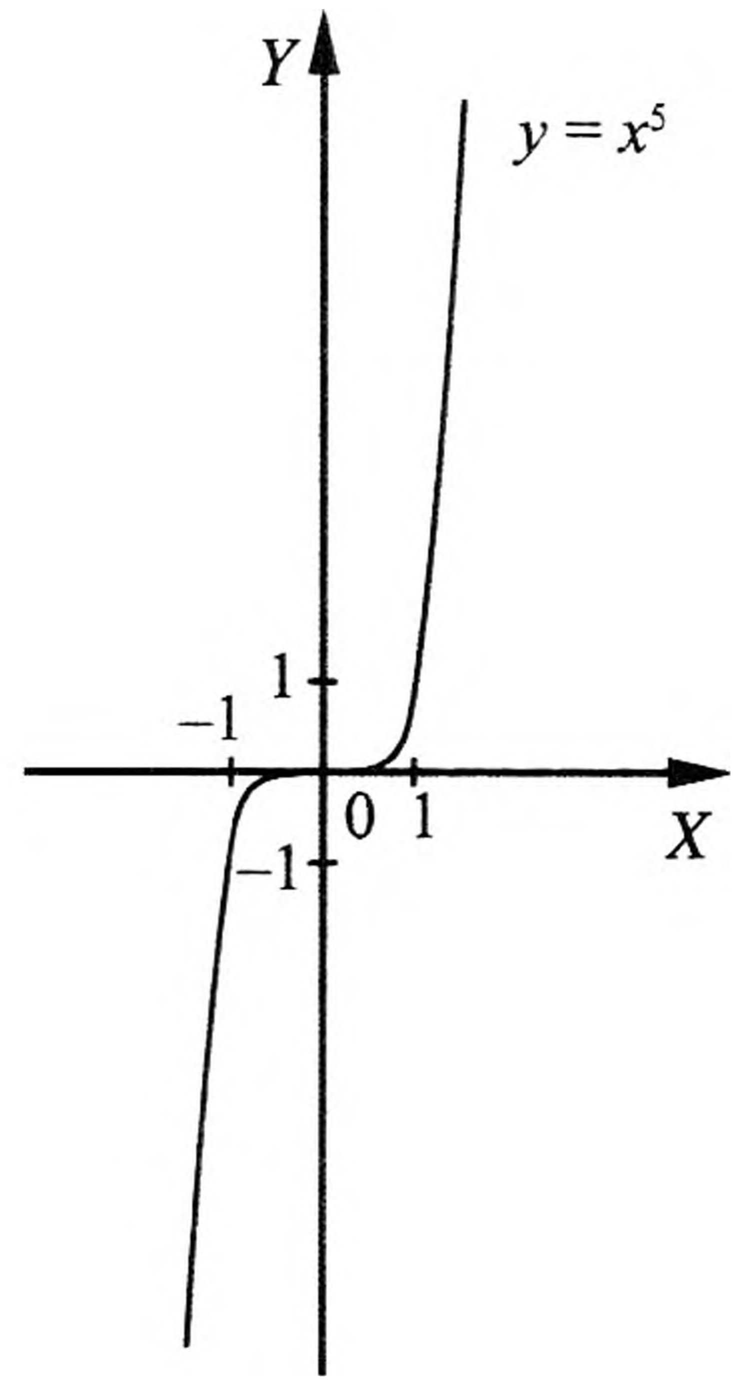
Обратите внимание: аргумент x находится в основании степени.

Теперь подробно об этих функциях и их графиках.

1. О линейной и квадратичной функции мы уже рассказывали.
2. На рисунках функции $y=x^3$ (кубическая парабола), $y=x^4$ и $y=x^5$.







Заметим, что между функциями $y=x^2$ и $y=x^4$ есть определенное сходство. Оба этих графика симметричны относительно оси Y. Такие функции называются **четными.**

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля;

2) для каждого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Графики функций $y = x^3$ и $y = x^5$ симметричны относительно начала координат. Эти функции — нечетные.

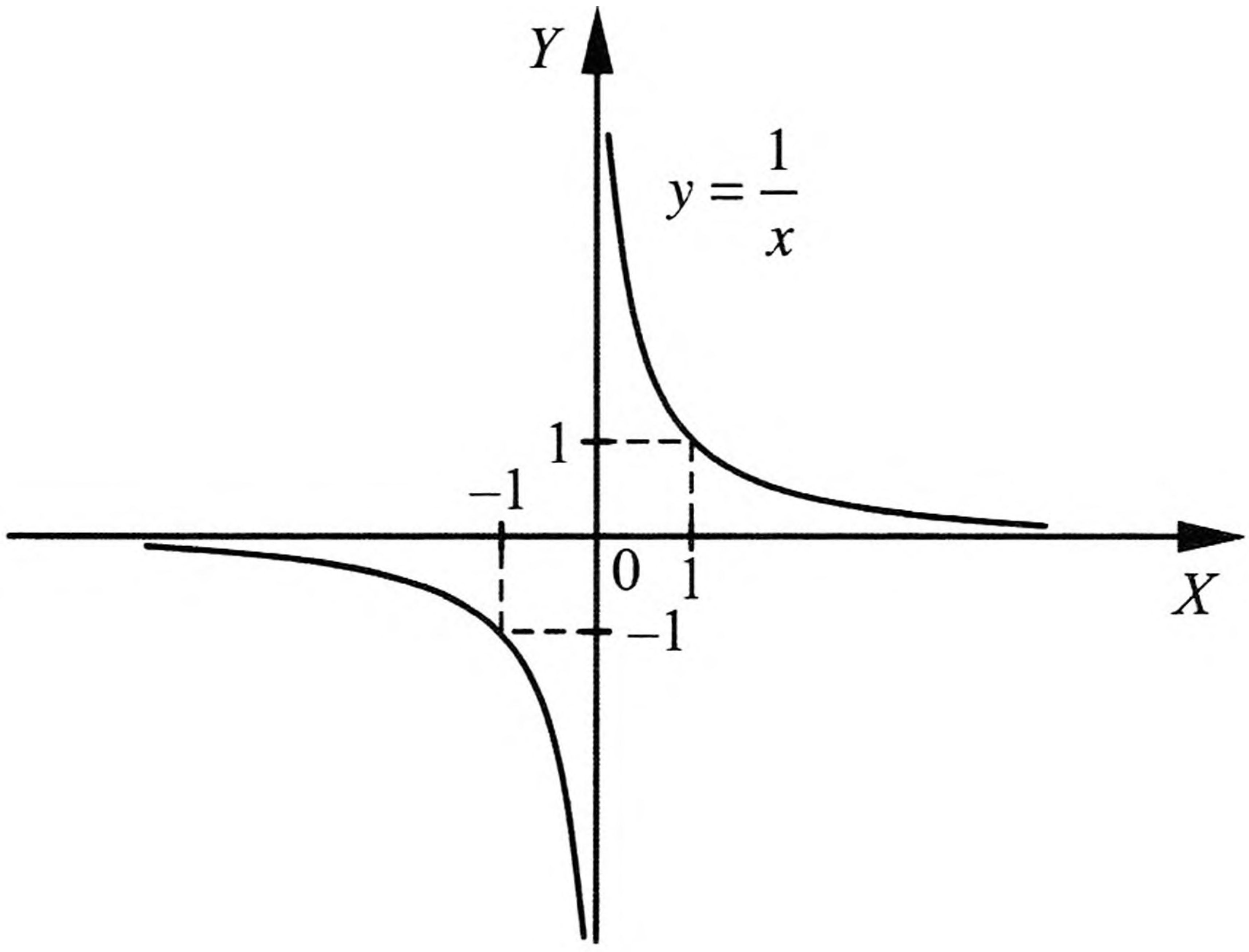
Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля;

2) для каждого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Очевидно, что при натуральных α функция $y = x^\alpha$, является четной при четных значениях α и нечетной при нечетных α.

3. Уже знакомая нам функция $y = \frac{1}{x}$ (гипербола) также относится к степенным. Ведь $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Поскольку знаменатель не должен обращаться в ноль, эта функция не определена при $x = 0$. Гипербола является нечетной функцией. Ее график симметричен относительно начала координат.



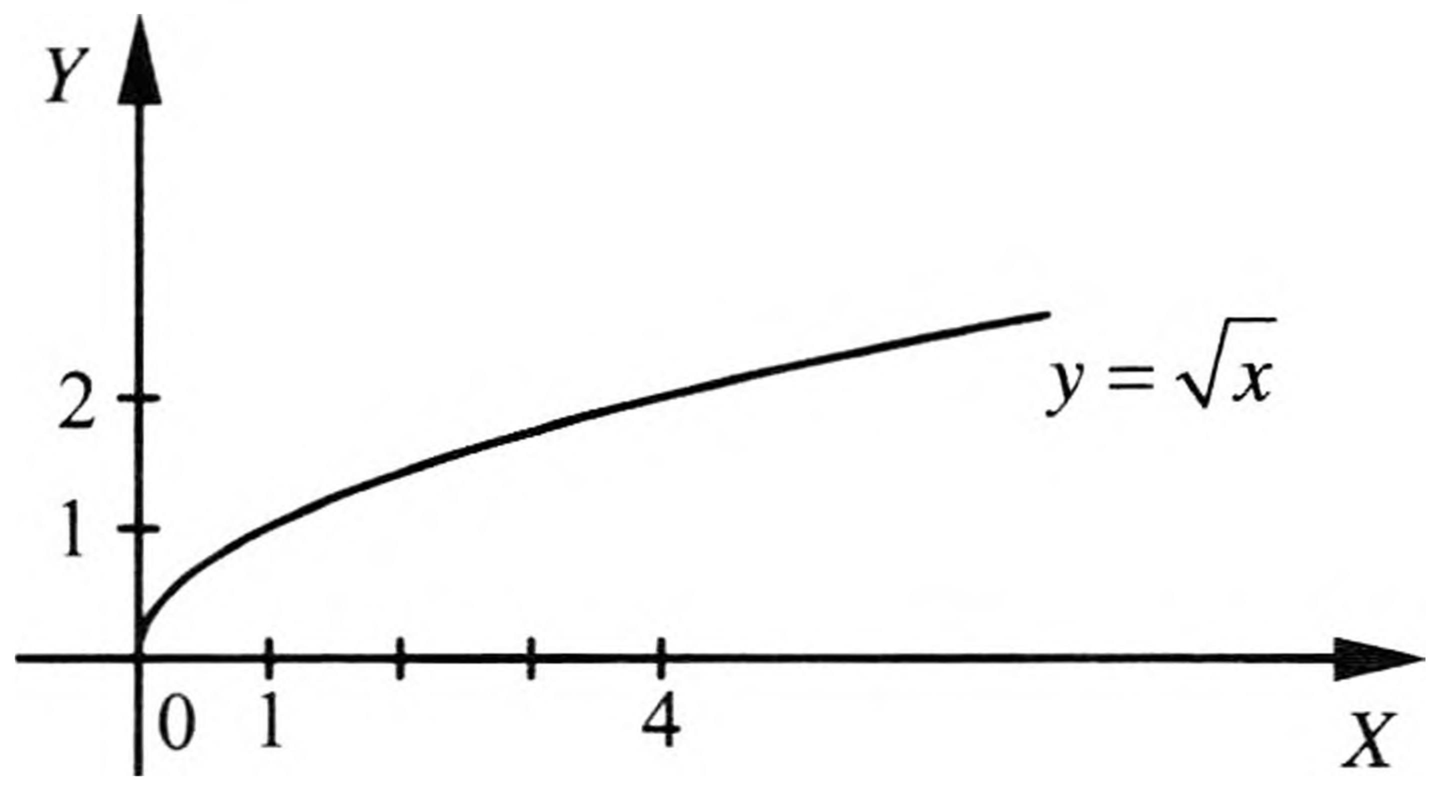
А вот функция $y = \frac{1}{x^2}$ является четной. Ее график симметричен относительно оси OY. Кроме того, она принимает только положительные значения.

4. Построим график функции $y = \sqrt{x}$.

Эта функция общего вида — она не является ни четной, ни нечетной.

Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x \geq 0$, поэтому область определения функции — все неотрицательные числа.

Кроме того, $y = \sqrt{x}$ принимает только неотрицательные значения, поскольку $\sqrt{x} \geq 0$.



Сейчас мы зададим вопрос, ставящий в тупик почти любого абитуриента.

Чему равен $\sqrt{a^2}$?

Если вы тоже думаете, что это a, или $\pm a$ — вы ошибаетесь!

Правильный ответ: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Запомните это.

Например, возьмем $a = -2$. Тогда

$(-2)^2 = 4;$

$\sqrt{4} = 2.$

Действительно, по определению квадратного корня, $\sqrt{a^2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a^2. Это модуль числа a.

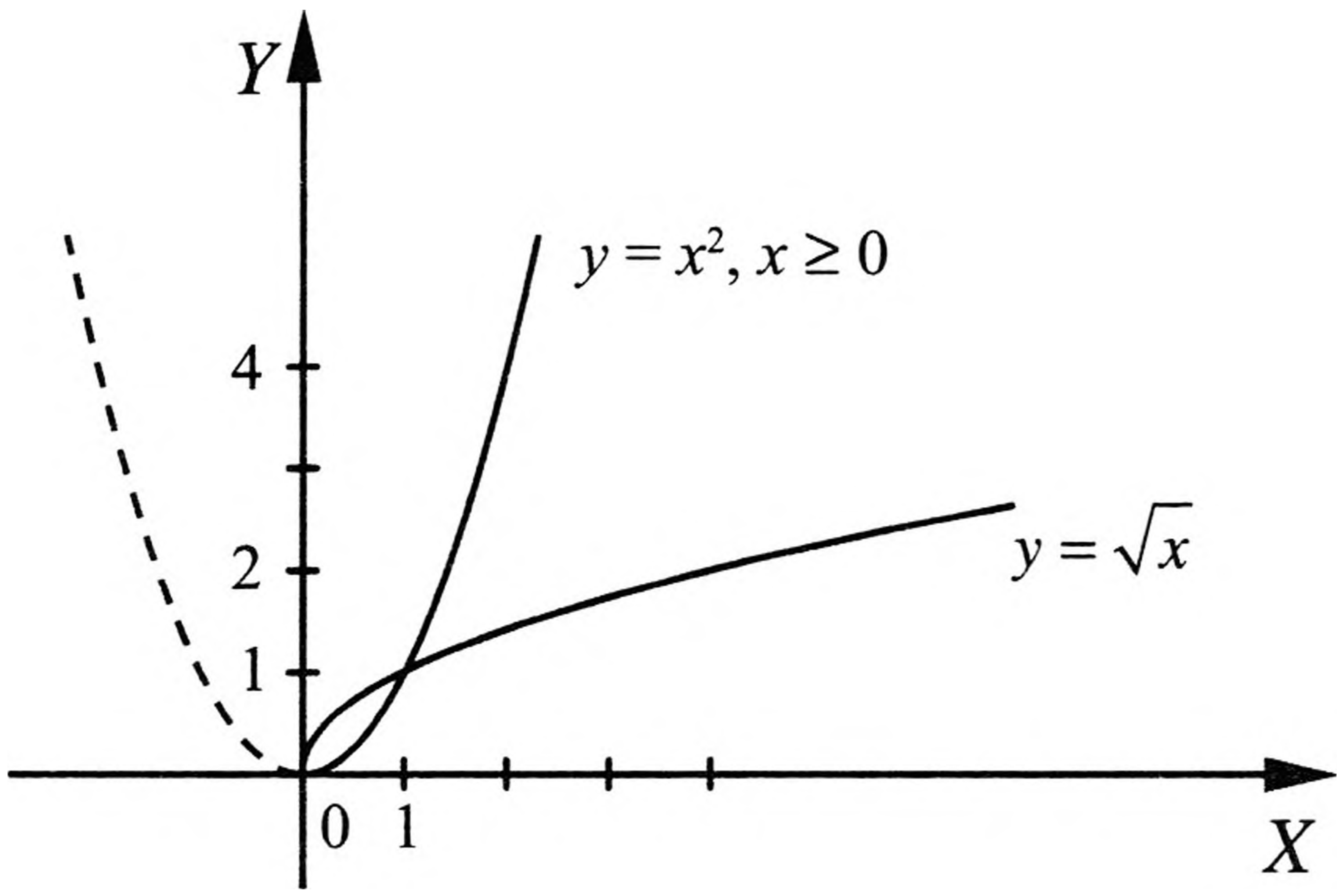
И еще одно интересное свойство функции $y = \sqrt{x}$.

Изобразим на одном графике параболу $y = x^2$ и функцию $y = \sqrt{x}$.

Сейчас нас интересует правая ветвь параболы, то есть та, где $x \geq 0$.

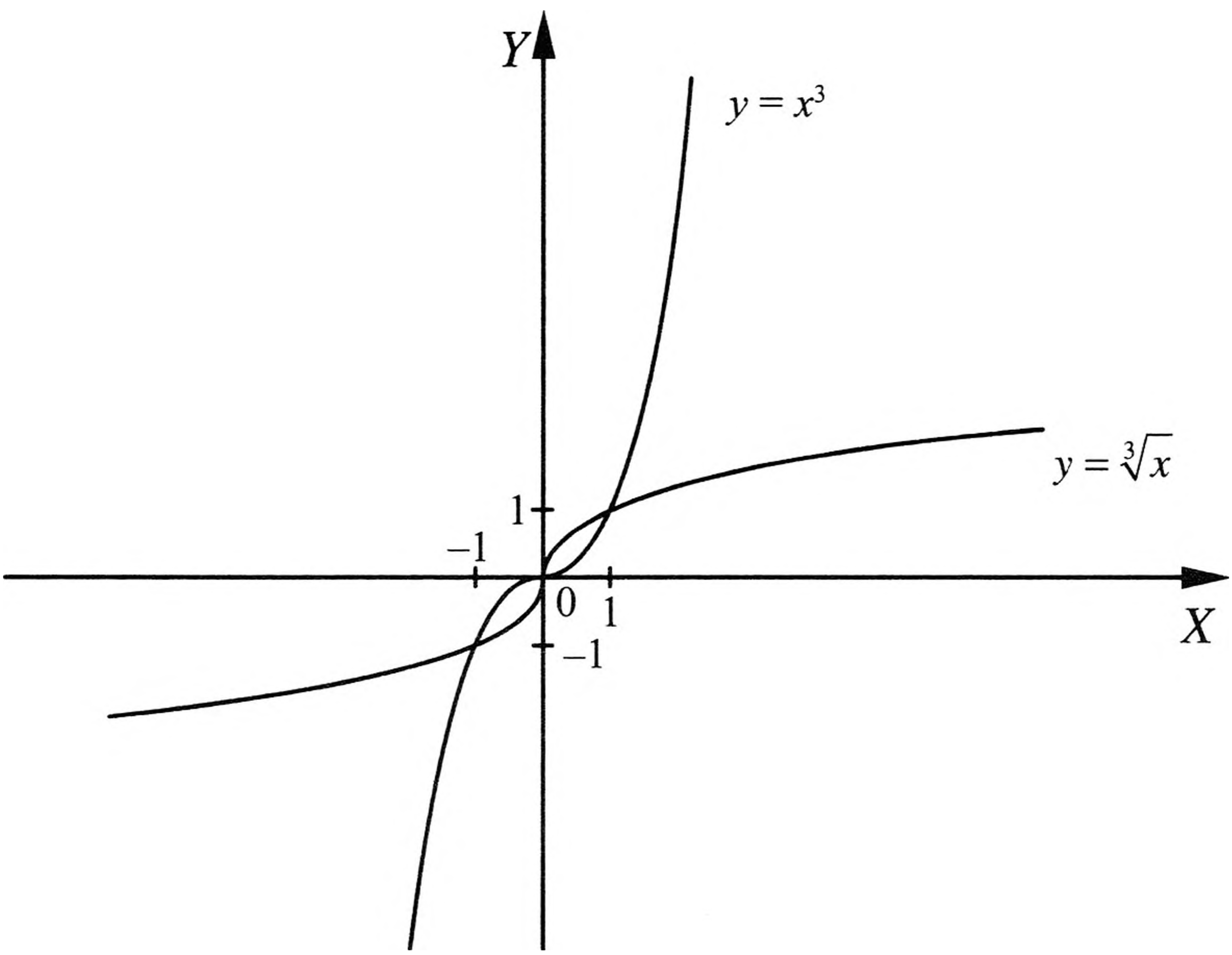
Мы видим, что эта часть параболы и график функции $y = \sqrt{x}$ словно нарисованы по одному шаблону, по-разному расположенному в координатной плоскости. Они симметричны относительно прямой

$y = x$. То, что для одной из них — область определения, для другой — область значений.



Такие функции называются взаимно обратными. Подробно мы расскажем об этом в теме «Логарифмическая функция».

5. Легко убедиться, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ является обратной к функции $y = x^3$.



Иррациональные уравнения

Теперь мы знаем, что функция $y=\sqrt{x}$ определена только для $x \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения, поскольку $\sqrt{x} \geq 0$.

Покажем, как эти свойства используются при решении иррациональных (то есть содержащих знак корня) уравнений.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ имеет смысл только при $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. Это его область допустимых значений.

При выполнении данных условий обе части уравнения неотрицательны. Значит, мы можем возвести обе его части в квадрат.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Обратите внимание — мы не записали в систему условие $f(x) \geq 0$. Дело в том, что это условие следует из первого уравнения системы. Поскольку правая его часть неотрицательна (как квадрат некоторой величины) — левая тоже неотрицательна.

И еще заметьте, что мы ввели новое понятие: **равносильность уравнений**.

Уравнения называются *равносильными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Когда мы говорим, что уравнение равносильно системе — это значит, что исходное уравнение и эта система имеют одинаковые множества решений.

Уравнения, содержащие корни, называются *иррациональными*. Способ решения таких уравнений — возвести обе части в нужную степень и не забыть про область допустимых значений уравнения.

1. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{6}{4x-64}}=\frac{1}{7}.$$

Это задание из варианта ЕГЭ. Что нужно сделать, как вы считаете?

Многие школьники говорят: «Избавимся от корня». Но это выражение некорректно! Как именно избавимся? Сотрем его ластиком? Выкинем в окно? — Непонятно! На самом деле надо **возвести в квадрат** обе части уравнения. Ведь выражение под корнем в данном случае — такое число, квадрат которого равен $\frac{1}{7}$.

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{6}{4x-54}=\frac{1}{49}.$$

Решим пропорцию:

$4x-54=6\cdot 49;$

$4x=348;$

$x=87.$

Ответ: 87.

2. $\sqrt{-72-17x}=-x.$

Если уравнение содержит два корня, в ответ запишите меньший из них.

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}-72-17x=(-x)^2,\\ -x\geq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-72-17x=x^2,\\ x\leq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+17x+72=0,\\ x\leq 0.\end{cases}$$

Корни уравнения: $x_1=-8$; $x_2=-9$. Проверка показывает, что оба корня подходят. В ответ записываем меньший из них, как и требовалось в условии.

Ответ: –9.

3. $\sqrt[3]{x-4}=3.$

Возводим в куб обе части.

$x-4=3^3;$

$x-4=27;$

$x=31.$

Ответ: 31.

4. Теперь — задача с подвохом. Будьте внимательны! Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{54-3x}=x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 54-3x=x^2, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Мы возвели правую и левую части уравнения в квадрат. Кроме того, вспомнили об области допустимых значений данного уравнения. Выражение под корнем должно быть неотрицательно и правая часть — тоже неотрицательна.

Перенеся все в одну сторону, получим квадратное уравнение.

$$x^2+3x-54=0.$$

Решив его, получим корни $x_1=-9$ и $x_2=6$.

Здесь и делают ошибку большинство учеников, записав в ответ –9. Вроде бы, в ответ требовалось записать меньший корень уравнения. Но разве $x=-9$ является корнем? — Нет, он не удовлетворяет условию $x\geq 0$. При $x=-9$ уравнение не имеет смысла.

Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x=6$, который и нужно записать в ответ.

Ответ: 6.

Задачи с физическим содержанием на тему «Степенные функции»

1. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Обратите внимание на следующие моменты:

- В задачах подобного типа, а также в задачах по геометрии, нам часто будут встречаться греческие буквы. Пожалуйста, выучите греческий алфавит. Он специально приведен в конце книги. В данном случае буква σ называется «сигма».
- Температура здесь измеряется в градусах Кельвина. Абсолютный ноль по Кельвину — это минус 273 градуса Цельсия. Это минимальный предел температуры, которую теоретически может иметь физическое тело во Вселенной. Такая температура недостижима на практике в рамках применимости термодинамики. При этой температуре невозможно тепловое движение атомов и молекул. Поэтому температура в Кельвинах никак не может быть отрицательна!

По условию, мощность излучения не менее $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. «Не менее» означает «больше или равна», то есть $P \geq 9{,}12 \cdot 10^{25}$. Подставим данные в наше уравнение для температуры

$$9{,}12 \cdot 10^{25} = \frac{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{20}}{16} \cdot T^4.$$

Обратите внимание, что мы берем крайнее значение для температуры, когда мощность в точности равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Остается выразить отсюда температуру. Сократив и поработав со степенями, получим

$$T^4 = 256 \cdot 10^{12}.$$

Остается найти T. Мы уже знаем, что $T > 0$, поэтому

$$T = \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}}.$$

Число, которое умножили четыре раза само на себя и получили 256, — это 4 ($16^2 = 4^4$), а $(10^3)^4 = 10^{12}$.

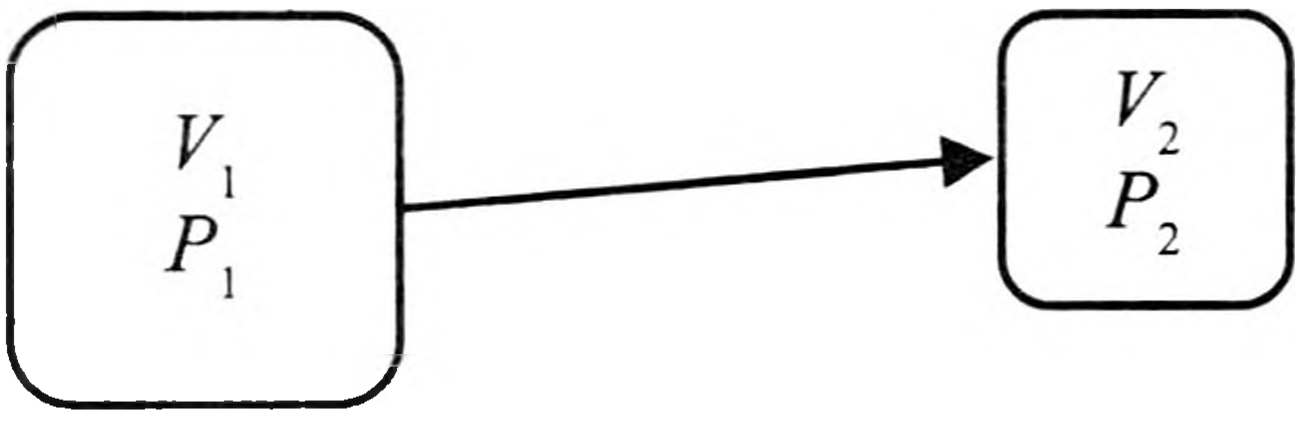
Ответ: 4000.

Для справки. Температура на поверхности нашего Солнца близка к 6000 К.

2. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $PV^{1,4} = \text{const}$, где P (атм) — давление в газе, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Известно, что $V_1 = 1{,}6$, $P_1 = 1$ атм, $P_2 = 128$ атм. Нужно найти объем V_2.

В задаче сказано, что сначала газ находился в каком-то одном состоянии с объемом V_1 и давлением P_1. Газ сжимают, то есть переводят в другое состояние, и при этом объем стал V_2 и давление P_2.



При этом $PV^{1,4} = \text{const}$.

Что такое «const»? Это константа, то есть постоянная величина.

Значит, для состояний, в которых находится газ, выполняется условие: $P_1V_1^{1,4} = P_2V_2^{1,4}$. Остается подставить данные задачи в это уравнение

$$1\cdot 1,6^{1,4} = 128\cdot V_2^{1,4}.$$

Вся задача свелась к решению степенного уравнения — такого, где переменная находится в основании степени. С чего начать? Прежде всего, представим 1,4 в виде обыкновенной дроби, а 128 как 2^7.

$$1,6^{\frac{7}{5}} = 2^7\cdot V_2^{\frac{7}{5}}.$$

$$\left(1,6^{\frac{1}{5}}\right)^7 = \left(2\cdot V_2^{\frac{1}{5}}\right)^7.$$

Извлекаем корень седьмой степени из левой и правой части.

$$1,6^{\frac{1}{5}} = 2\cdot V_2^{\frac{1}{5}}.$$

Возведем обе части в пятую степень.

$$1,6 = 32\cdot V_2.$$

$$V_2 = \frac{1,6}{32} = 0,05.$$

Ответ: 0,05.

Пример 3

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон PV^k = const, где P — давление в газе в паскалях, V — объем газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k=\frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором const = 10^5 Па · м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объем V может занимать газ при давлениях P не ниже $3,2\cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Как и в предыдущей задаче, вначале состояние газа характеризовалось объемом V_1 и давлением P_1. Газ, сжимая, переводят в другое состояние, при этом объем стал V_2 и давление P_2.

Поскольку $PV^{\frac{5}{3}} = \text{const}$, выражение в левой части остается постоянной величиной. Значение константы дано и равно 10^5, давление в начале было не ниже $3{,}2 \cdot 10^6$. Получим

$$3{,}2 \cdot 10^6 \cdot V^{\frac{5}{3}} \le 10^5.$$

Так как $3{,}2 \cdot 10^6$ — это $3{,}2 \cdot 10 \cdot 10^5$, то

$$32 \cdot 10^5 \cdot V^{\frac{5}{3}} \le 10^5.$$

10^5 справа и слева сокращаются, и получается

$$V^{\frac{5}{3}} \le \frac{1}{32}.$$

Нам необходимо крайнее, то есть самое большее значение объема. Поэтому мы решаем уравнение

$$V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}.$$

Представим $\frac{1}{32}$ в виде степени

$$V^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Извлекаем корень пятой степени из правой и левой части.

$$V^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Возведем обе части в куб

$$V = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

Итак, мы рассмотрели функции вида $y = x^{\alpha}$, в формулах которых аргумент x находится в основании. А что будет, если x в показателе?

Показательная и логарифмические функции

Показательная функция

Показательная функция — это функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Это одна из интереснейших функций в математике! И, пожалуй, больше всего сказочных историй рассказывают именно о ней. Я знаю по крайней мере три таких сказки. Одну из них расскажу в конце этой главы, а сейчас хочу начать с реальной драматической истории. Сначала задам вам вопрос: знаете ли вы, как размножаются кролики?

Они делают это часто и с удовольствием! И если на территории, где они находятся, достаточно пищи и нет естественных врагов, размножение кроликов оказывается яркой иллюстрацией свойств показательной функции.

Когда кроликов завезли в Австралию, их сначала содержали в клетках. Но в середине XIX века один фермер выпустил на волю 24 длинноухих зверька.

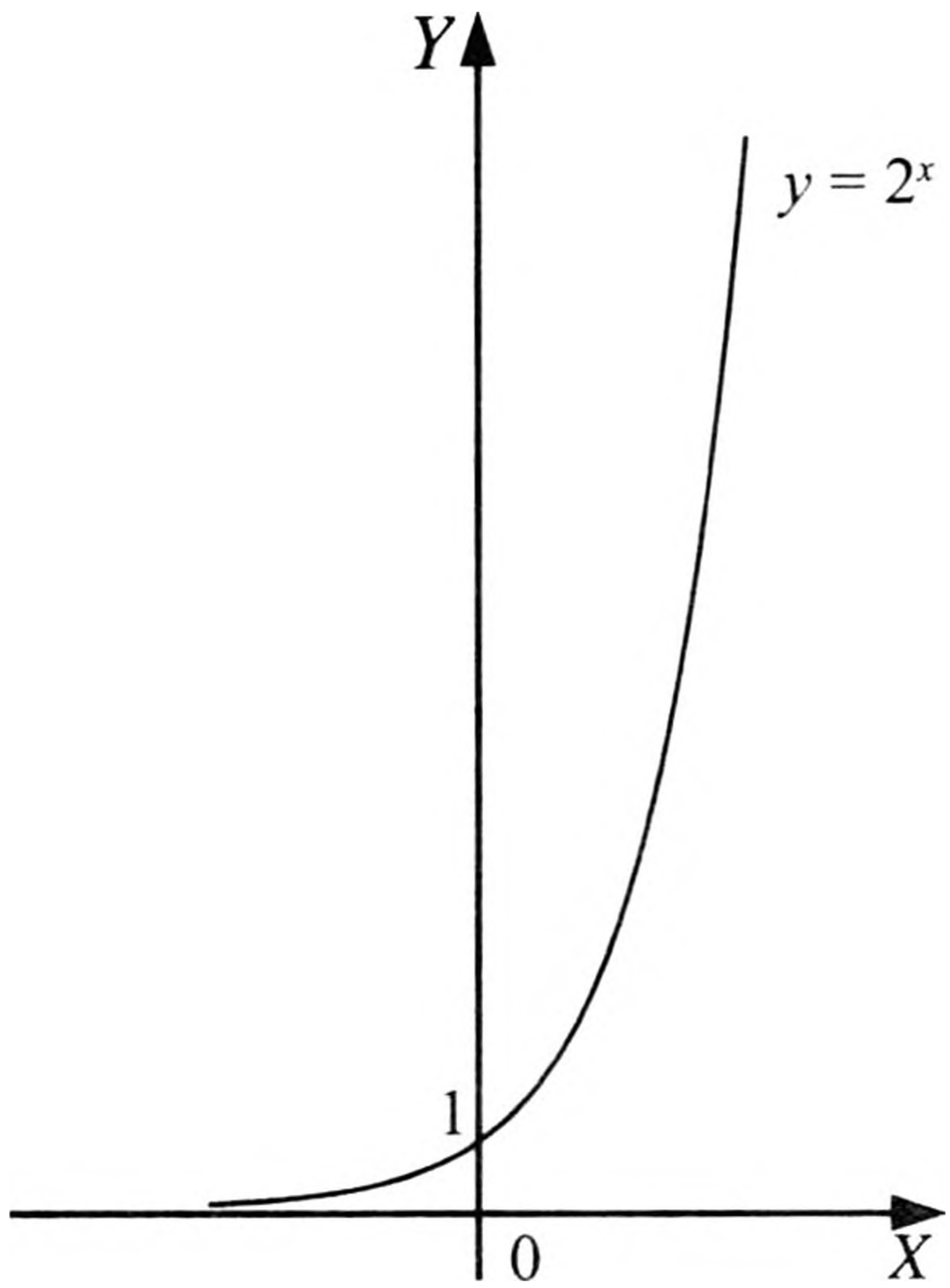
И тут такое началось... Попав в благоприятные условия и не встретив достойных противников, кролики стали активно плодиться. Чем больше было кроликов, тем быстрее росло их число. Через 10 лет их было уже 2 миллиона. Еще через 20 лет — 100 миллионов. Армия кроликов съедала все на своем пути, прогоняя кенгуру и сумчатых волков с захваченных территорий. Овцы чахли без корма, поля и сады превращались в пустыню. Думал ли фермер, который выпустил кроликов на свободу, к какому бедствию это приведет?

Что произошло?

Оказывается, численность живых организмов, в условиях избытка пищи и отсутствия врагов, описывается именно показательной функцией — то есть функцией вида $y = a^x$.

Чтобы лучше познакомиться с ней, построим график функции $y = 2^x$. Для этого посчитаем значения функции при целых x, нанесем точки на координатную плоскость и соединим их плавной линией.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



Мы видим, что эта функция является возрастающей, и растет она очень быстро. Более того — чем больше значение x, тем больше в этой точке крутизна графика. Чем больше значение этой функции, тем быстрее она растет. То есть растет не только функция, но и ее производная.

Теперь построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

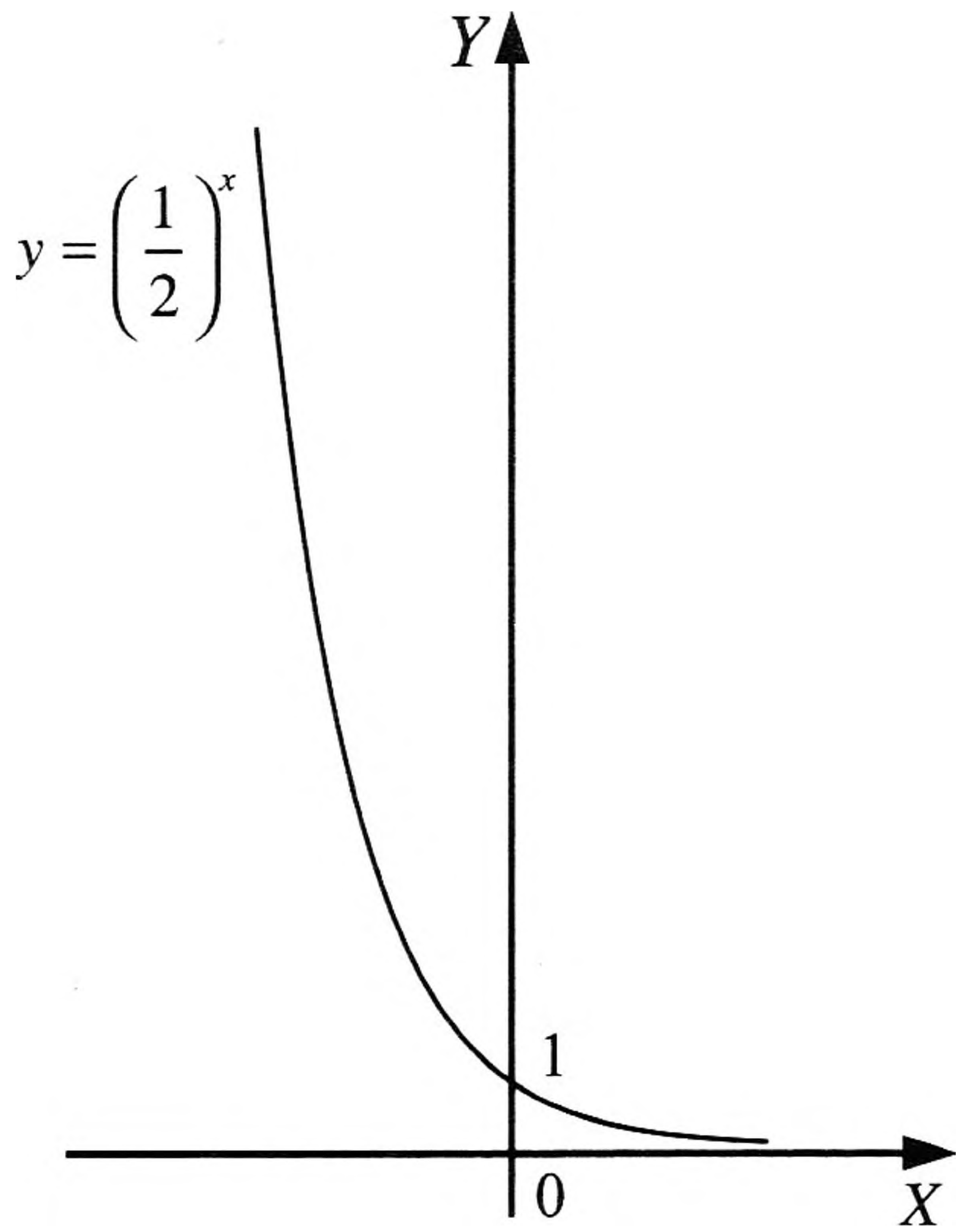
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Эта функция — убывающая. Ее график зеркально симметричен графику функции $y = 2^x$ относительно оси Y.

Заметим, что при построении этих графиков мы сделали одно допущение.

Мы уже знаем, что такое степень с рациональным показателем — об этом рассказывается в главе «Степени и корни». Но понятия степени с иррациональным показателем мы не вводили (например,

$2^{\sqrt{2}}$ — что это такое?). Интуитивно мы чувствуем, что функция $y = 2^x$ определена для всех действительных x и ее график должен быть непрерывной линией, однако доказательство этого выходит за рамки школьного курса.



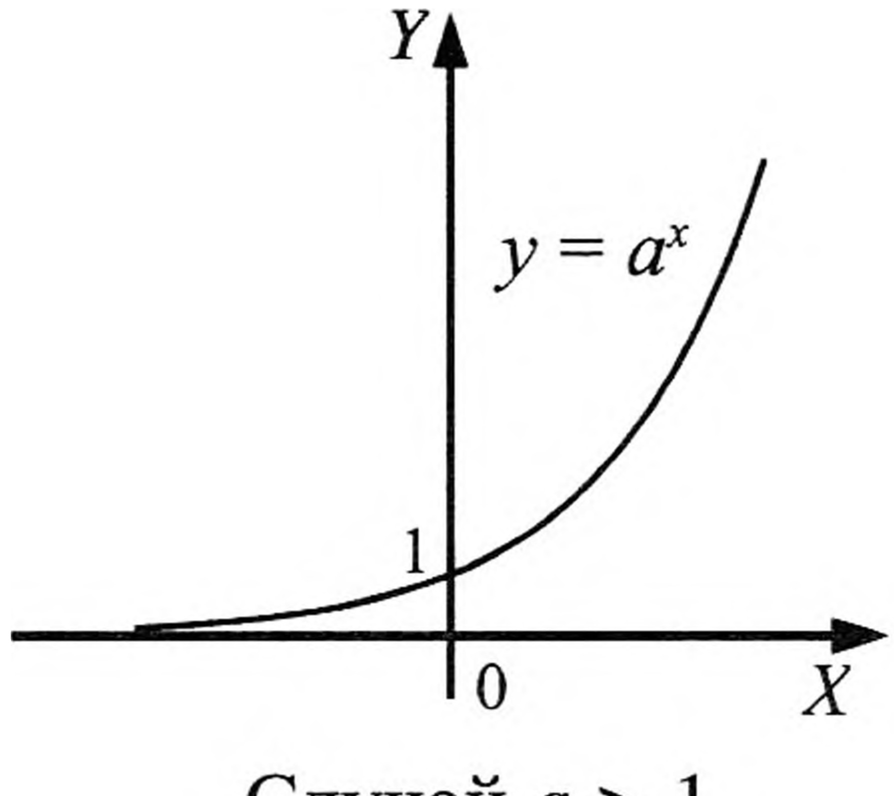
Тем не менее, свойства показательной функции $y = a^x$ активно используются при решении задач. Перечислим наиболее важные из них.

1. Область определения функции — все действительные числа: $D(y) = R$.

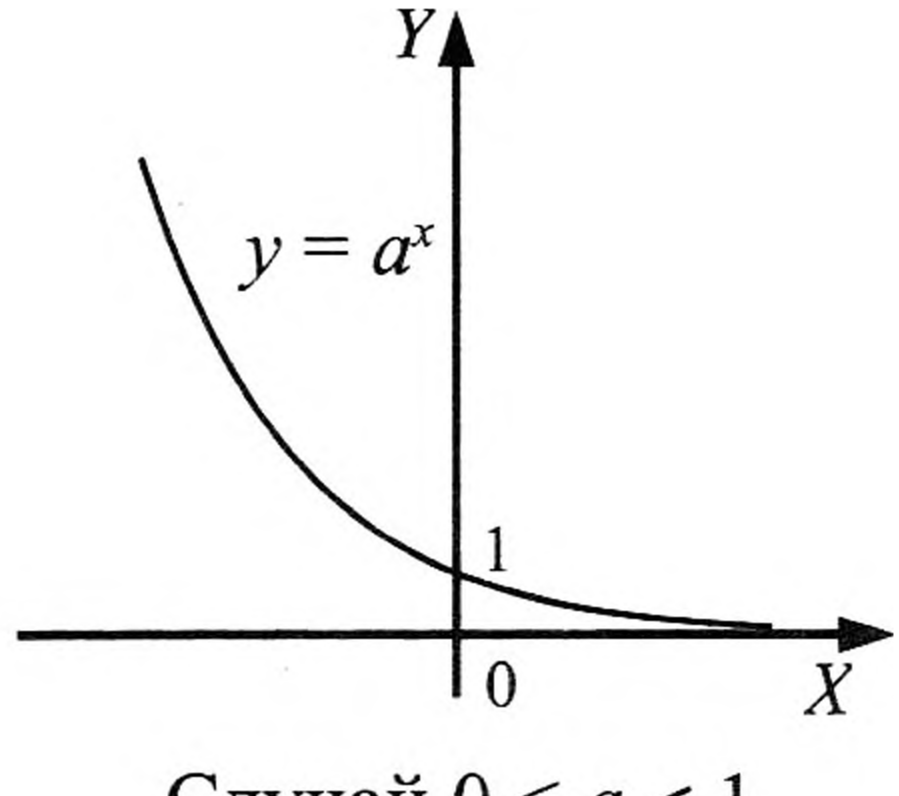
2. Область значений функции: $E(y) = (0; +\infty)$.

3. Поскольку $a^0 = 1$, график проходит через точку (0,1).

4. При $a > 1$ функция возрастает. При $0 < a < 1$ функция убывает.



Случай $a > 1$



Случай $0 < a < 1$

Вернемся к нашим кроликам. Вы смотрели фильм «Социальная сеть» — о том, как студент Марк Цукерберг создал *Facebook* и стал миллионером? Вспомните сюжет. Количество пользователей сети *Facebook* росло по тому же закону, что и число плодящихся кроликов. Каждый пользователь приглашал друзей, и чем больше становилось пользователей, тем быстрее росло их число.

Итак, показательная функция описывает взрывные, быстро развивающиеся процессы — в физике, биологии, экономике, социальной жизни. Лавинный эффект, радиоактивный распад, взрывной рост популяции живых организмов — все они описываются показательными функциями.

И, чтобы лучше запомнить свойства показательной функции, — одна из сказочных историй.

Однажды в Древней Индии царь узнал, что в его стране один мудрец изобрел замечательную игру — шахматы. Царь приказал доставить мудреца к себе во дворец, сыграл с ним несколько партий, и шахматы очень понравились ему. В восторге царь сказал мудрецу: «Выбирай себе любую награду. Все получишь, чего ни пожелаешь!»

А мудрец ответил: «Пусть на первую клетку шахматной доски положат одно пшеничное зерно. На вторую — два, на третью — четыре, и на каждую следующую в два раза больше, чем на предыдущую. Все это зерно и будет моей наградой».

Царь рассмеялся, решив, что мудрец, должно быть, спятил, раз просит о такой ничтожной вещи, как кучка зерна, но приказал слугам все исполнить. И на первую клетку шахматной доски положили одно зерно ($2^0 = 1$), на вторую два ($2^1 = 2$), на третью $2^2 = 4$. На десятой клетке уже не помещались $2^9 = 512$ зерен...

Несколько дней царский казначей вычислял требуемое количество зерен. Оказалось, что выполнить просьбу мудреца невозможно — даже если все поля нашей планеты засеять пшеницей!

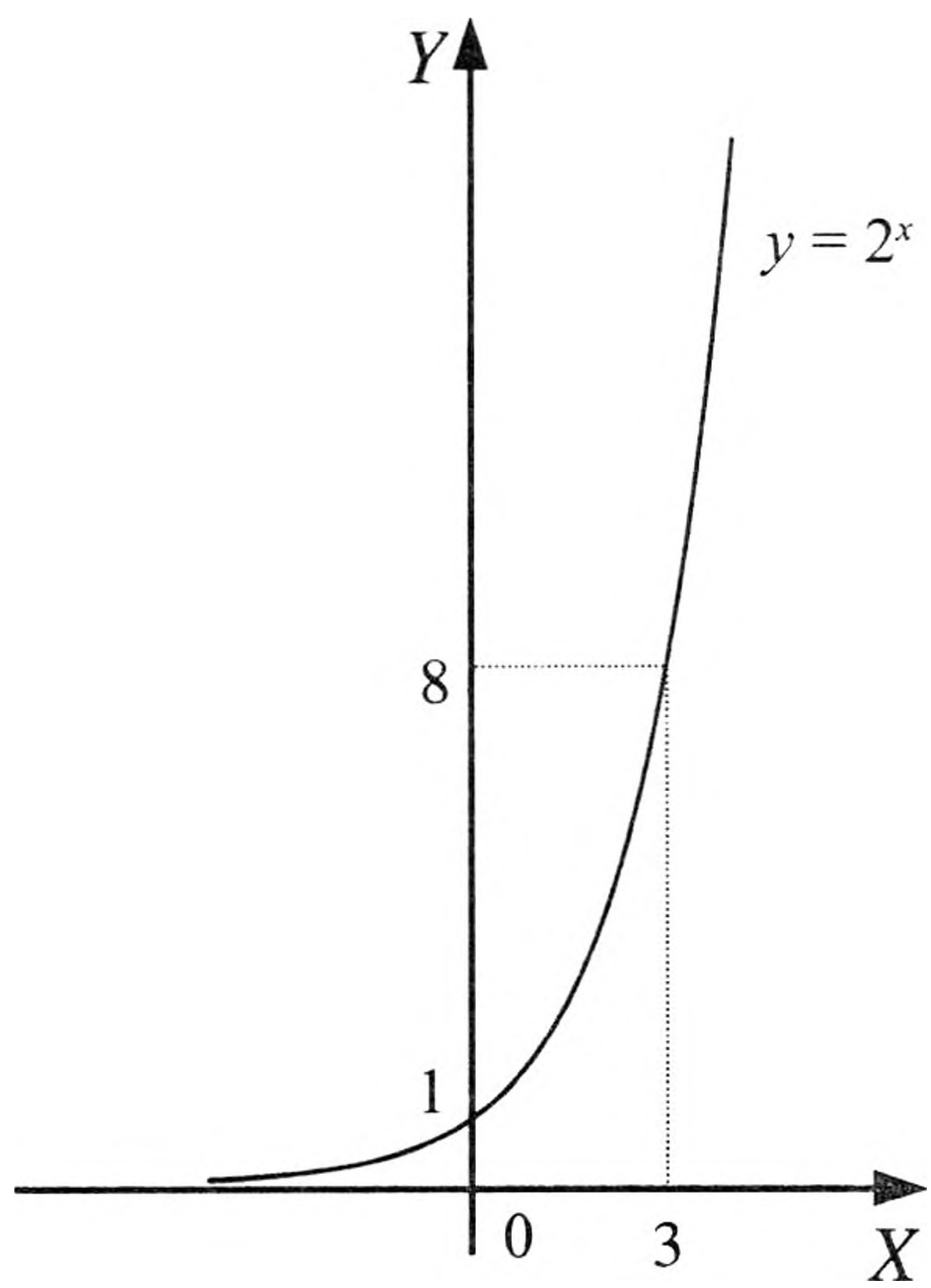
Я знаю еще две сказки, сюжет которых основан на свойствах показательной функции: о римском легионере, который вышел на пенсию, и о жадине, коне и добром молодце. Я рассказываю их на своих мастер-классах. Если вы знаете еще истории, напишите мне!

А теперь узнаем приемы решения показательных уравнений.

Простейшие показательные уравнения

Рассмотрим уравнение $2^x = 8$. В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 8? Ясно, что в степень 3.

Более того, $x = 3$ — единственное решение данного уравнения. Почему? Это легко понять, посмотрев на график показательной функции $y = 2^x$. Данная функция монотонно возрастает, и потому каждое свое значение принимает ровно один раз. Иными словами, не существует других значений x, кроме 3, таких, что $2^x = 8$.



Простейшее показательное уравнение — это уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 1$ или $0 < a < 1$.

Если $b > 0$, то это уравнение имеет решение, и притом единственное. Действительно, при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает; в любом случае она принимает каждое свое значение ровно один раз.

А вот если $b \le 0$, то наше уравнение не имеет решений: ведь показательная функция может принимать только положительные значения.

Любое показательное уравнение после соответствующих преобразований сводится к решению одного или нескольких простейших.

В простых показательных уравнениях, которые встречаются в части 1 ЕГЭ по математике, достаточно представить левую и правую части в виде степеней с одинаковым основанием.

1. $5^{x-7}=\dfrac{1}{125}$.

Вспоминаем, что $125 = 5^3$. Уравнение приобретает вид: $5^{x-7} = 5^{-3}$. В силу монотонности показательной функции показатели степени равны: $x - 7 = -3$, откуда $x = 4$.

2. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-3-x}=512.$

Поскольку $\dfrac{1}{8}=2^{-3}$, $512 = 2^9$, уравнение можно записать в виде:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-3-x}=512;$$

$$\left(2^{-3}\right)^{-3-x}=2^9;$$

$$2^{9+3x}=2^9;$$

$$9+3x=9;$$

$$x=0.$$

3. $2^{4-2x} = 64$.

Представим правую часть уравнения как степень с основанием 2.

Запомним правило: если степени равны, основания одинаковы, то и показатели тоже равны. Мы пользуемся свойством монотонности показательной функции: каждое свое значение она принимает ровно один раз.

Если объяснить на формальном уровне — мы «отбрасываем» одинаковые основания — и решаем алгебраическое уравнение.

$$2^{4-2x}=64;$$

$$2^{4-2x}=2^6;$$

$$4-2x=6;$$

$$x=-1.$$

4. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3.$

Представим $\frac{1}{9}$ в виде степени с основанием 3 и воспользуемся тем, что $(a^m)^n = a^{mn}$.

$(3^{-2})^{x-13} = 3;$
$3^{-2x+26} = 3^1;$
$-2x + 26 = 1;$
$x = 12{,}5.$

5. $9^{-5-x} = 729;$
$9^{-5-x} = 9^3;$
$-5 - x = 3;$
$x = -8.$

6. $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}.$

Как же здесь привести обе части к одному основанию? Если не получается — попробуем другой прием. Воспользуемся тем, что показатели степеней одинаковы.

$2^{3+x}=0{,}4\cdot 5^{3+x};$

$\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0{,}4;$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x}=\frac{2}{5};$

$3+x=1;$

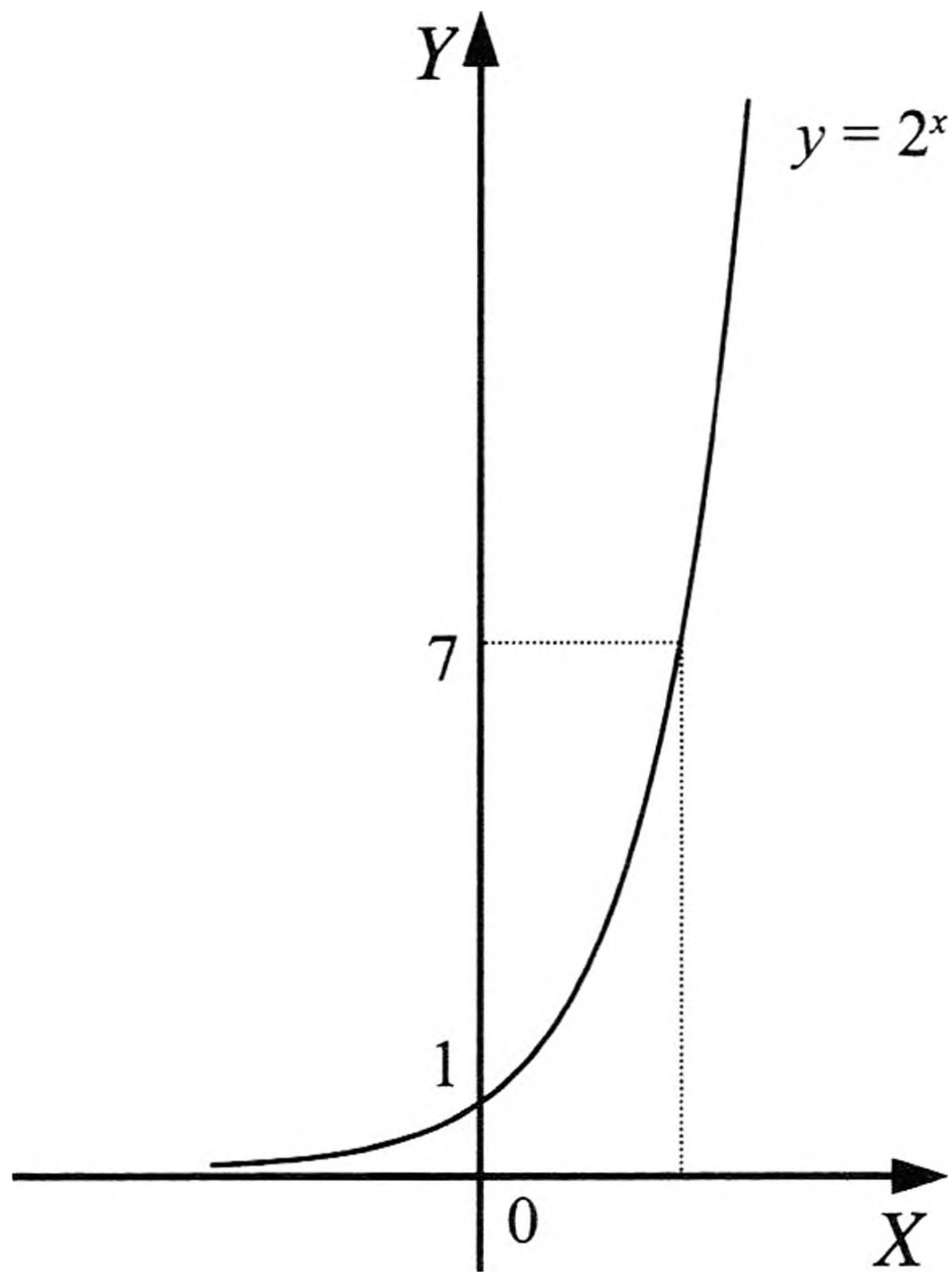
$x=-2.$

Логарифмы и их свойства

Предыдущую главу о показательных уравнениях мы начали с уравнения $2^x = 8$. Там все было ясно: $x = 3$.

А теперь рассмотрим уравнение $2^x = 7$.

По графику функции $y = 2^x$ мы видим, что это уравнение имеет корень, и притом единственный.



Ясно, что этот корень — не целое число (так как $2^2 = 4$, $2^3 = 8$). Более того, оказывается, что он не является даже рациональным числом, т. е. не представляется в виде обыкновенной дроби. Интуитивно мы чувствуем лишь, что он меньше 3, но ненамного.

Этот корень обозначается $\log_2 7$ (читается: «логарифм семи по основанию два». Он является иррациональным числом, т. е. бесконечной непериодической десятичной дробью. Калькулятор дает: $\log_2 7 = 2{,}80735...$

Итак, наше число $\log_2 7$ — это показатель степени, в которую надо возвести 2, чтобы получить 7.

Теперь дадим общее определение логарифма. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$ (условия те же, что и для основания показательной функции).

Логарифм положительного числа *b* по основанию *a* — это показатель степени, в которую надо возвести *a*, чтобы получить *b*.

Обратите внимание на обозначения. Запись $\log_a b$ читается как «Логарифм числа b по основанию a».

Иными словами,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ при } a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1.$$

Например:
$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;
$\log_7 49 = 2$, так как $7^2 = 49$;

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$;

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, так как $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Логарифм с основанием 10 называется **десятичным** и обозначается lg. Например, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 0{,}01 = -2$.

Логарифм с основанием e называется **натуральным** и обозначается ln.

Обратите внимание: **логарифм определен только для положительных чисел**. Причина заключается в том, что показательная функция может принимать лишь положительные значения. Например, число $\log_2(-4)$ не существует: в какую бы степень мы ни возводили 2, мы никогда не получим -4.

Не забывайте также про ограничения на основание логарифма: $0 < a < 1$ или $a > 1$.

Это значит, что основание логарифма выбирается положительным и не равным единице. В самом деле, выражение $\log_1 5$ не имеет смысла: в какую бы степень мы ни возвели число 1, мы получим единицу и ничего больше.

Основные логарифмические формулы

По определению, $\log_a b$ — это показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *основным логарифмическим тождеством*. Вот еще один вариант записи этого тождества:

$$\log_a a^x = x.$$

Перечислим свойства логарифмов. Они являются простыми следствиями правил действия со степенями. Все логарифмы ниже считаются определенными. Логарифм произведения — это сумма логарифмов:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c. \qquad (2)$$

Логарифм частного — это разность логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \tag{3}$$

Логарифм степени считается по формуле:

$$\log_a b^m = m\log_a b. \tag{4}$$

Видим, что показатель степени логарифмируемого числа «спрыгивает» перед логарифмом.

Показатель степени основания логарифма тоже «спрыгивает», но в виде обратного числа:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) вместе дают:

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b. \tag{6}$$

В частности, если $m = n$, мы получаем формулу:

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b. \tag{7}$$

Например, $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$.

Формулы (5), (6) и (7) рекомендуем использовать очень аккуратно — чтобы не запутаться в сложной записи. Или обходиться без них. Намного удобнее для практического применения важнейшая формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{8}$$

В частности, если $c = b$, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{9}$$

Приведем несколько примеров из Банка заданий ЕГЭ.

1. $\log_3 8{,}1 + \log_3 10 = \log_3(8{,}1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$.

Мы применили формулу (2) суммы логарифмов. Ведь любую формулу можно читать и слева направо, и справа налево. Сумма логарифмов с одинаковым основанием – это логарифм произведения.

2. $8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$

3. $\log_{0,8}3\cdot\log_3 1,25=\log_{0,8}3\cdot\dfrac{\log_{0,8}1,25}{\log_{0,8}3}=\log_{0,8}1,25=\log_{\frac{4}{5}}\dfrac{5}{4}=-1$

(применили формулу (8), перейдя к новому основанию 0,8).

4. $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}=9^{\log_5 50-\log_5 2}=9^{\log_5 25}=9^2=81$ (применили формулу (3) разности логарифмов).

5. $\log_4\log_5 25$.

Какой здесь порядок действий? Сначала вычисляем $\log_5 25$. Затем от полученного результата берем логарифм по основанию 4.

$$\log_4\log_5 25=\log_4 2=\frac{1}{\log_2 4}=\frac{1}{2}.$$

Теперь мы знаем, что такое логарифмы и как ими пользоваться. Но для чего они все-таки нужны? Или это просто такая математическая игрушка с хитрой инструкцией по применению?

Понятие логарифма и логарифмические таблицы появились в XVII веке, и значение их было огромно.

Это в наши дни вычисления не представляют труда — у каждого есть калькулятор. А как считали в «докомпьютерные» времена?

Складывать и вычитать можно было на счетах, а вот умножать и делить приходилось «в столбик» — медленно и трудно.

В XV–XVII веках, в эпоху великих географических открытий, стали бурно развиваться торговля, экономика и наука. Требования к математике росли: расчеты становились более сложными, а точность — например, для решения навигационных задач, — нужна была все более высокая.

Необходим был инструмент, позволяющий упростить и ускорить расчеты, и таким инструментом явились логарифмы.

Предположим, что b и c — большие числа, которые надо перемножить. Появление таблиц логарифмов (например, с основанием 10) существенно упростило эту задачу. Теперь вычислителю достаточно было найти по таблицам десятичные логарифмы чисел b и c, сложить их (на счетах) и получить логарифм произведения:

$$\lg b+\lg c=\lg(bc).$$

А затем по таблице логарифмов найти само произведение чисел b и c.

Недаром французский математик и астроном Лаплас сказал, что изобретение логарифмов удлинило жизнь вычислителей. Логарифмическая линейка (которой инженеры пользовались до 70-х годов двадцатого века) была не менее прогрессивным изобретением, чем современный калькулятор.

Но это еще не все! Мы не занимались бы логарифмами, если бы они имели лишь историческую, «музейную» ценность. О неожиданных применениях логарифмов мы расскажем в следующей теме, посвященной логарифмической функции.

Логарифмическая функция

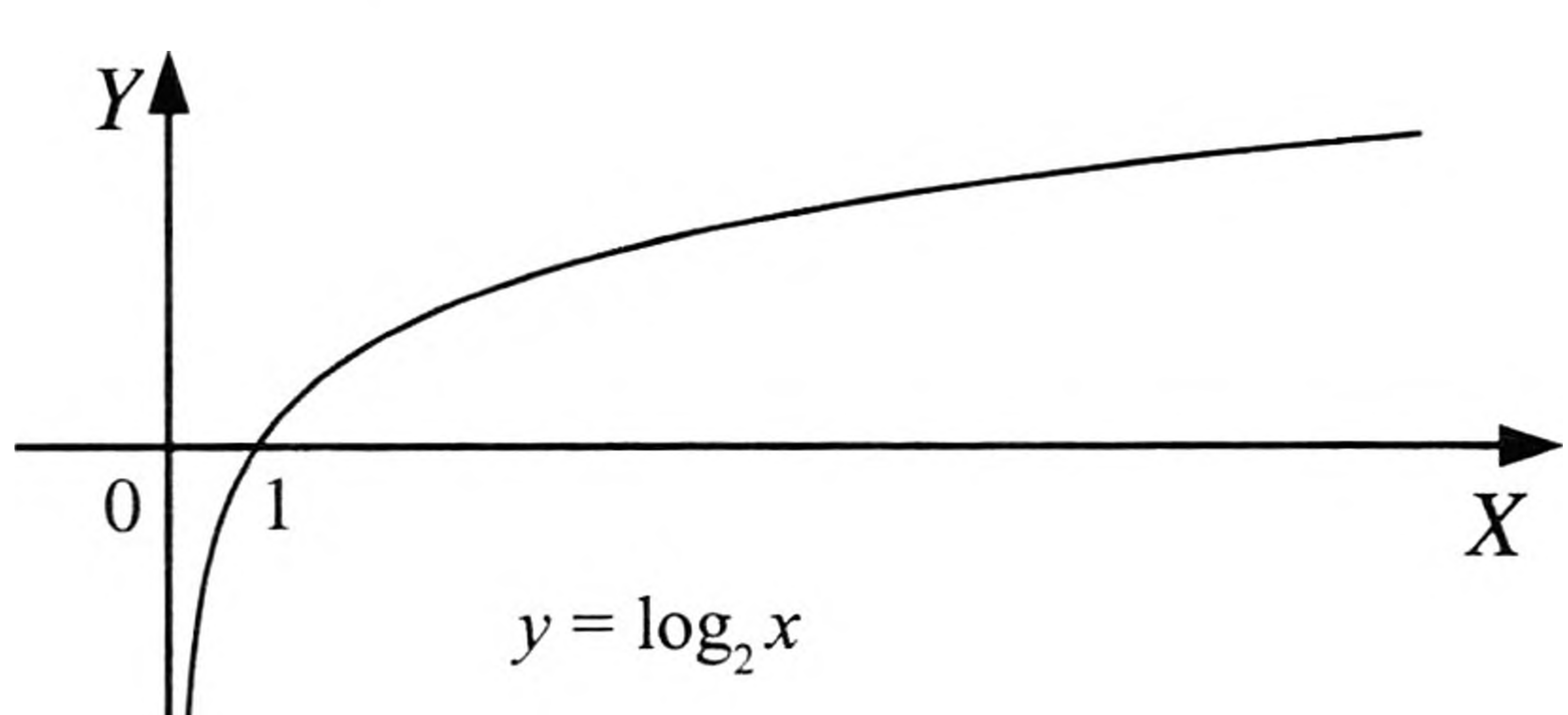
Вспомним, что $\log_a b$ (логарифм числа b по основанию a) — это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. При этом $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Зафиксируем некоторое основание a. Тогда каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число $\log_a x$ — показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x. Иными словами, можно задать **логарифмическую функцию** $y = \log_a x$.

Пусть $a = 2$. Построим график функции $y = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

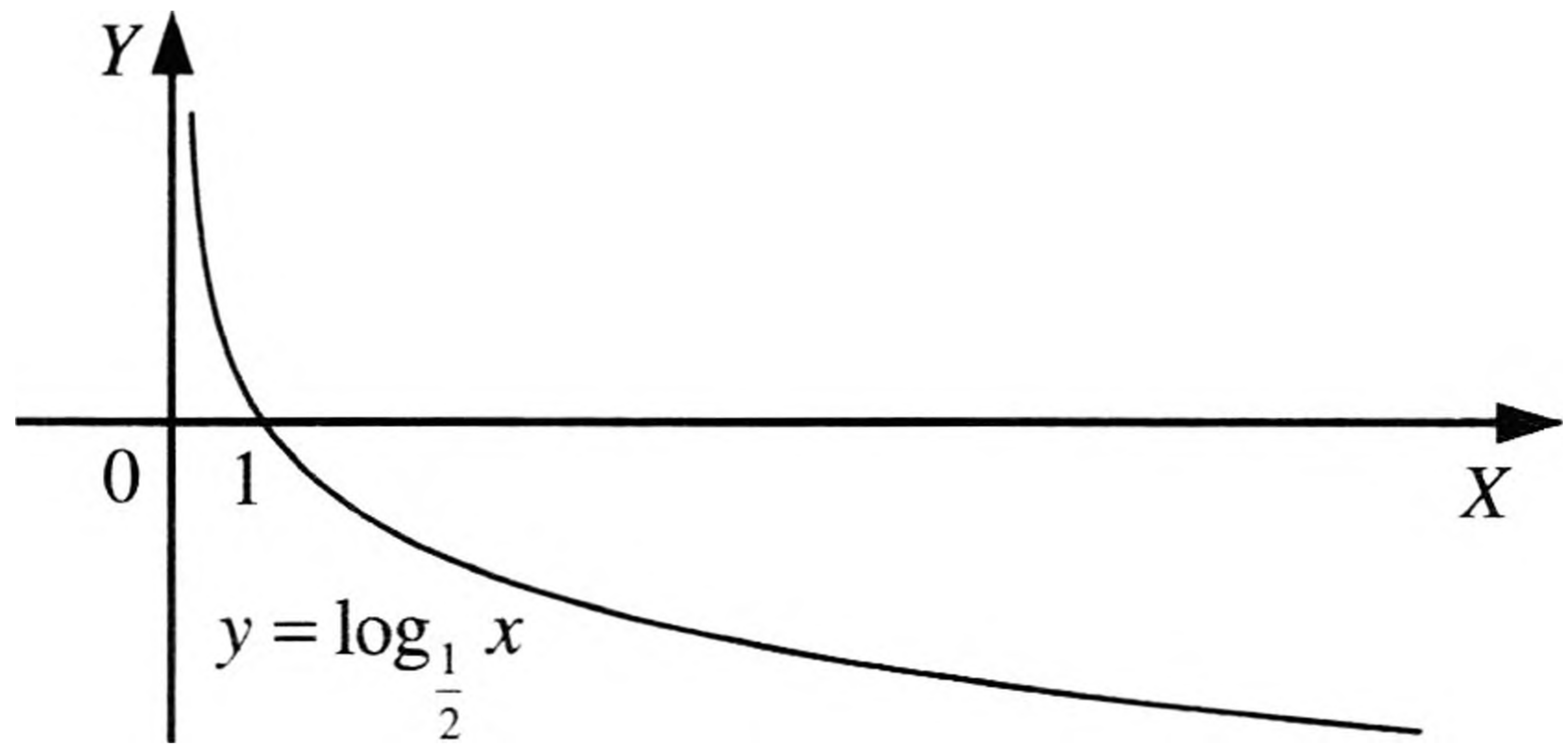
Функция монотонно возрастает:



Теперь возьмем $a = \frac{1}{2}$ и построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

Функция монотонно убывает:



Эти два графика полностью отражают поведение логарифмической функции при различных значениях a. Сформулируем важнейшие свойства логарифмической функции $y = \log_a x$.

1. Область определения — все положительные числа:

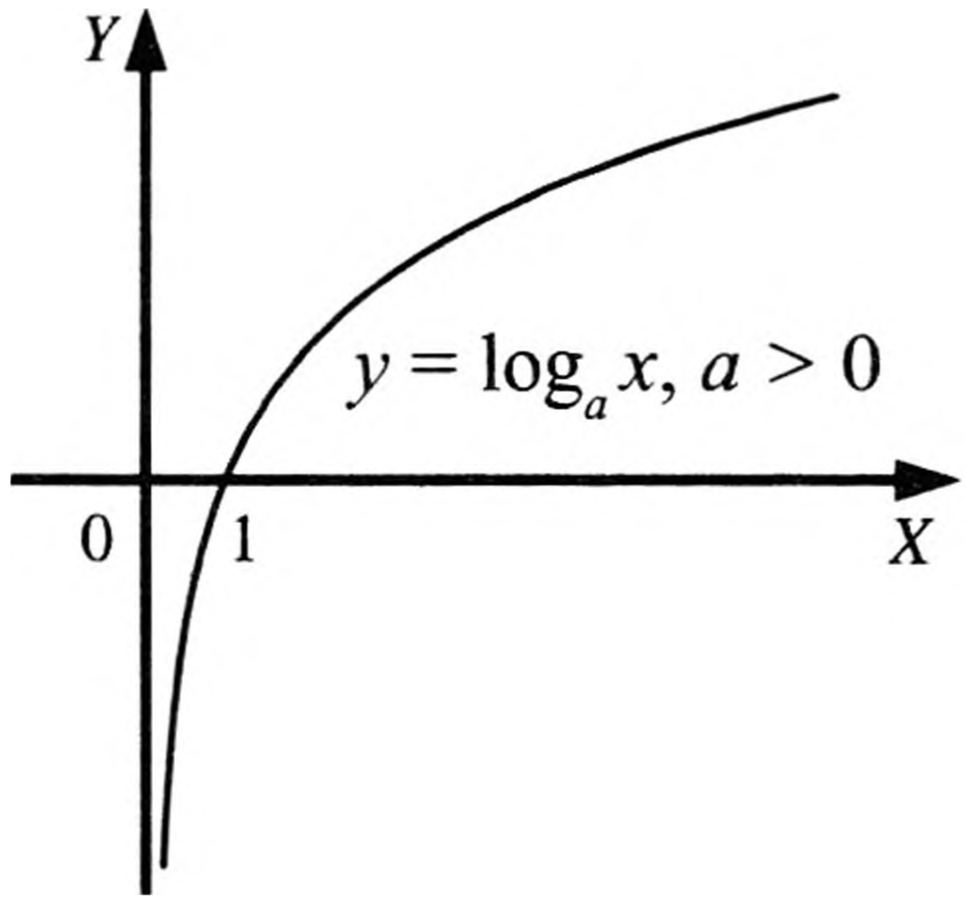
$$D(y) = (0; +\infty).$$

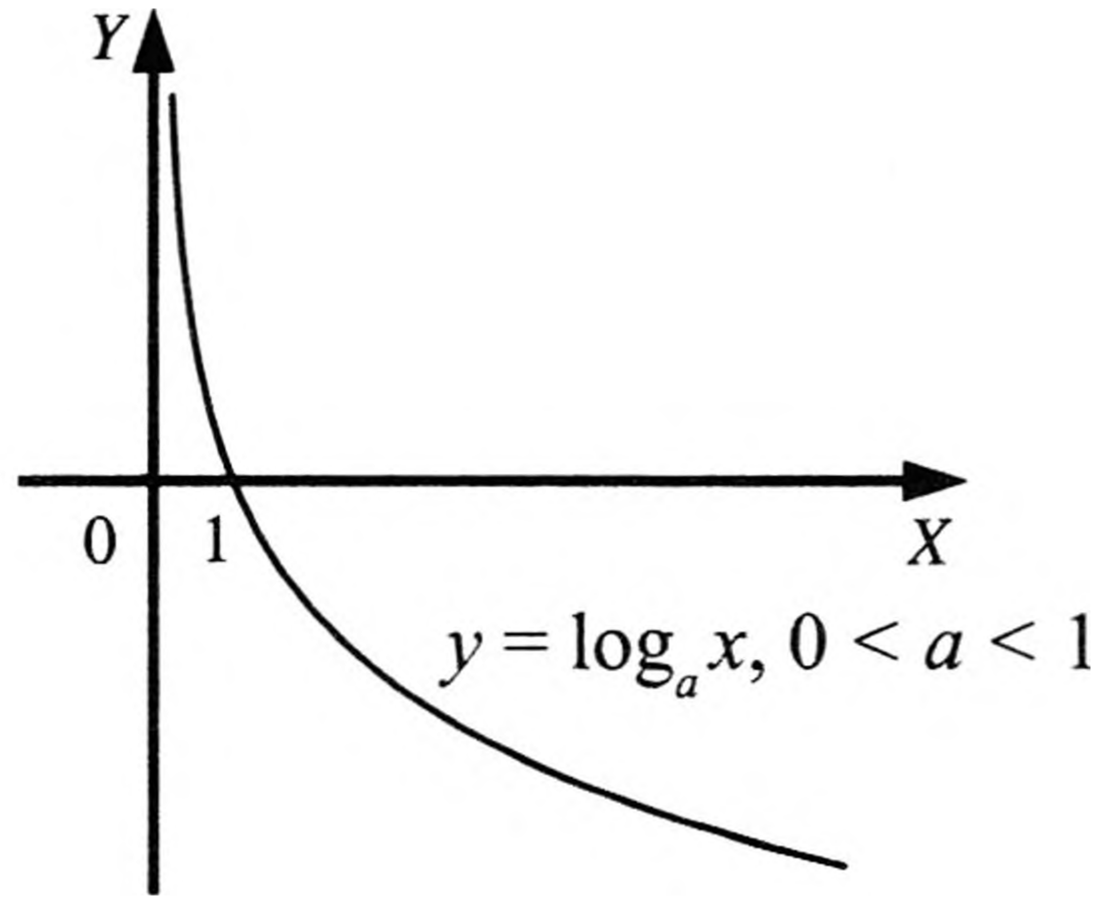
2. Область значений — все действительные числа:

$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

3. Поскольку $\log_a 1 = 0$, график проходит через точку (1; 0).

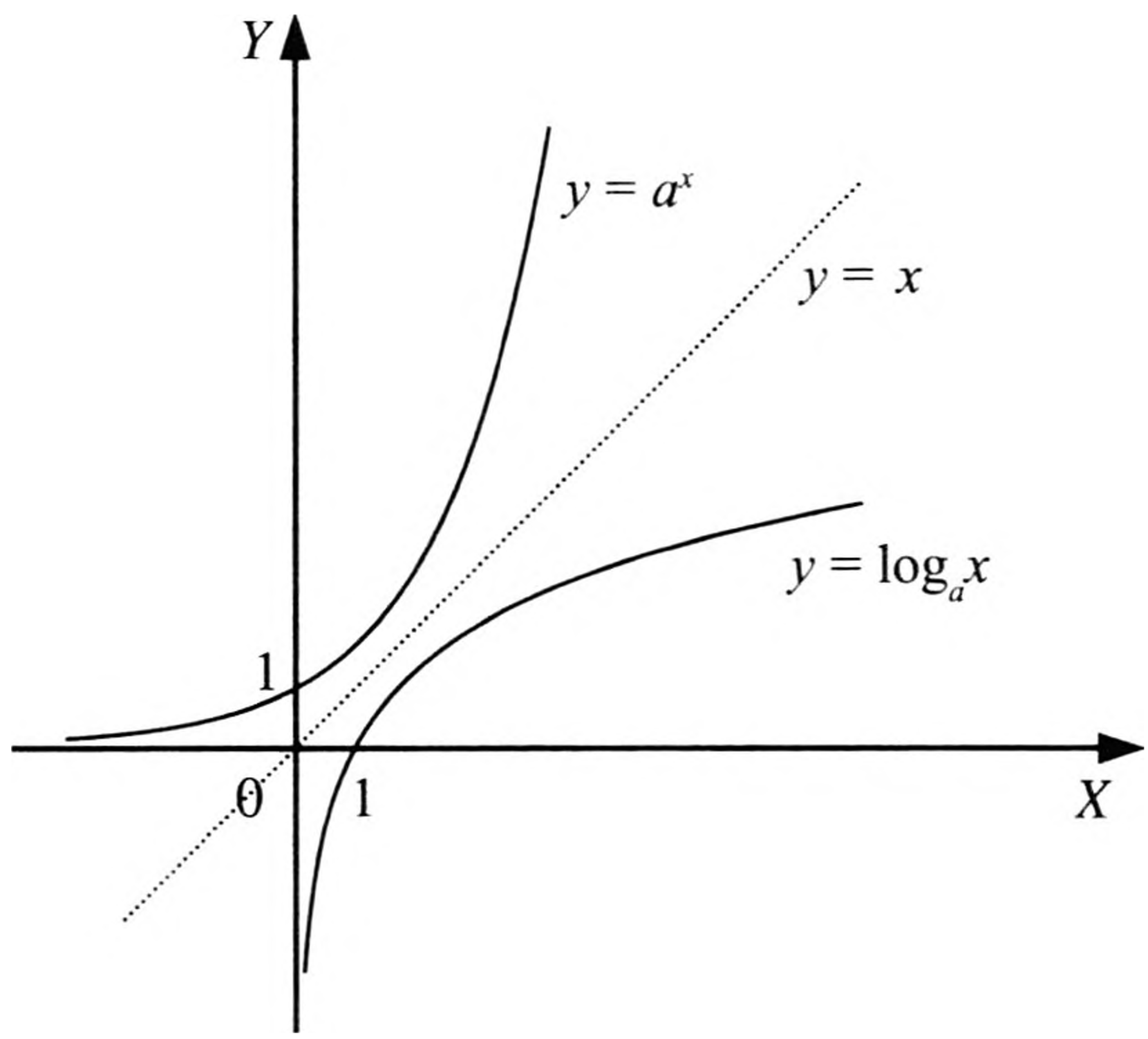
4. Функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$:





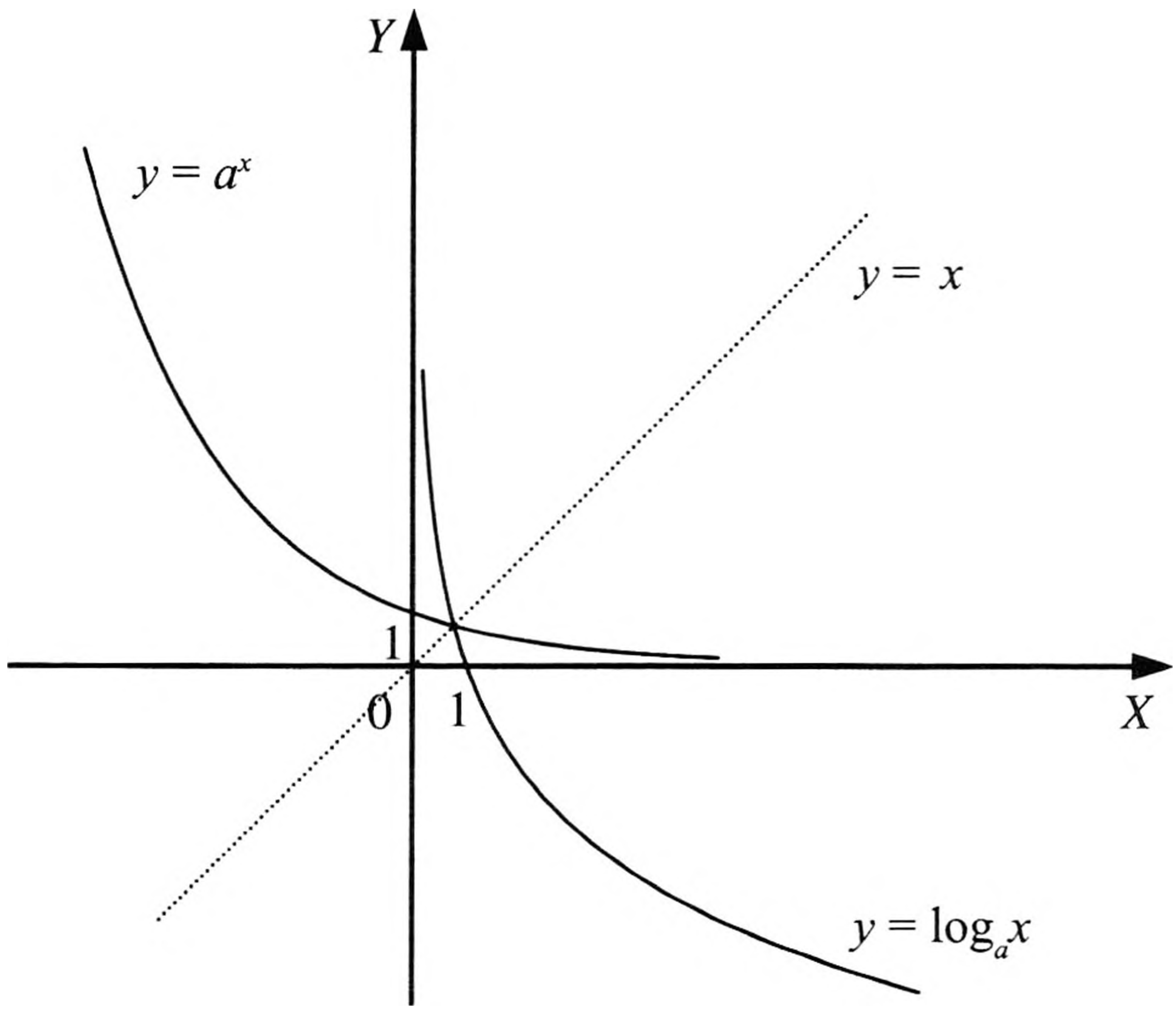
Заметим, что тем же свойством обладает и показательная функция $y = a^x$: она также возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Это, разумеется, не случайно.

Возьмем, к примеру, $a > 1$ и изобразим на одном чертеже графики данных функций:



Мы видим, что имеется сходство формы графиков: они как будто нарисованы по одному шаблону (просто шаблон по-разному расположен на координатной плоскости). На самом деле наши графики симметричны относительно прямой $y = x$ — они являются зеркальным отражением друг друга!

Та же осевая симметрия относительно прямой $y = x$ имеет место и в случае $0 < a < 1$:

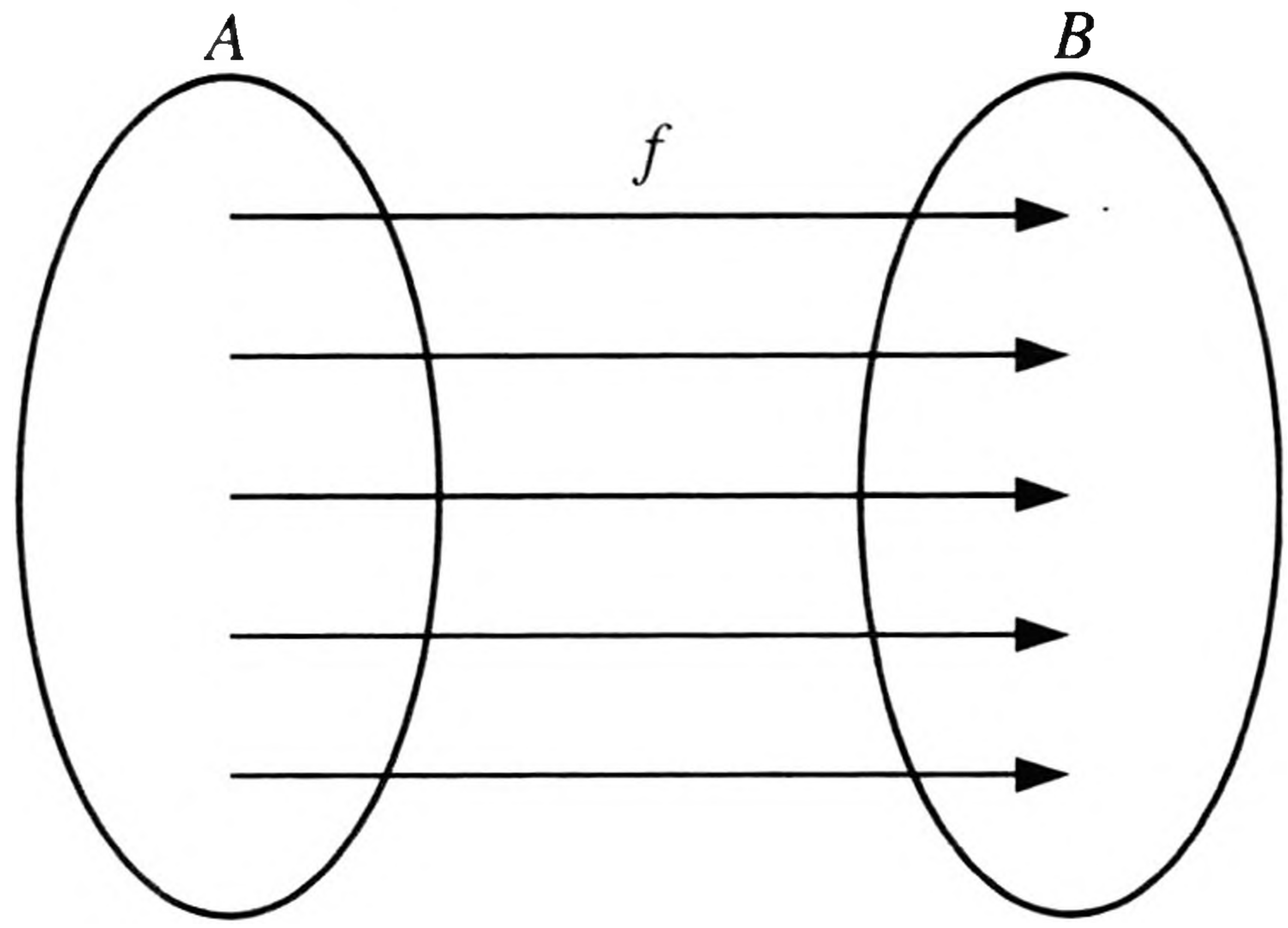


Данная симметрия проявляется еще и в том, что область определения логарифмической функции является областью значений показательной функции, и наоборот.

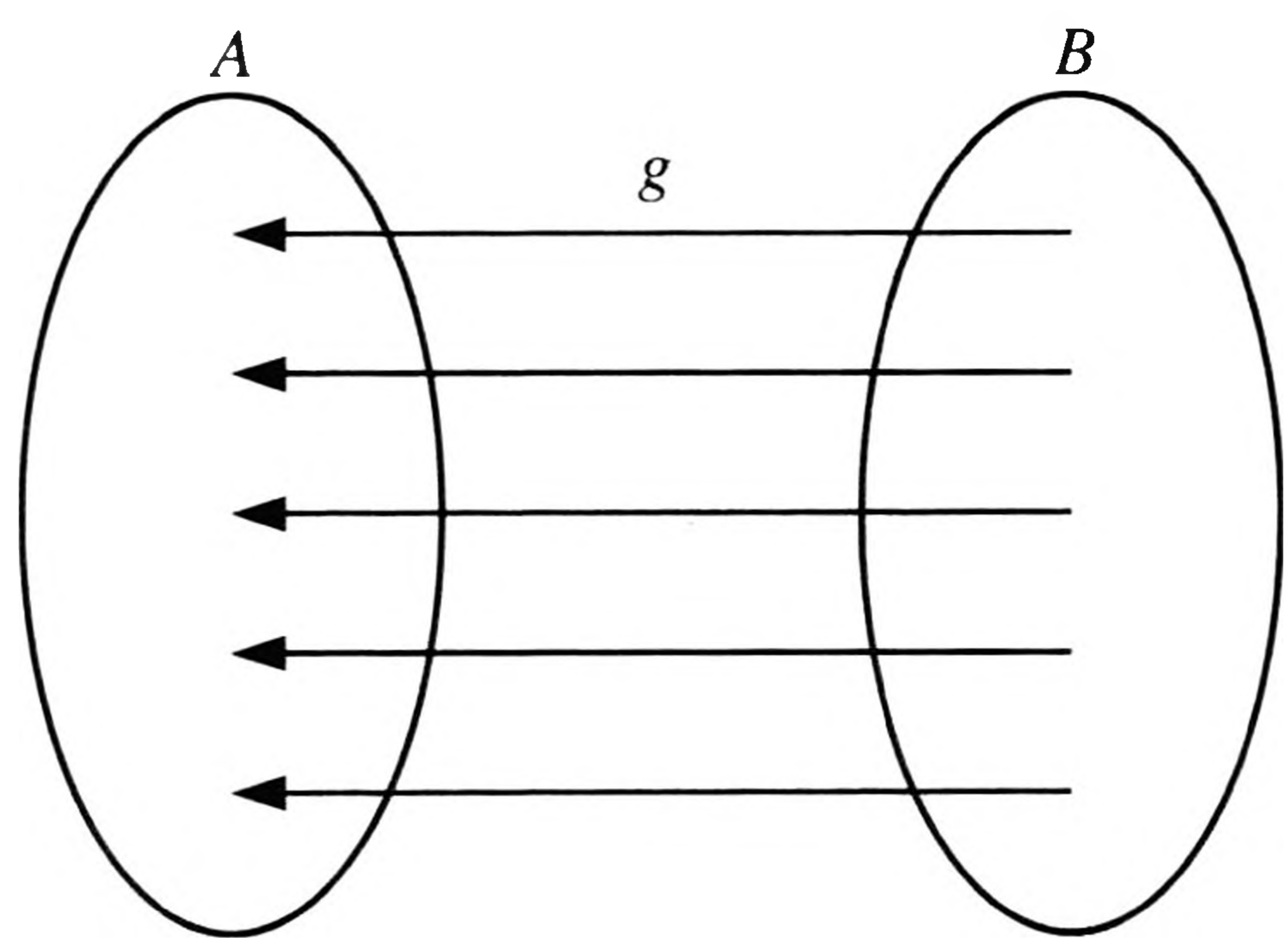
Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ являются **обратными** друг к другу. Поясним, что это означает.

Вспомним определение функции. Числовая функция $y = f(x)$ — это такое соответствие между двумя числовыми множествами A и B, при котором каждому числу $x \in A$ отвечает одно-единственное число $y \in B$. Множество A называется при этом областью определения функции, множество B — областью значений.

Пусть соответствие f является взаимно однозначным:



Тогда существует функция g, которая действует в обратную сторону: каждому числу $y \in B$ она ставит в соответствие одно-единственное число $x \in A$, такое, что $g(y) = x$:



Функция g называется **обратной** к функции f. Точно так же и функция f будет обратной к функции g.

Если мы возьмем какое-либо число $x \in A$ и подействуем на него функцией f, то получим число $y = f(x) \in B$. Теперь на полученное число y подействуем функцией g. Куда попадем? Правильно, вернемся к исходному числу x. Это можно записать так:

$$g(f(x)) = x. \qquad (1)$$

Последовательное применение двух взаимно обратных действий возвращает нас в исходную точку. Как и в жизни: сначала открыли дверь, а потом совершили обратное действие — закрыли дверь; в итоге вернулись к начальной ситуации.

Так, если возвести число 3 в степень x, а затем совершить обратное действие — взять от полученного числа 3^x логарифм по основанию 3 — мы вернемся к исходному числу x:

$$\log_3 3^x = x.$$

Это конкретный пример абстрактной записи (1).

Вам встречались и другие примеры взаимно обратных функций. Это:

- $y = x^2$ (при $x \geq 0$) и $y = \sqrt{x}$;
- $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$;
- $y = \sin x$ (при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) и $y = \arcsin x$ (о них мы еще будем говорить).

Во всех этих (и им подобных) случаях выполняется равенство (1), а графики функций оказываются симметричными относительно прямой $y = x$. Проверьте это для трех приведенных примеров!

Но вернемся к логарифмам. Мы обещали рассказать об их практическом значении. Где их можно встретить?

Оказывается, для этого далеко ходить не надо.

Наши органы чувств «сконструированы» так, что могут работать в широчайших диапазонах. Световые потоки от Солнца, от электрической лампочки и от далеких звезд различаются на несколько порядков. Но мы видим и яркое солнце, и едва заметные звезды. Мы слышим шорох листьев и грохот грома, а ведь интенсивность этих звуков также различается в миллиарды раз.

Как это происходит? Дело в том, что глаз и ухо воспринимают именно логарифм величины внешнего воздействия. Это закон Вебера–Фехнера, или основной психофизический закон: *интенсивность воспринимаемого нами ощущения пропорциональна логарифму силы раздражения*. Например, при увеличении звукового давления в 10 раз нам кажется, что громкость возросла на величину L. При увеличении давления еще в 10 раз громкость для нас снова меняется на величину L.

Простейшие логарифмические уравнения

1. Рассмотрим уравнение $\log_2(15 + x) = \log_2 3$.

Основания логарифмов равны, сами логарифмы тоже равны — значит, равны и числа, от которых они берутся.

Обычно ученики запоминают это правило в краткой жаргонной формулировке: «Отбросим логарифмы!»

Логарифмы, конечно, не копыта, чтобы их отбрасывать, но суть действия отражена верно.

Получаем:

$15 + x = 3;$

$x = -12.$

Почему мы «отбрасываем логарифмы»? Связано это со свойством монотонности логарифмической функции: каждое свое значение она принимает только один раз. Это значит, что если логарифмы двух чисел по какому-либо основанию равны, значит, равны и сами числа.

Решая логарифмические уравнения, не забывайте про **область допустимых значений** логарифма. Помните, что выражение $\log_a b$ определено при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Найдя неизвестную величину, подставьте ее в уравнение. Если его левая или правая части не имеют смысла — значит, найденное число не является решением уравнения и не может быть ответом задачи. Это хороший способ проверки на ЕГЭ.

2. $\log_2(4 - x) = 7$.

В левой части уравнения — логарифм, в правой — число 7. Применив основное логарифмическое тождество, представим число 7 в виде $\log_2 2^7$. Дальше все просто.

Ответ: -124.

3. $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.

$$\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)^{-2};$$

$$(7-x)=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2};$$

$7 - x = 49;$

$x = -42.$

Ответ: –42.

4. $\log_5(5 - x) = 2 \cdot \log_5 3.$

Видите число 2 перед логарифмом в правой части уравнения? Сейчас оно мешает вам «отбросить логарифмы». Что с ним сделать, чтобы в левой и правой частях были просто логарифмы по основанию 5? Вспомним формулу для логарифма степени.

$\log_5(5 - x) = \log_5\left(3^2\right);$

$\log_5(5 - x) = \log_5 9;$

$5 - x = 9;$

$x = -4.$

Ответ: –4.

5. $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1.$

Представим число 1 в виде логарифма по основанию 5.

$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5;$

$\log_5(7 - x) = \log_5(15 - 5x);$

$7 - x = 15 - 5x;$

$4x = 8;$

$x = 2.$

Ответ: 2.

6. $\log_{x-5} 49 = 2.$

Мы видим, что переменная x находится в основании логарифма. Это неудобно. Даже в сложных уравнениях лучше работать с логарифмами по постоянному основанию. Значит, пользуемся формулой перехода к другому основанию: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

$$\frac{1}{\log_{49}(x - 5)} = 2;$$

$\log_{49}(x-5)=\frac{1}{2};$

$\log_{49}(x-5)=\log_{49}\left(49^{\frac{1}{2}}\right);$

$\log_{49}(x-5)=\log_{49}7;$

$x-5=7;$

$x=12.$

Задача с физическим содержанием на тему «логарифмы»

Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2\cdot 10^{-6}$ *Ф*. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^{6}$ *Ом*. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ *кВ*. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (*с*), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 *с*. Ответ дайте в *кВ* (киловольтах).

Подставляем все данные, в том числе время $t = 21$ *с*, в выражение $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$. Получим логарифмическое уравнение и решим его.

$$21=0{,}7\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{6}\cdot\log_2\frac{16}{U}.$$

10^{-6} и 10^{6} сокращаются. Получаем

$\log_2\frac{16}{U}=3;$

$\log_2\frac{16}{U}=\log_2 8;$

$\frac{16}{U}=8;$

$U=2.$

Ответ: 2.

Тригонометрия на ЕГЭ по математике

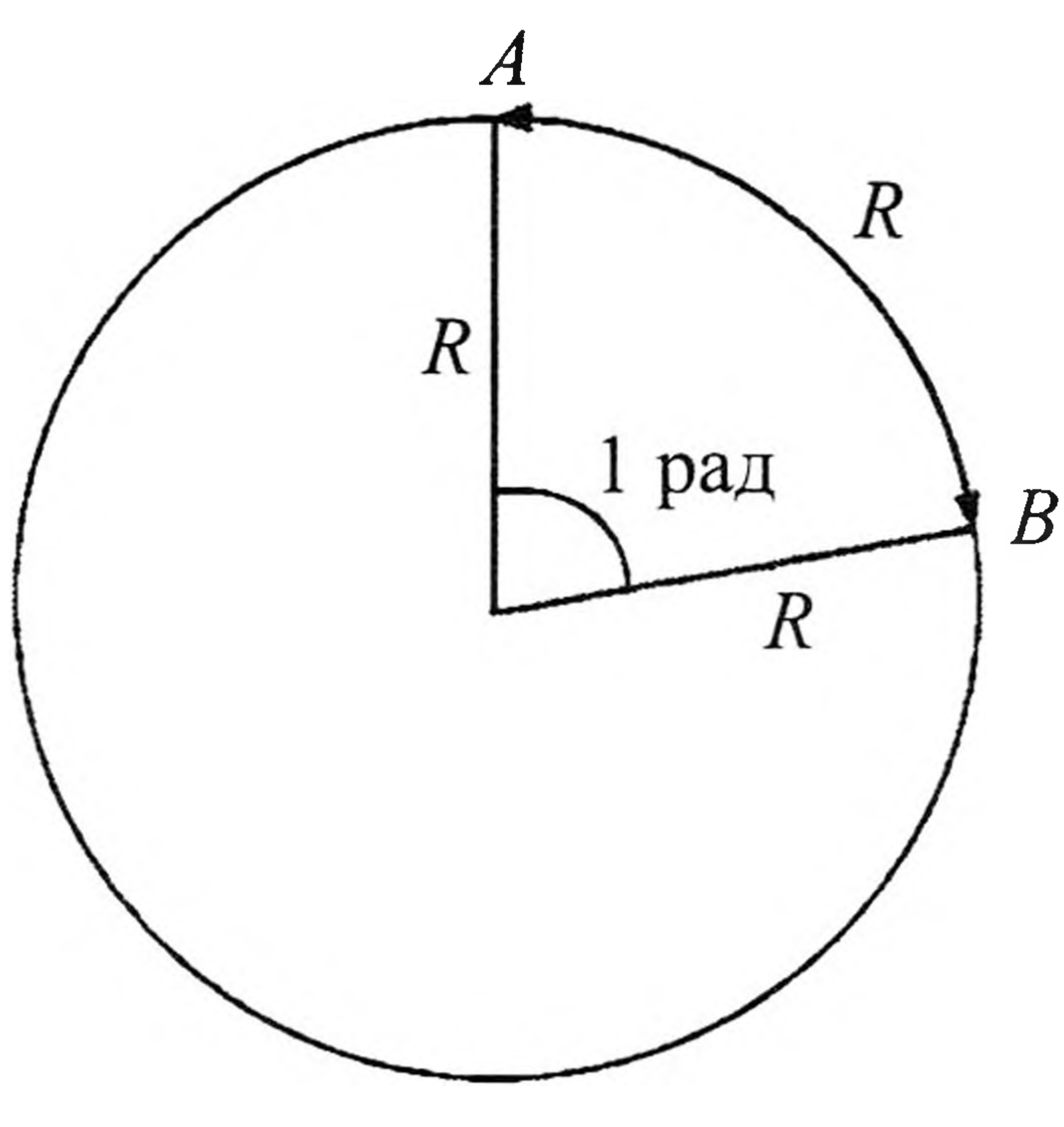
Синус, косинус и тангенс произвольного угла

В главе «Основы тригонометрии» мы определили, что такое синус, косинус и тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике. Еще, рассматривая внешний угол треугольника, мы говорили о синусе, косинусе и тангенсе тупого угла.

Сейчас мы узнаем об углах много неожиданного. Мы будем говорить об углах положительных и отрицательных. Об углах, больших 180 и даже 360 градусов. Мы введем понятия синуса, косинуса и тангенса для произвольных, то есть для любых углов.

Начнем с систем измерения углов. До сих пор мы измеряли углы только в градусах. Есть и другая система измерения углов — **радианы**.

По определению, 1 радиан — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу. Вот он, на рисунке.



Как перевести градусы в радианы и наоборот?

Вспомним, что полный круг — это 360 градусов. Длина окружности равна $2\pi r$. Составим пропорцию. Длина окружности так относится к длине дуги AB на нашем рисунке, как $360°$ — к величине угла, опирающегося на дугу AB, то есть к углу в 1 радиан.

360° — $2\pi r$

1 радиан — r

Слева в нашей пропорции углы, справа — длина полной окружности и длина дуги AB.

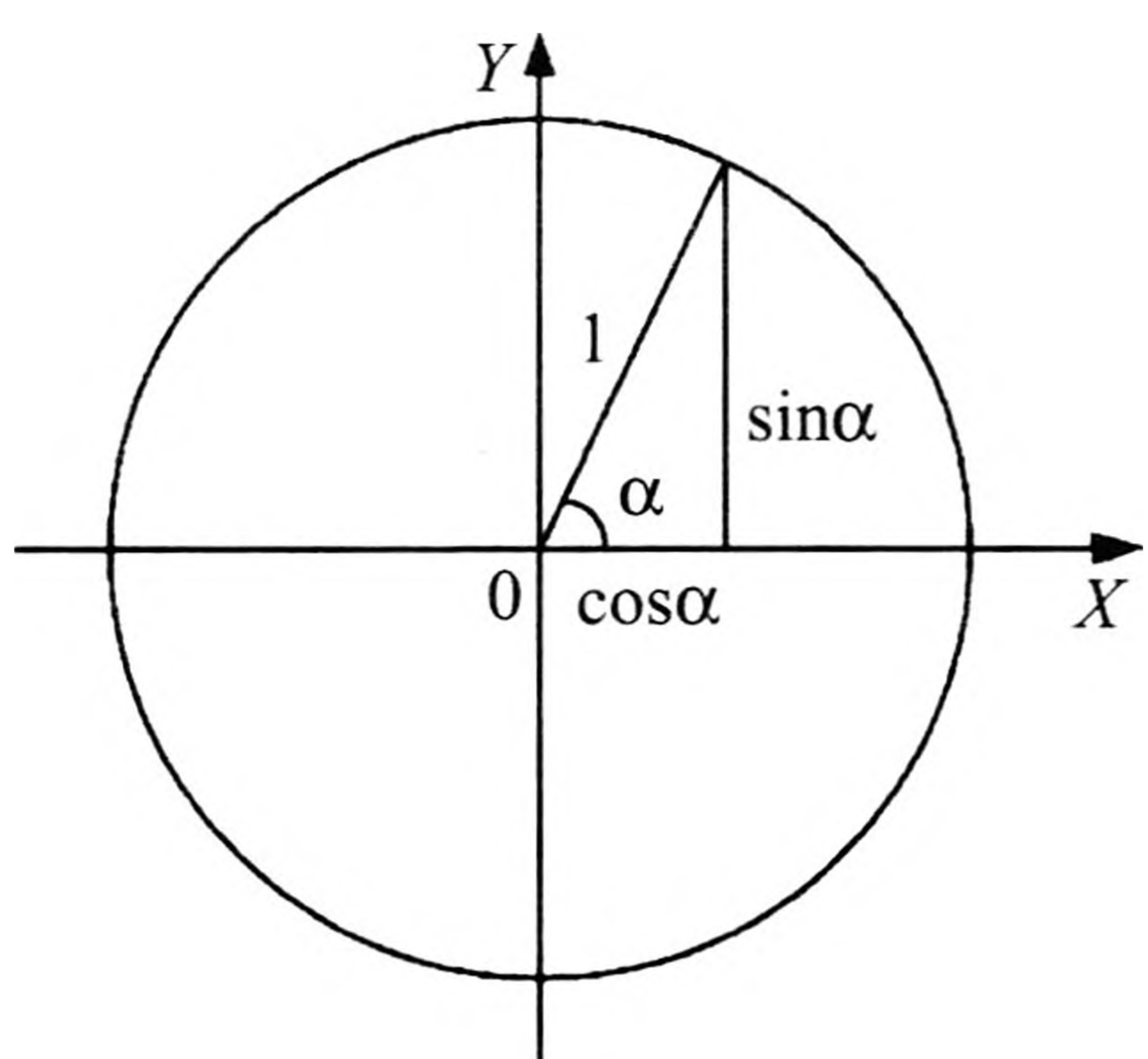
Из этой пропорции получаем, что $360^\circ = 2\pi$ радиан. Значит, полный круг — это 2π радиан. Тогда полкруга — это π радиан, четверть круга (то есть 90°) — это $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Любой угол, выраженный в градусах, можно перевести в радианы. И наоборот, 1 радиан приблизительно равен 57 градусам.

Нарисуем единичную окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY, в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Договоримся отсчитывать углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки.

Мы помним, что полный круг — это 360 градусов.



***Косинусом* угла α называется абсцисса (т. е. координата по оси *OX*) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.**

***Синусом* угла α называется ордината (т. е. координата по оси *OY*) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.**

Итак, косинус и синус — координаты точки на единичной окружности, соответствующей данному углу. Косинус — абсцисса (x), синус — ордината (y). Поскольку окружность единичная, для любого угла и синус, и косинус находятся в пределах от –1 до 1:

$-1 \le \cos\alpha \le 1,$

$-1 \le \sin\alpha \le 1.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник на рисунке. Применим к нему теорему Пифагора и получим основное тригонометрическое тождество:

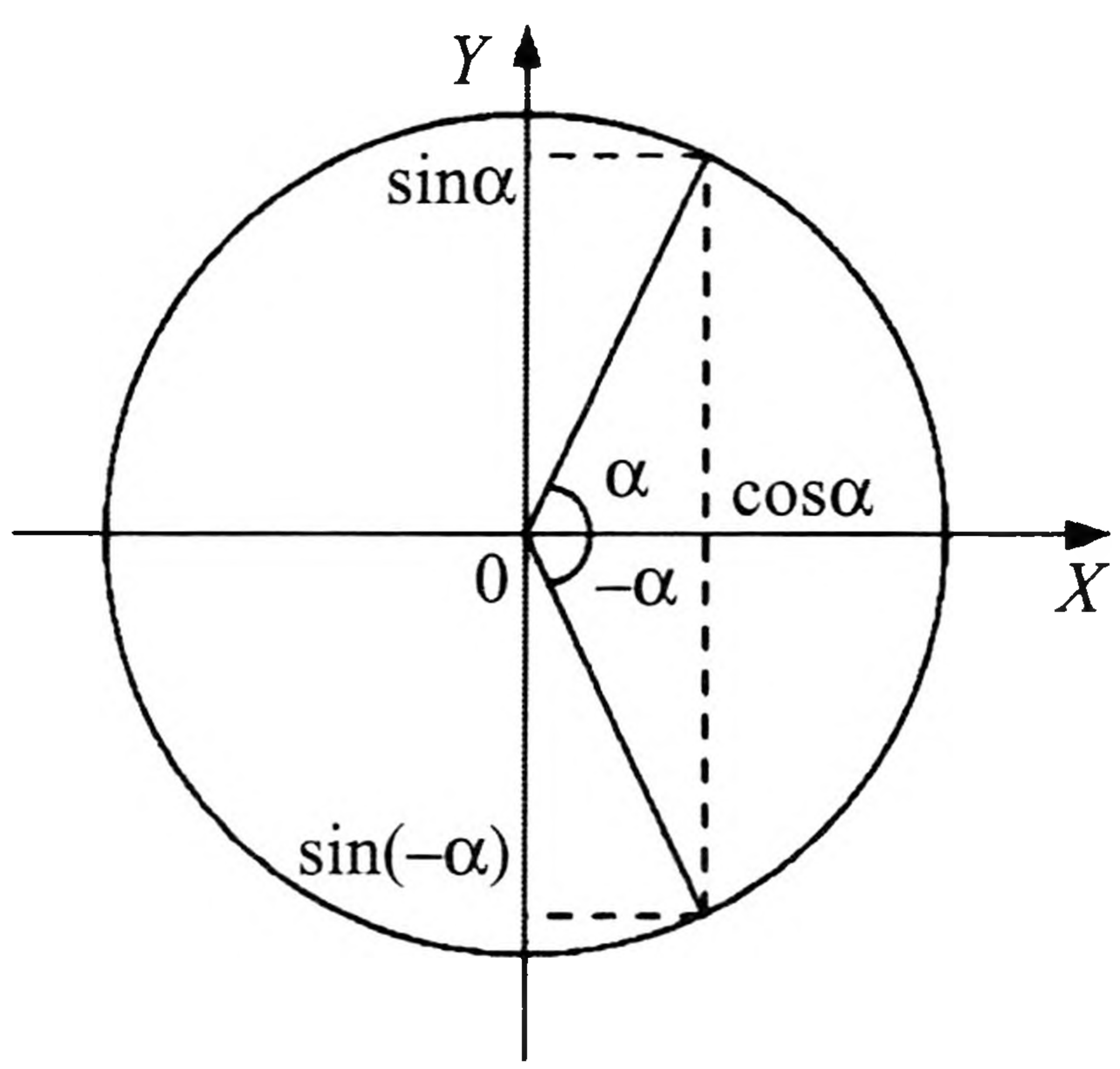
$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

Если отсчитывать угол от нуля против часовой стрелки — он положительный. Если отсчитывать по часовой стрелке — угол будет отрицательным. Например, угол –30° — это угол величиной в 30°, который отложили от положительного направления оси X по часовой стрелке.

Легко заметить, что

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$

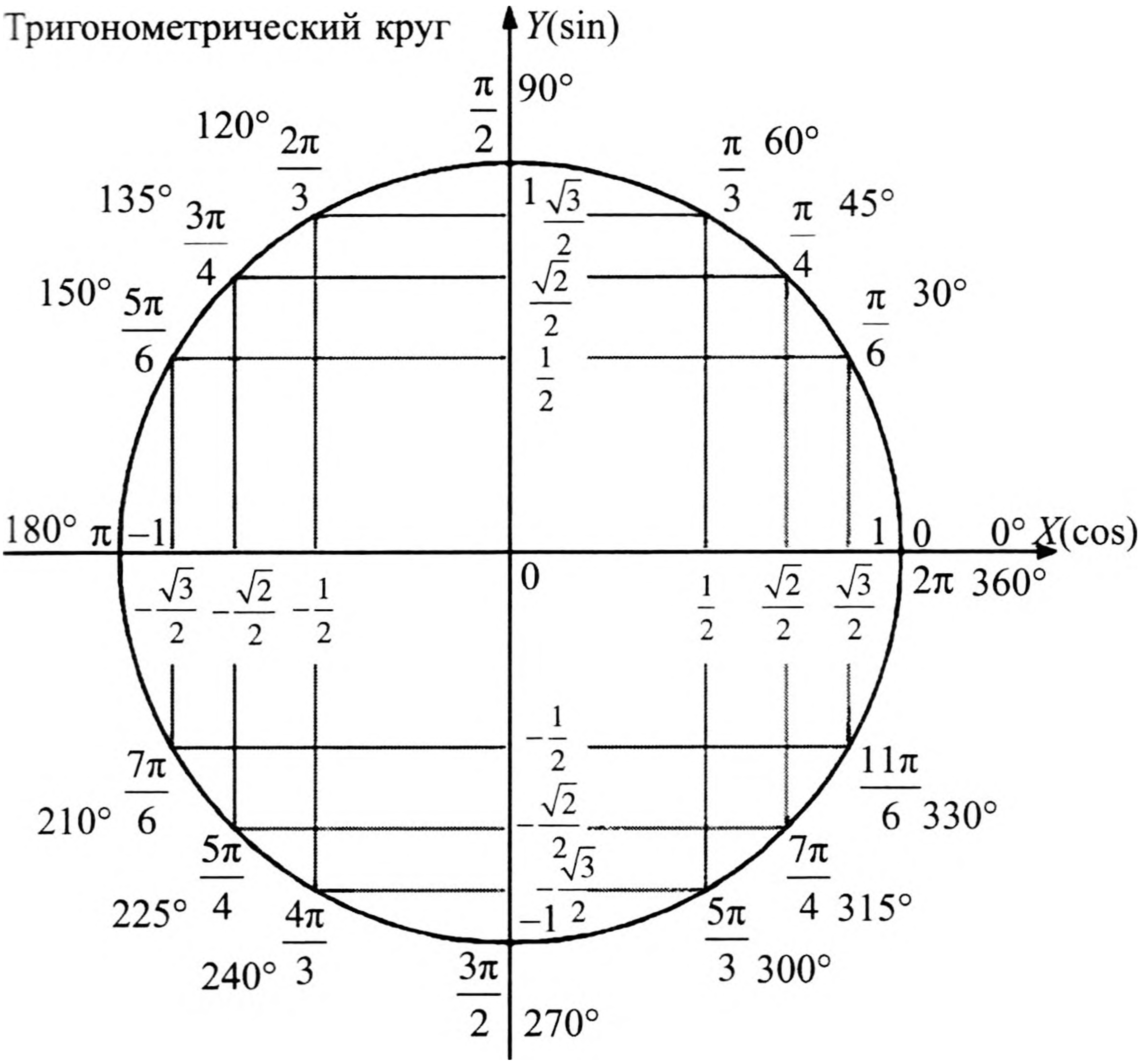
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$



Тригонометрический круг

А теперь встречайте — тригонометрический круг! Это самый простой способ начать осваивать тригонометрию. Тригонометрический круг красив, легко запоминается, и на нем есть все необходимое. Он заменит вам десяток таблиц.

Тригонометрический круг



1. Обратите внимание, что на тригонометрическом круге даны две шкалы — в градусах и в радианах. Теперь вы можете легко перевести градусы в радианы и наоборот.

2. Мы отсчитываем углы от положительного направления оси X. Точка с координатами (1; 0) соответствует углу в 0 градусов. Точка с координатами (–1; 0) отвечает углу в 180°, то есть π; точка с координатами (0; 1) — углу в 90°, то есть $\frac{\pi}{2}$; точка (0; –1) — углу 270°, или $\frac{3\pi}{2}$.

3. Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на тригонометрическом круге, а также свои значения синуса и косинуса. На тригонометрическом круге показаны табличные значения синусов и косинусов для основных углов.

Например:

$$\cos 60° = \frac{1}{2};\ \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 0° = 1;\ \sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Все это легко увидеть на рисунке.

4. Для того чтобы узнать знаки синуса и косинуса какого-либо угла, не нужно рисовать отдельных таблиц. Все уже нарисовано! Находим на нашей окружности точку, соответствующую данному углу α, смотрим, положительны или отрицательны ее координаты по x (это косинус угла α) и по y (это синус угла α).

Например, нам надо выяснить, какого знака выражения sin 150° и cos 150°. Находим на тригонометрическом круге угол 150°. Точка, соответствующая этому углу, лежит левее оси OY и выше оси OX, значит, ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна. Это значит:

$\sin 150° > 0$

$\cos 150° < 0$

Обратите внимание на это ценное свойство тригонометрического круга.

5. Углы могут быть и больше 360 градусов. Например, угол 732° — это два полных оборота по часовой стрелке и еще 12°. Поскольку, сделав несколько полных оборотов по окружности, мы вернемся в ту же точку с теми же координатами по x и по y, значения синуса и косинуса повторяются через 360°. То есть:

$$\cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha,$$

где n — целое число. То же самое можно записать в радианах:

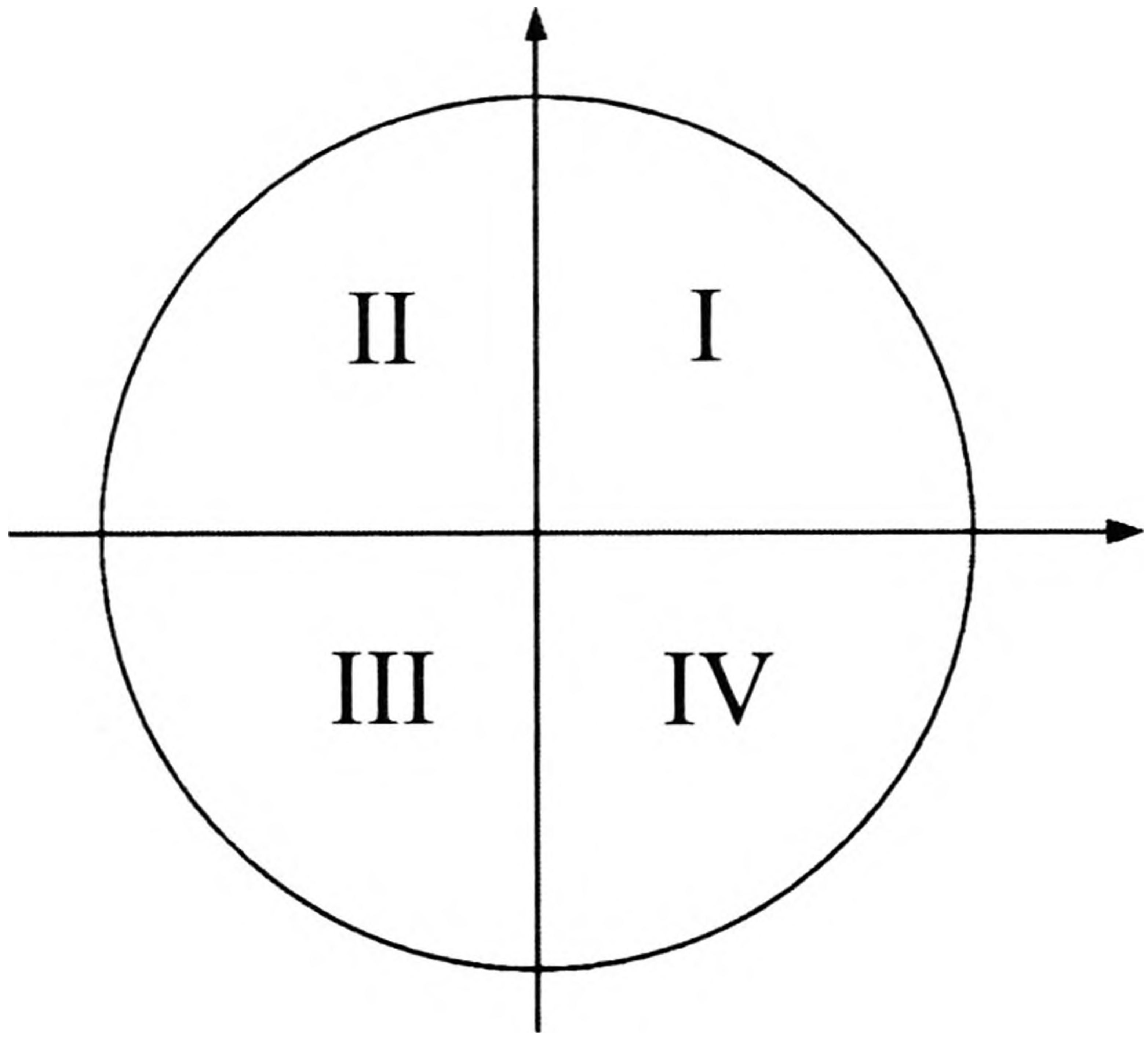
$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha.$$

Мы только что записали **еще одно ценное свойство синуса и косинуса — периодичность.** Это значит, что синус и косинус все свои значения повторяют через целое число кругов. Например, вам надо вычислить sin 945°. Поскольку $945 = 360 \cdot 2 + 225$,

$$\sin 945° = \sin(360° \cdot 2 + 225°) = \sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мы просто отбросили два полных круга, а потом на тригонометрическом круге посмотрели, чему равен sin 225°.

6. Иногда вам будут встречаться выражения: угол из первой четверти, из третьей четверти. Вот эти четверти, на рисунке.



Мы ничего не говорили о тангенсе и котангенсе. Можно на том же тригонометрическом круге изобразить еще и оси тангенсов и котангенсов (мы о них расскажем), но тогда рисунок станет сложнее. Проще для каждого угла посчитать значение тангенса, разделив его синус на косинус. Мы ведь помним, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

В результате получим следующую таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg φ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg φ	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует

Еще раз посмотрим на тригонометрический круг. Он действительно заменяет десяток таблиц. Вот что мы видим, глядя на него:

1. Перевод градусов в радианы и наоборот. Полный круг содержит 360 градусов, или 2π радиан.

2. Значения синусов и косинусов основных углов. Помним, что значение косинуса угла мы находим на оси X, а значение синуса — на оси Y.

3. И синус, и косинус принимают значения от –1 до 1.

4. Значение тангенса угла α тоже легко найти — поделив $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$. А чтобы найти котангенс — наоборот, косинус делим на синус.

5. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

6. Косинус — функция четная, синус — нечетная. Наверняка на уроках вы слышали эти слова. Вот что они означают:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

7. Тригонометрический круг помогает нам увидеть, что синус и косинус — функции периодические. Это значит, что все их значения повторяются через полный круг или целое число кругов. Другими словами, их наименьший положительный период равен 360°, то есть 2π.

Формулы тригонометрии

Из-за чего происходит досадная потеря баллов на ЕГЭ по математике? Из-за невнимательности и вычислительных ошибок. Из-за плохого почерка, в котором эксперт не смог разобраться. А еще из-за того, что лень было выучить формулы.

Тригонометрические формулы необходимы даже для решения задач базового уровня. Как правило, школьники помнят основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

А про остальные формулы говорят: «Зачем их учить, у меня шпаргалка в телефоне есть!»

Забудьте об этом. Во-первых, использование на ЕГЭ шпаргалок и мобильных телефонов ведет к удалению с экзамена. Во-вторых, часто сборники формул в мобильных приложениях содержат дикие ошибки.

А в-третьих... Представьте, что вы в незнакомой стране и вам надо объясниться с ее жителями, по возможности быстро. И вы знаете только одно слово, зато у вас с собой мобильник (который нельзя доставать), а в нем словарь (который содержит ошибки). В таком же положении оказывается и школьник, у которого в активном запасе одна формула, а все остальное где-то там, в шпаргалке, и все это в волнительной обстановке экзамена!

Итак, одной формулы мало. Зато справочники по математике содержат больше ста тригонометрических формул. Неужели их все надо выучить?

Нет, конечно. Необходимых формул не так уж и много.

В этой таблице формулы специально собраны по группам. Самая верхняя — основное тригонометрическое тождество и формулы, которые из него получаются. А также формулы для тангенса и котангенса.

Вторая группа — формулы для синуса, косинуса и тангенса двойного угла. Обратите внимание, что для косинуса двойного угла есть целых три формулы.

Следующая группа — формулы для синусов, косинусов и тангенсов суммы или разности двух аргументов.

И две группы формул внизу таблицы — преобразование суммы в произведение и произведения в сумму.

И еще две полезные формулы. Их легко получить из формул для косинуса двойного угла. Они называются формулами понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Чем они хороши? Тем, что они позволяют перейти к двойному аргументу и понизить степень, что бывает удобно для решения уравнений или построения графиков.

Как выучить тригонометрические формулы?

Так же, как любые другие: понемногу, но часто.

Не рассказывайте себе сказки о том, что в последнюю ночь перед ЕГЭ все выучите. Каждый день — один блок, то есть три-четыре формулы из нашей таблицы.

Тригонометрические формулы

<table>
<tr><td colspan="2">

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

</td></tr>
<tr><td>

Двойные углы

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

</td><td>

Синус суммы, косинус разности...

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$

</td></tr>
<tr><td>

Сумма синусов, разность косинусов...

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

</td><td>

Преобразование произведения в сумму

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

</td></tr>
</table>

Выучить иностранный язык проще всего тому, кто вынужден постоянно на нем говорить. Так и здесь. Решив 20–50 заданий на преобразование тригонометрических выражений и доказательство тождеств, вы точно запомните нужные формулы.

И универсальный способ: ежедневно, садясь за уроки, берите чистый листок и выписывайте наизусть все тригонометрические формулы, какие помните. Когда все готово — сверяете. И к экзамену вы будете помнить все.

Формулы приведения

Обратите внимание, что в нашей таблице с формулами нет формул приведения. Шпаргалки для них не нужны. Формулы приведения не надо зубрить наизусть. Достаточно запомнить два основных принципа, по которым они строятся. Лучше всего, если вы найдете на *Youtube* мой видеоурок по запросу «Формулы приведения Малкова». Здесь лучше один раз увидеть, чем 10 раз прочитать.

Формулы приведения применяются, если вам надо преобразовать выражение вида $\sin(x+\pi)$, $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$. Одним словом, когда к аргументу (то есть к величине, зависящей от переменной) прибавляется целое число, умноженное на π, или нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$.

А приведение — потому, что мы будем приводить это сложное выражение в скобках к более простому — к углу из первой четверти, то есть от нуля до 90°. К привидениям, то есть глюкам и призракам, эти формулы отношения не имеют.

Формулы приведения разделяются на две группы. Одни — те, в которых к аргументу прибавляется нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$ — как в выражении $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ или $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Другие — те, в которых к аргументу прибавляется целое число, умноженное на π. Как в выражениях $\sin(x+\pi)$, $\sin(\pi-x)$, $\cos(x-3\pi)$, $\operatorname{tg}(5x+\pi)$.

Запишем, кстати, чему равны эти выражения.

Первая группа. К аргументу прибавляем нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x;$$

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}2x.$$

Заметим, что в правой части формулы синус поменялся на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс. Говорят, что здесь тригонометрическая функция меняется на **ко**функцию, то есть на парную к ней функцию. И еще что-то происходит со знаком — в одних случаях он меняется, в других нет.

Теперь **вторая группа** формул.

$\sin(x+\pi)=-\sin x;$
$\sin(\pi-x)=\sin x;$
$\cos(x-3\pi)=-\cos x;$
$\operatorname{tg}(5x+\pi)=\operatorname{tg}5x.$

В этом случае функция не меняется на кофункцию.

Итак, если в тригонометрической формуле к аргументу мы прибавляем или вычитаем $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ — в общем, угол, лежащий на вертикальной оси, — функция меняется на кофункцию.

Если прибавляем или вычитаем π, 3π, 5π — в общем, то, что лежит на горизонтальной оси, — функция на кофункцию не меняется.

То есть, если прибавляемый угол лежит на вертикальной оси — вертикально киваем головой, говорим: «Да, да, меняется функция на кофункцию». Если прибавляемый угол лежит на горизонтальной оси — горизонтально мотаем головой, говорим: «Нет, нет, не меняется функция на кофункцию».

Хорошо, мы выяснили, когда меняется функция на кофункцию в тригонометрических формулах, а когда — нет. Осталось выяснить, что происходит со знаком. Когда в правой части формулы он такой же, как в левой, а когда — нет?

Как это проверить — покажу на примере. Возьмем формулу $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Если я возьму x из первой четверти, прибавлю к нему $\frac{\pi}{2}$ — попаду во вторую четверть. Во второй четверти косинус отрицателен. Значит, получится $-\sin x$.

Другой пример: выражение $\sin(\pi - x)$. Я возьму x из первой четверти, тогда угол $\pi - x$ будет во второй четверти, а там синус положителен. Значит, $\sin(\pi - x) = \sin x$. Кстати, мы уже познакомились с этой формулой раньше, в теме «Внешний угол треугольника».

И теперь несколько задач ЕГЭ на применение всех известных нам формул и свойств синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

1. $4\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{3} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2.$

Мы нашли значение $\cos\frac{\pi}{4}$ с помощью тригонометрического круга. И еще воспользовались тем, что период косинуса равен 2π, и поэтому $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

2. $\frac{5\text{tg}163^\circ}{\text{tg}17^\circ} = \frac{5\text{tg}(163^\circ-17^\circ)}{\text{tg}17^\circ} = -\frac{5\text{tg}17^\circ}{\text{tg}17^\circ} = -5.$

Воспользовались формулой приведения. 180° — находится на горизонтальной оси, значит, не меняется функция на кофункцию (горизонтально мотаем головой, помните?), а знак у тангенса во второй четверти отрицательный — появляется минус.

3. $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ} = \dfrac{14\sin(360^\circ + 49^\circ)}{\sin 49^\circ} = \dfrac{14\sin 49^\circ}{\sin 49^\circ} = 14.$

Здесь мы вспомнили о том, что синус — функция периодическая, и тогда $\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$.

4. $5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ = 5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + 17^\circ) = -5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{ctg} 17^\circ = -5.$

Тоже формула приведения. Угол 90° лежит на вертикальной оси. Вертикально киваем головой: да, меняется функция на кофункцию, то есть тангенс поменялся на котангенс. А минус — потому, что $\operatorname{tg} 107^\circ < 0$. Далее пользуемся тем, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ и получаем ответ.

5. $\dfrac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ} = \dfrac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2(90^\circ + 37^\circ)} = .$

$= \dfrac{12}{\sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ} = 12.$

Снова формула приведения и основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

6. $\dfrac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \dfrac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{2\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ} = 6.$

Применили формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

7. $\dfrac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = -\dfrac{24(\cos^2 17^\circ - \sin^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = -\dfrac{24(\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = -24.$

Применили формулу косинуса двойного угла: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

8. $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ} = \dfrac{5\cos(90^\circ - 61^\circ)}{\sin 61^\circ} = \dfrac{5\sin 61^\circ}{\sin 61^\circ} = 5.$

Снова формула приведения.

Тригонометрические функции

В школьной программе изучаются четыре тригонометрических функции — синус, косинус, тангенс и котангенс. Рассмотрим графики и основные свойства этих функций.

1. Начнем с построения графика функции $y = \sin x$.

Выберем подходящий масштаб. По оси X: три клетки примем за $\frac{\pi}{2}$ (это примерно полтора). Тогда $\frac{\pi}{6}$ — одна клеточка, $\frac{\pi}{3}$ — две клетки. По оси Y: две клетки примем за единицу.

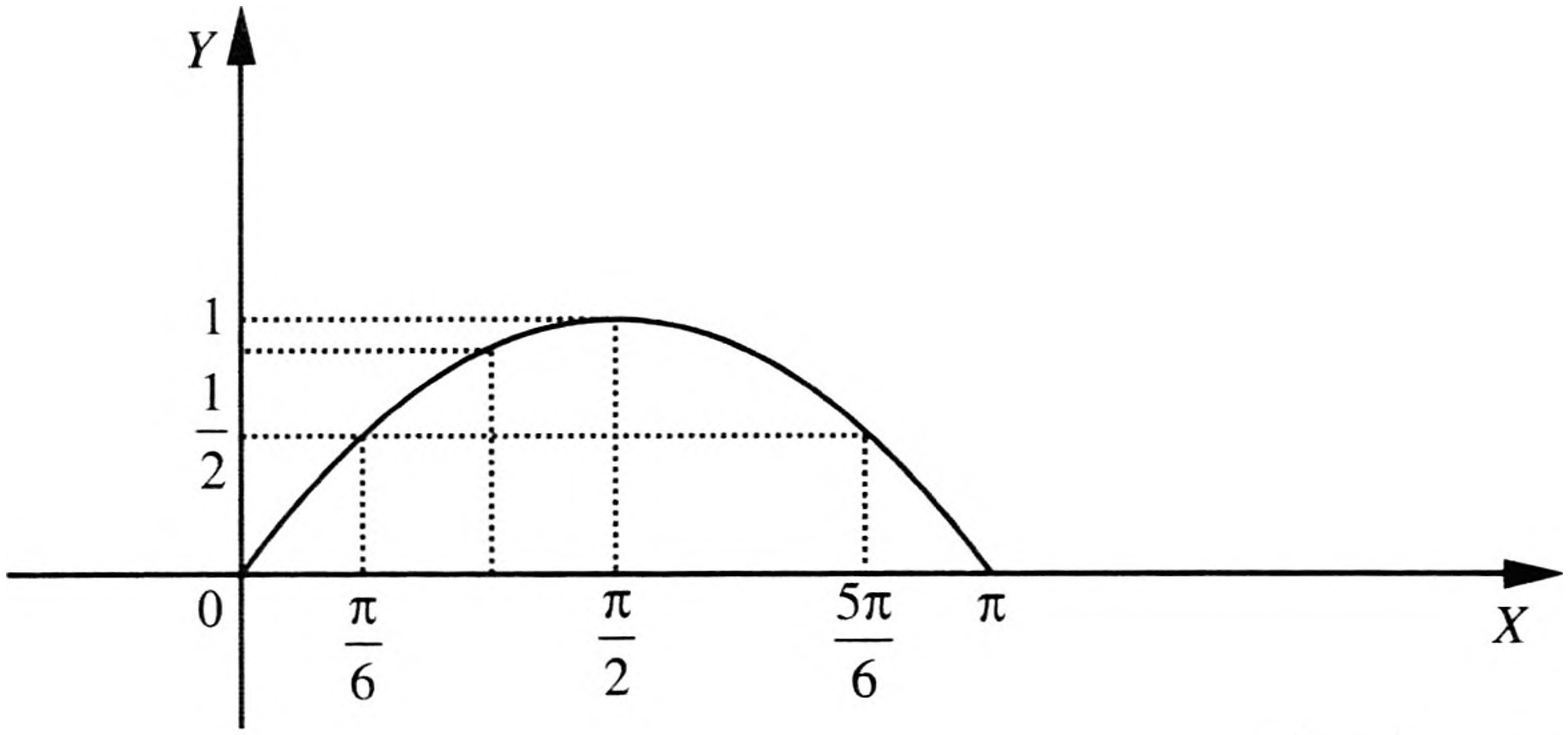
Область определения функции $y = \sin x$ — все действительные числа, поскольку значение $\sin\alpha$ можно посчитать для любого угла α.

Вспомним, что у нас есть тригонометрический круг, на котором обозначены синусы и косинусы основных углов. Удобнее всего отметить на будущем графике точки, в которых значение синуса является рациональным числом.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

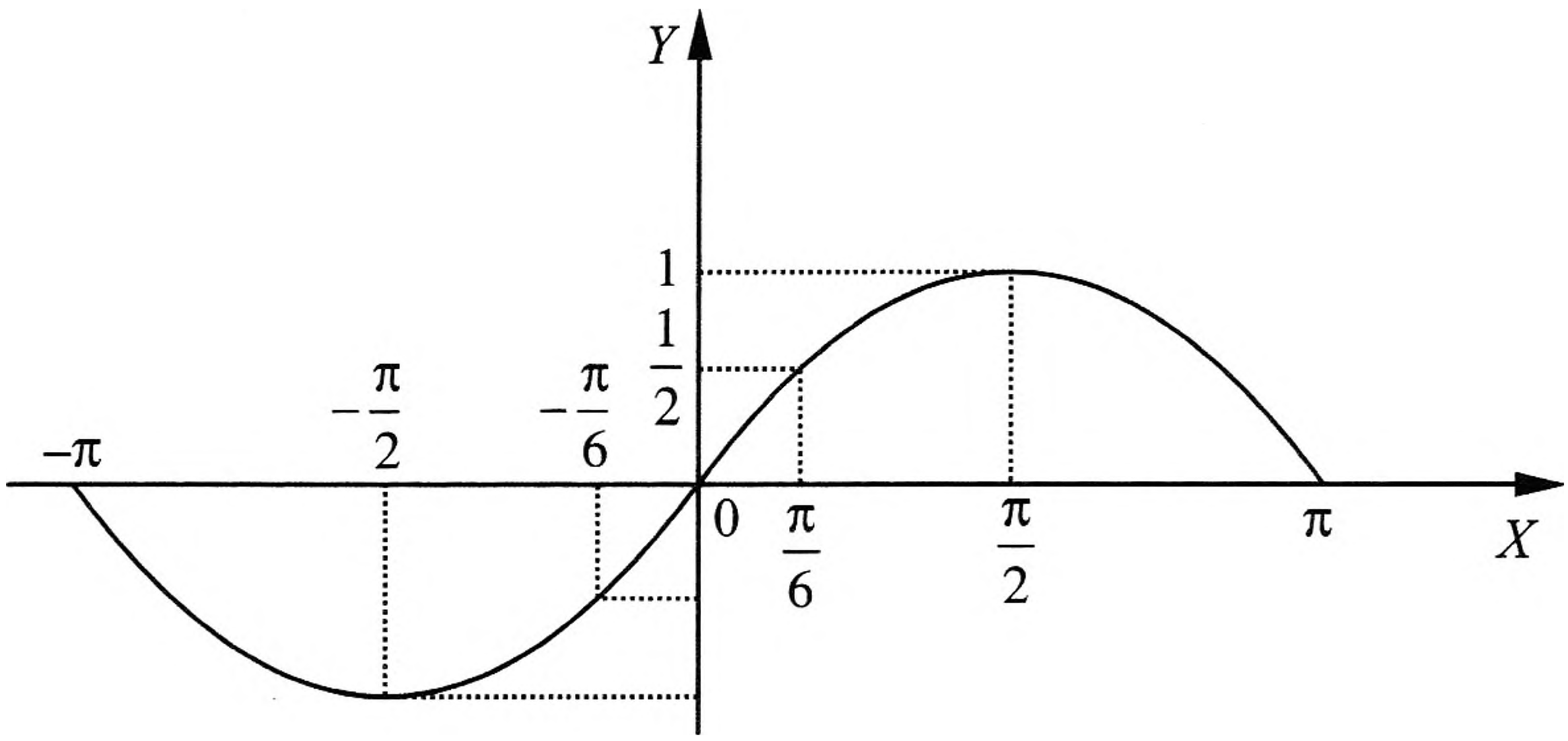
Можем добавить, для большей плавности графика, точки $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. В них значение синуса равно $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$.

Соединим полученные точки плавной кривой.



Мы помним, что $\sin(-x) = -\sin x$. Это значит, что $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Получается часть графика, симметричная той, которую нарисовали раньше.



Кроме того, значения синуса повторяются через полный круг или через целое число кругов, то есть $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.

Это значит, что функция $y = \sin x$ является периодической. Мы уже построили участок графика длиной 2π. А теперь мы как будто «копируем» этот участок и повторяем его с периодом 2π:

Синусоида построена.

Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$.

1) $D(y)$: $x \in R$, то есть область определения — все действительные числа.

2) $E(y)$: $y \in [-1; 1]$. Это означает, что наибольшее значение функции $y = \sin x$ равно единице, а наименьшее — минус единице.

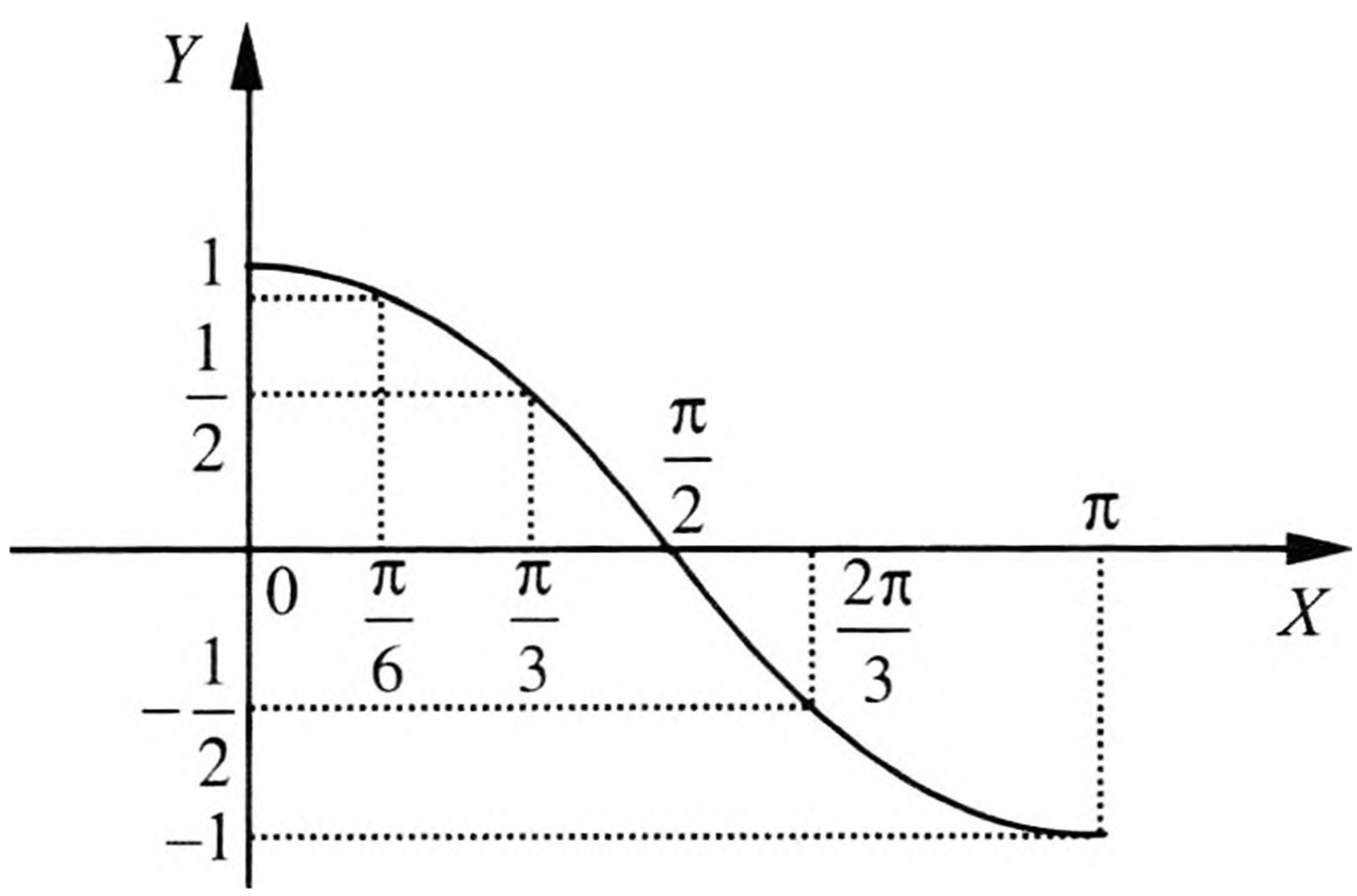
3) Функция $y = \sin x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно нуля.

4) Функция $y = \sin x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.

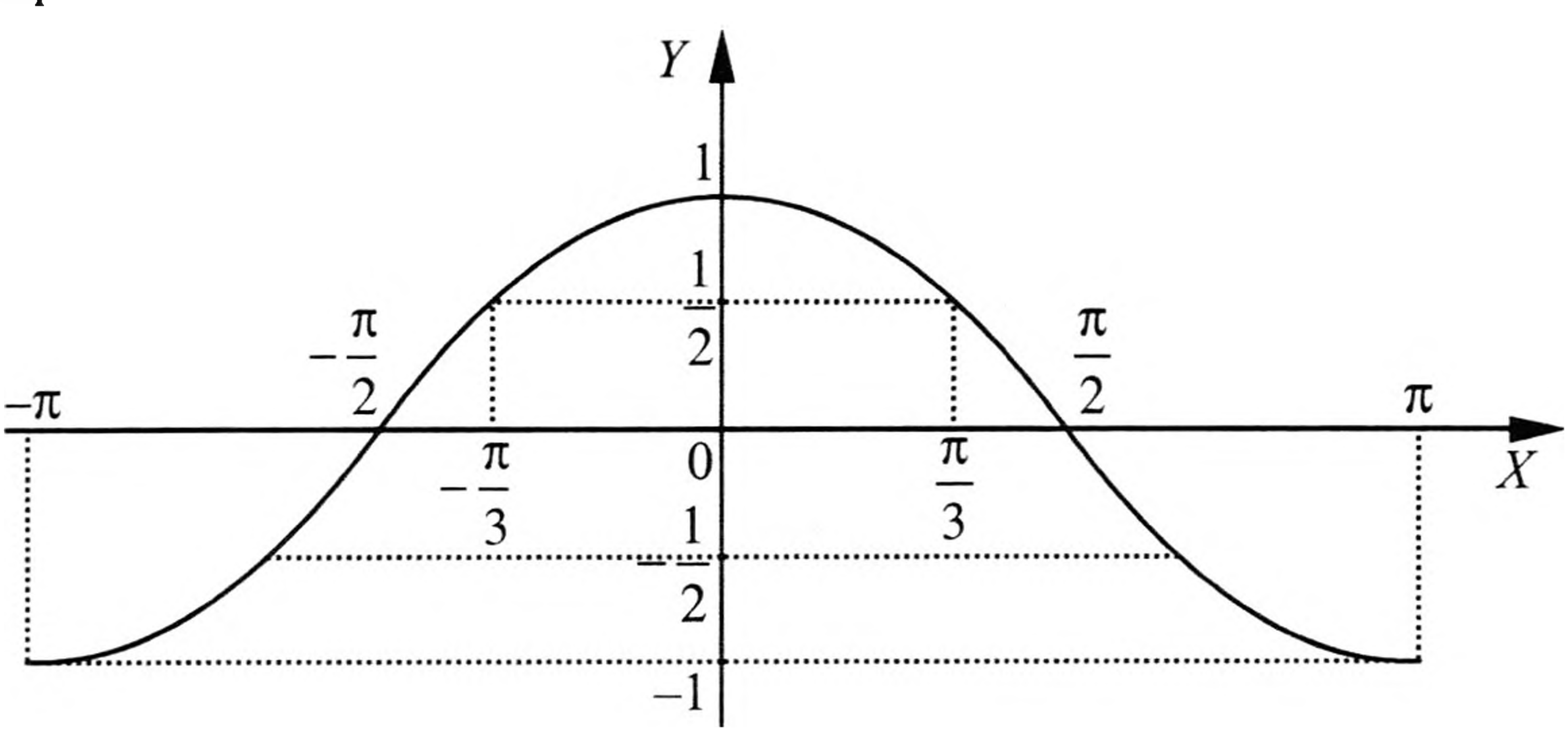
2. Следующий график: $y = \cos x$. Масштаб — тот же.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

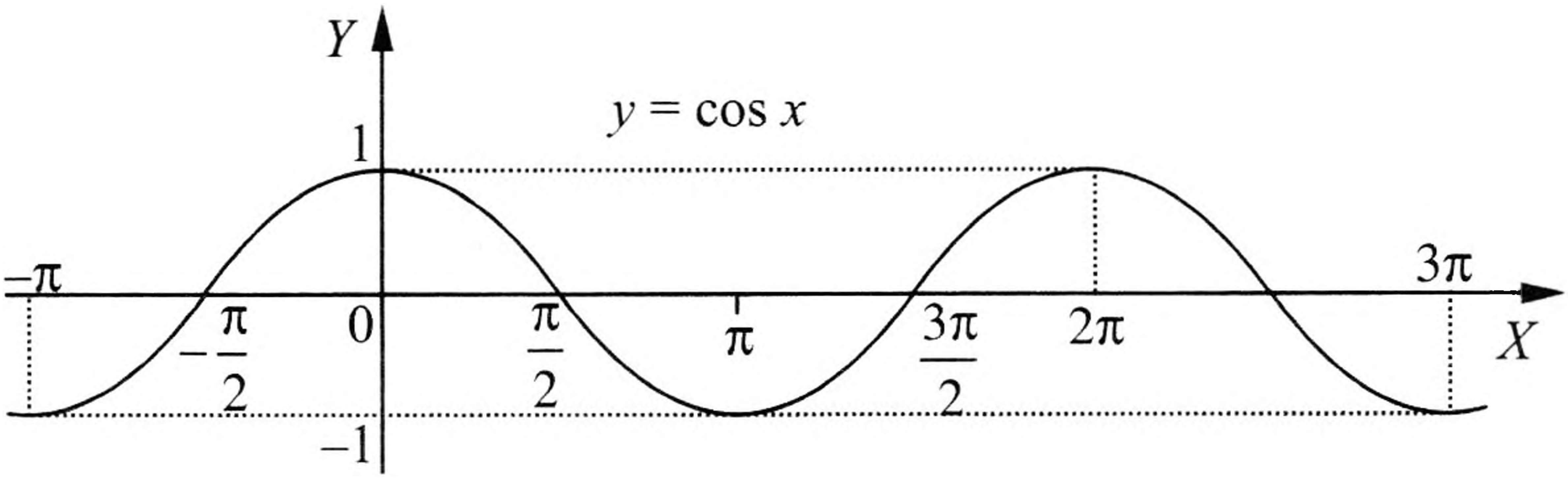
Отметим на графике точки, в которых косинус является рациональным числом:



Поскольку $\cos(-x) = \cos x$, график будет симметричен относительно оси Y, то есть левая его часть будет зеркальным отражением правой.



Функция $y = \cos x$ — тоже периодическая. Так же, как и для синуса, ее значения повторяются через $2\pi n$. «Копируем» участок графика, который уже построили, и повторяем периодически.



Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

1) $D(y)$: $x \in R$, то есть область определения — все действительные числа.

2) $E(y)$: $y \in [-1; 1]$. Это означает, что наибольшее значение функции $y = \cos x$ равно единице, а наименьшее — минус единице.

3) Функция $y = \cos x$ — четная. Ее график симметричен относительно оси Y.

4) Функция $y = \cos x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π.

Отметим еще одно свойство. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ весьма похожи друг на друга. Можно даже сказать, что график косинуса получится, если график синуса сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ влево. Так оно и есть — по одной из формул приведения,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Форма графиков функций синус и косинус, которые мы построили, очень характерна и хорошо знакома нам. Такой линией дети рисуют волны. Да, это и есть волны!

Функции синус и косинус идеально подходят для описания колебаний и волн — то есть процессов, повторяющихся во времени.

По закону синуса (или косинуса) происходят колебания маятника или груза на пружине. Сила переменного тока (который в розетке) выражается формулой $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Но и это не все.

Функции синус и косинус описывают звуковые, инфра- и ультразвуковые волны, а также весь спектр электромагнитных колебаний. Ведь то, что наш глаз воспринимает как свет и цвет, на самом деле представляет собой электромагнитные колебания. Разные длины волн света воспринимаются нами как разные цвета. Наши глаза видят лишь небольшую часть спектра электромагнитных волн. Кроме видимого цвета, в нем присутствуют радиоволны, тепловое (инфракрасное) излучение, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Более того — объекты микромира (например, электрон) проявляют волновые свойства.

3. Перейдем к графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

Чтобы построить его, воспользуемся таблицей значений тангенса.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\operatorname{tg} x$	0	1	$\sqrt{3} \approx 1,7$	не существует	$-\sqrt{3} \approx -1,7$	-1	0

Масштаб возьмем тот же — три клетки по оси X соответствуют $\frac{\pi}{2}$, две клетки по Y — единице. График будем строить на отрезке от 0 до π. Поскольку $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, функция тангенс также является периодической.

Мы нарисуем участок длиной π, а затем периодически его повторим.

Непонятно только, как быть с точкой $x = \frac{\pi}{2}$. Ведь в этой точке значение тангенса не определено. А как же будет вести себя график функции $y = \operatorname{tg} x$ при x, близких к $\frac{\pi}{2}$, то есть к 90 градусам?

Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем значение x, близкое к 90°, и посчитаем на калькуляторе значения синуса и косинуса этого угла. Пусть $x = 89°$.

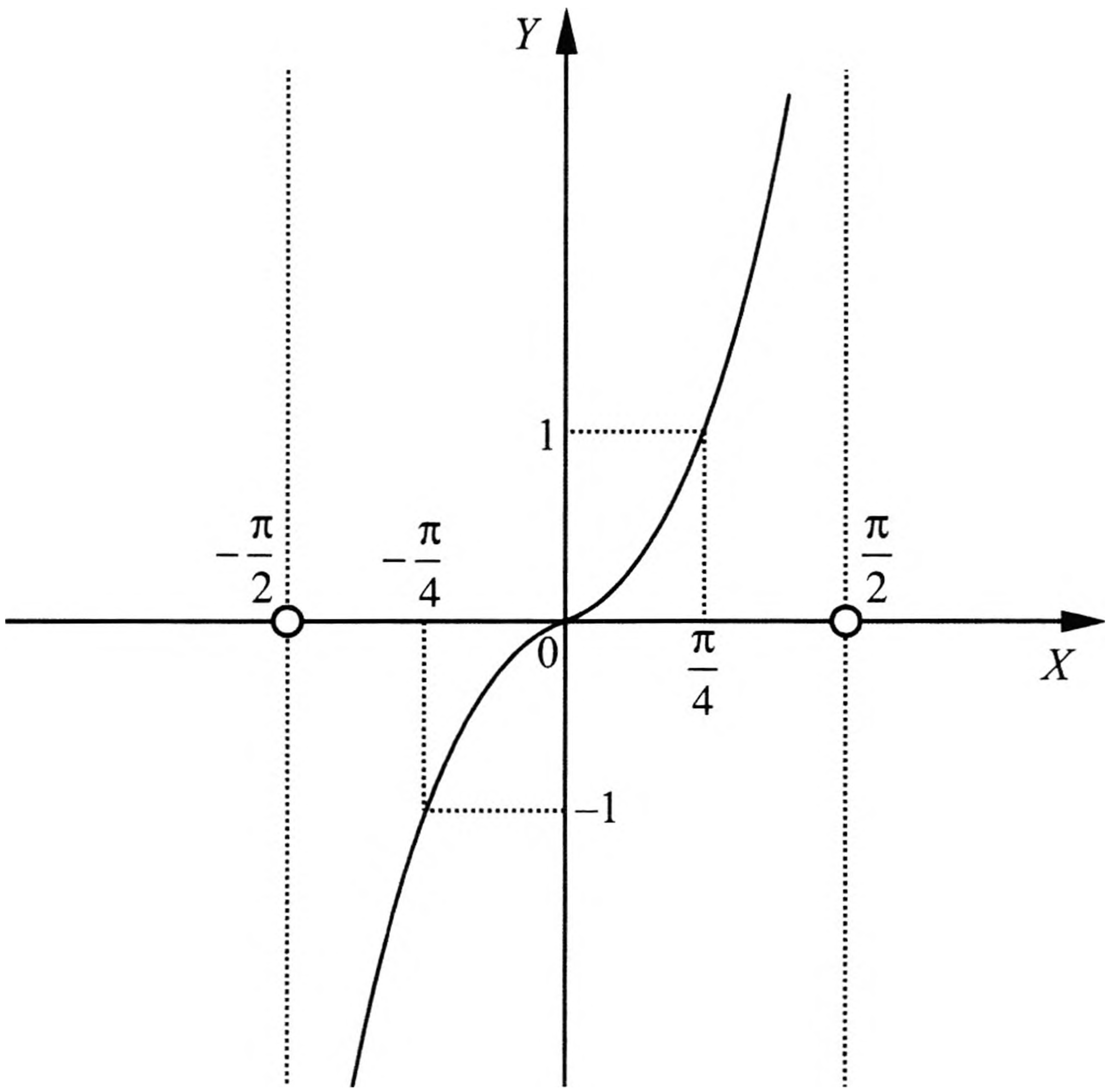
Синус угла 89° — это почти 1. Точнее, $\sin 89° \approx 0,9998$.

Косинус этого угла близок к нулю. Точнее, $\cos 89° \approx 0,0175$.

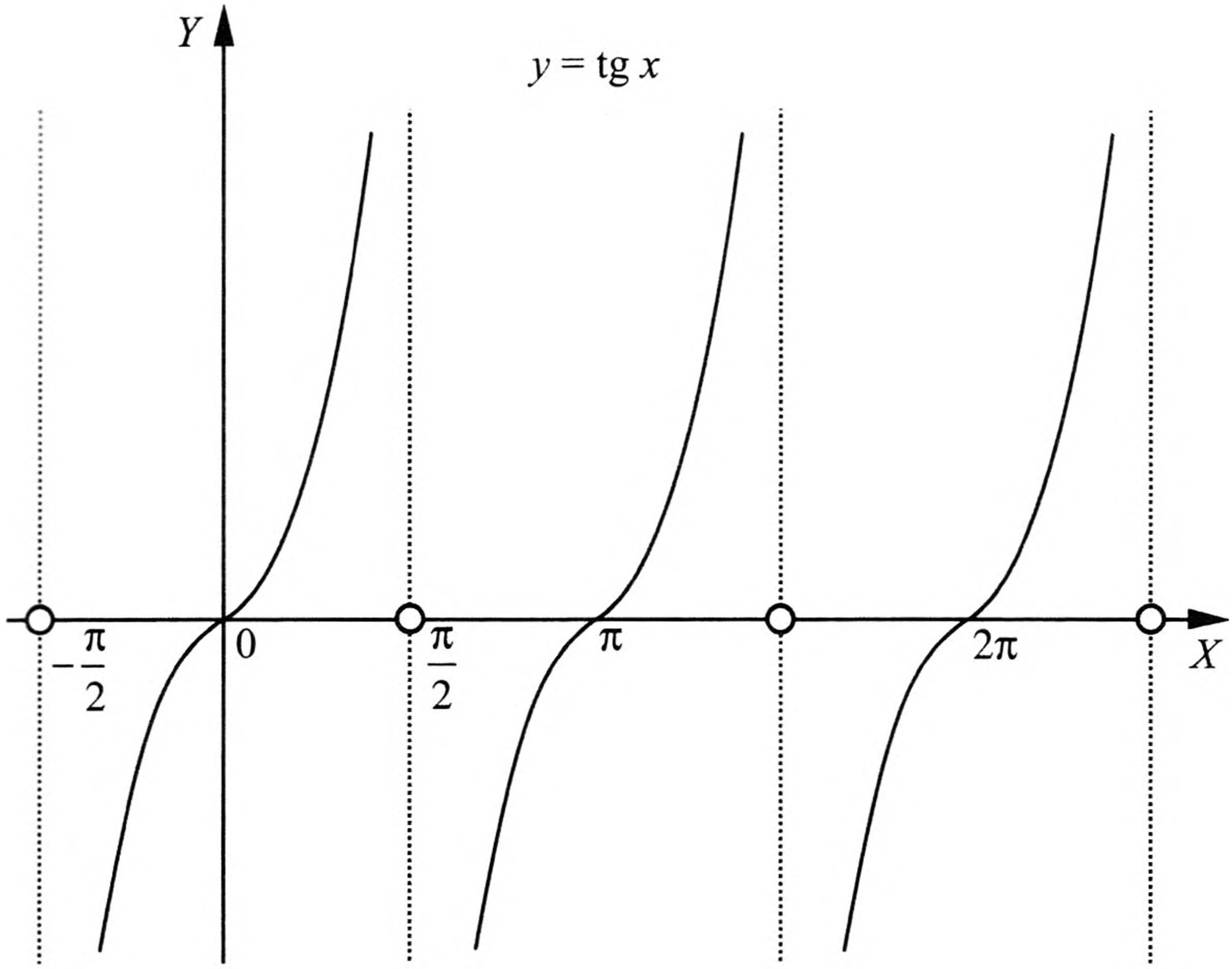
Тогда $\operatorname{tg} 89° = \frac{\sin 89°}{\cos 89°} = \frac{0,9998}{0,0175} = \frac{9998}{175} \approx 59$. Итак, при $x = 89°$ график уйдет на 59 единиц вверх. Можно сказать, что если x стремится к 90° (т. е. к $\frac{\pi}{2}$), значение функции $y = \operatorname{tg} x$ стремится к бесконечности.

Аналогично, при x, близких к $-\frac{\pi}{2}$, график тангенса уходит вниз, т. е. стремится к минус бесконечности.

Мы уже знаем, как называются прямые, к которым бесконечно близко подходит график функции. Это асимптоты. Прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ — асимптоты графика функции $y = \operatorname{tg} x$.



Осталось только «скопировать» этот участок графика и повторить его с периодом π.



Перечислим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) $D(y): x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

Другими словами, тангенс не определен для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

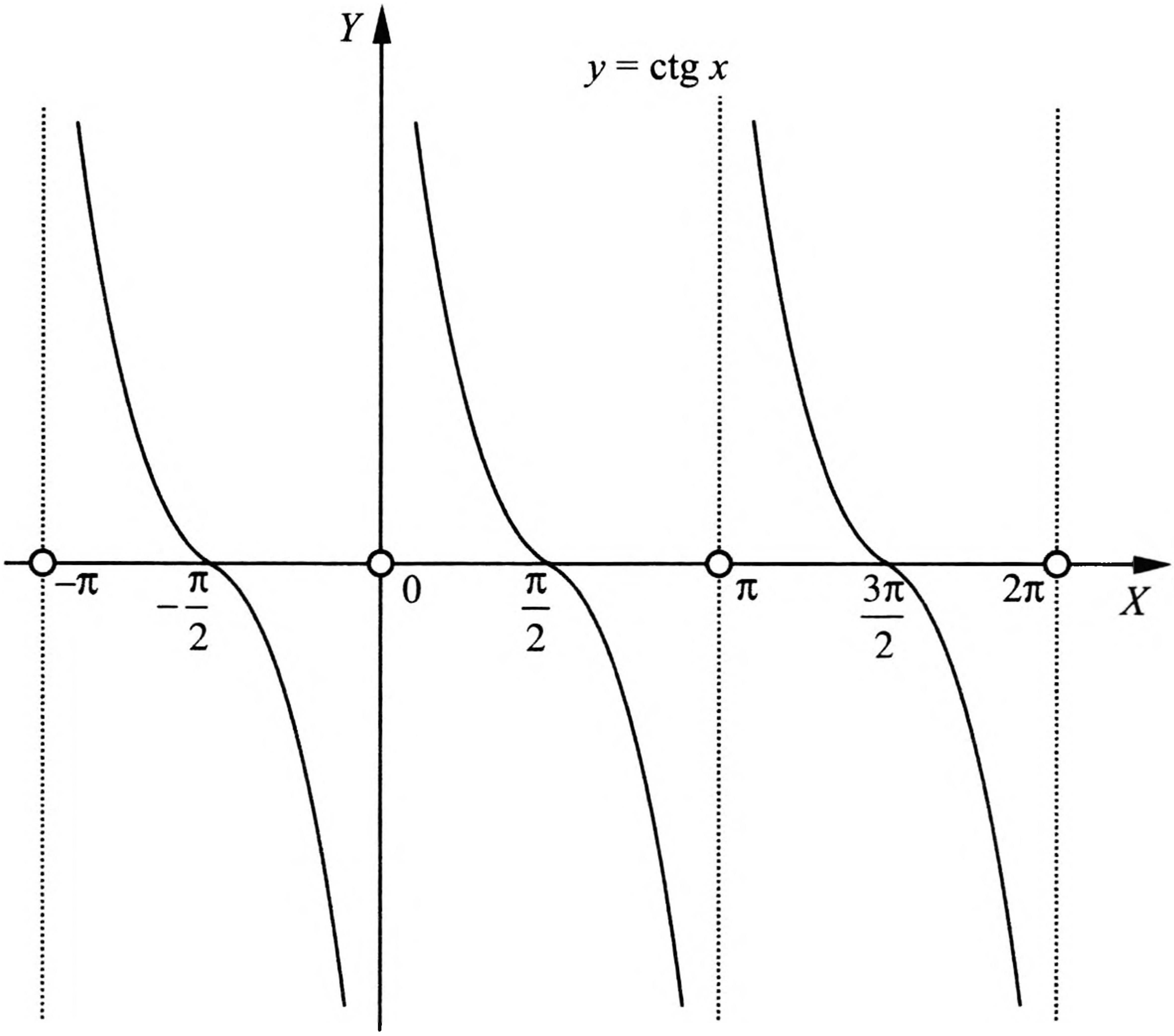
2) Область значений $E(y)$ — все действительные числа.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, т. е. на каждом участке, на котором она непрерывна.

4. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ строится аналогично. Вот он:



1) $D(y)$: $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$. Другими словами, котангенс не определен для $x = \pi n$, где $n \in Z$.

2) Область значений $E(y)$ — — все действительные числа.

3) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает при $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$, т. е. на каждом участке, на котором она непрерывна.

Простейшие тригонометрические уравнения

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым.

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырех видов:

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a, \qquad \operatorname{tg} x = a, \qquad \operatorname{ctg} x = a.$$

Любое тригонометрическое уравнение в конечном счете сводится к решению одного или нескольких простейших. К сожалению, на этом заключительном стандартном шаге школьники допускают множество глупых ошибок. До чего же досадно из-за них терять баллы на экзамене!

Есть два подхода к решению простейших тригонометрических уравнений.

Первый подход — бессмысленный и тяжелый. Надо выучить по шпаргалке общие формулы, а также все частные случаи. Пользы от этого так же немного, как от зубрежки шестнадцати строк заклинаний на непонятном языке. Мы забраковываем этот подход раз и навсегда.

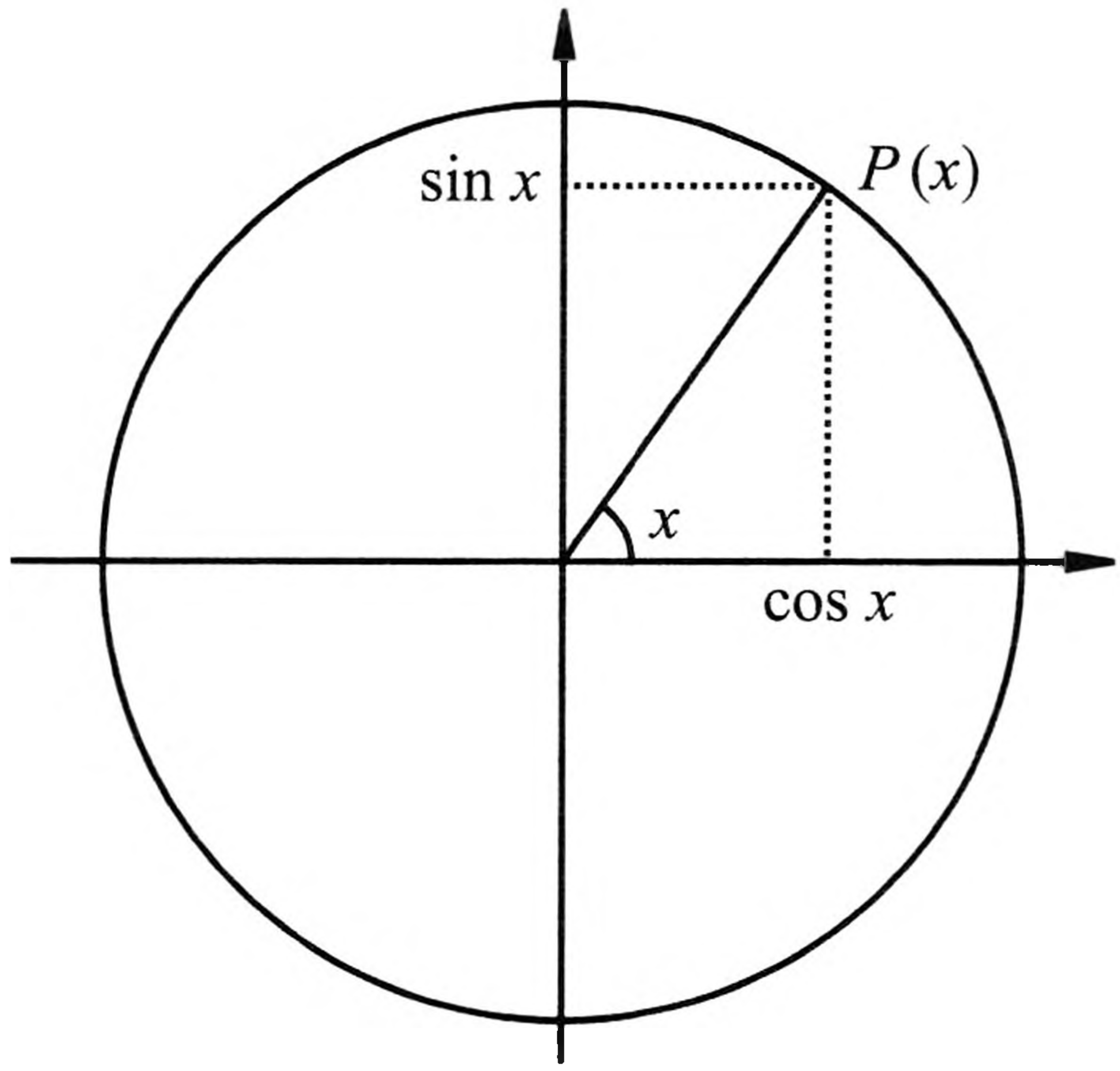
Второй подход — логический и наглядный. Для решения простейших тригонометрических уравнений мы пользуемся тригонометрическим кругом и определениями тригонометрических функций.

Все, что вам нужно при таком подходе, — это понимание, осмысленные действия и отличное знание тригонометрического круга. Результат — вы будете легко и без ошибок решать тригонометрические уравнения.

Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$

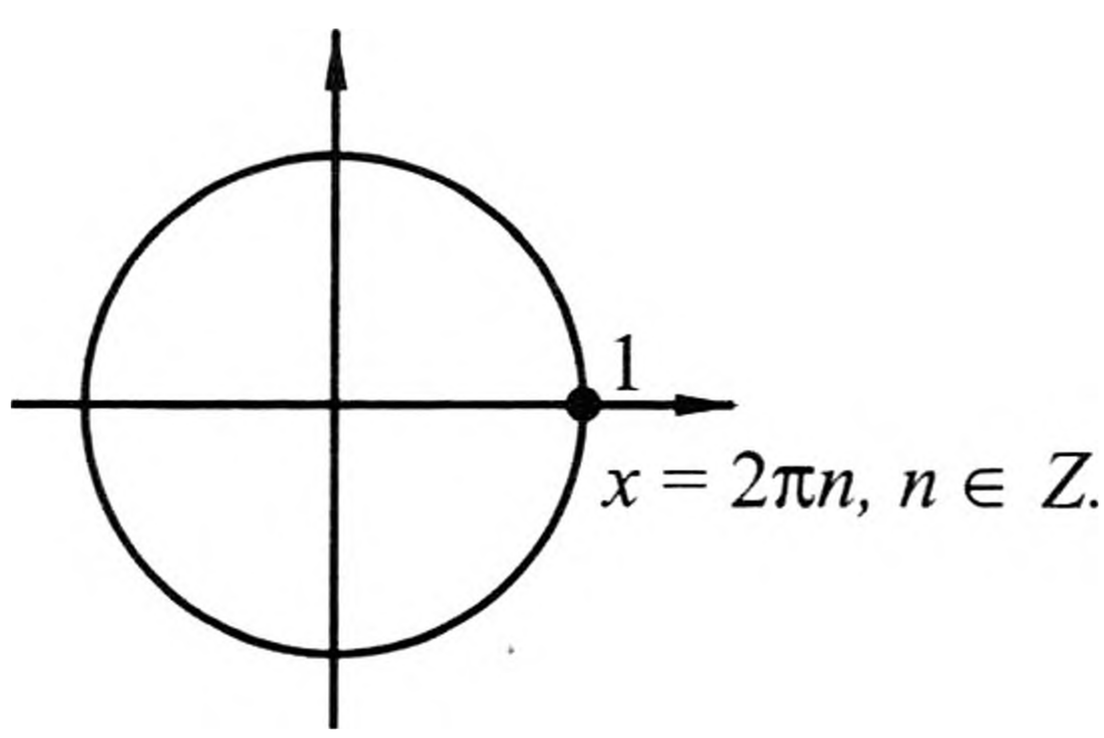
Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу x, а $\sin x$ — ее ордината.

Из определения синуса и косинуса следует, что уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$ имеют решения только при условии $|a| \le 1$. Абитуриент, будь внимателен! Уравнения $\sin x = \frac{3}{2}$ или $\cos x = -7$ решений не имеют!



Начнем с самых простых уравнений.

1. $\cos x = 1$.



Мы видим, что на единичной окружности имеется лишь одна точка с абсциссой 1:

Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: 0, 2π, -2π, 4π, -4π, 6π, -6π, ...

Все они получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных кругов 2π (т. е. нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

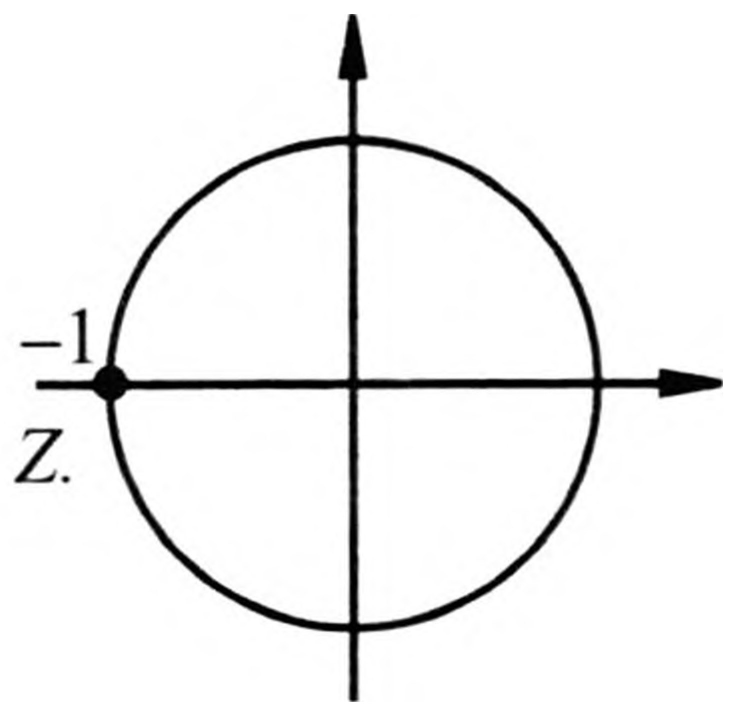
Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

$$x = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Это и есть множество решений данного уравнения. Напоминаем, что Z — это множество целых чисел.

2. $\cos x = -1$.

Снова видим, что на единичной окружности есть лишь одна точка с абсциссой -1:



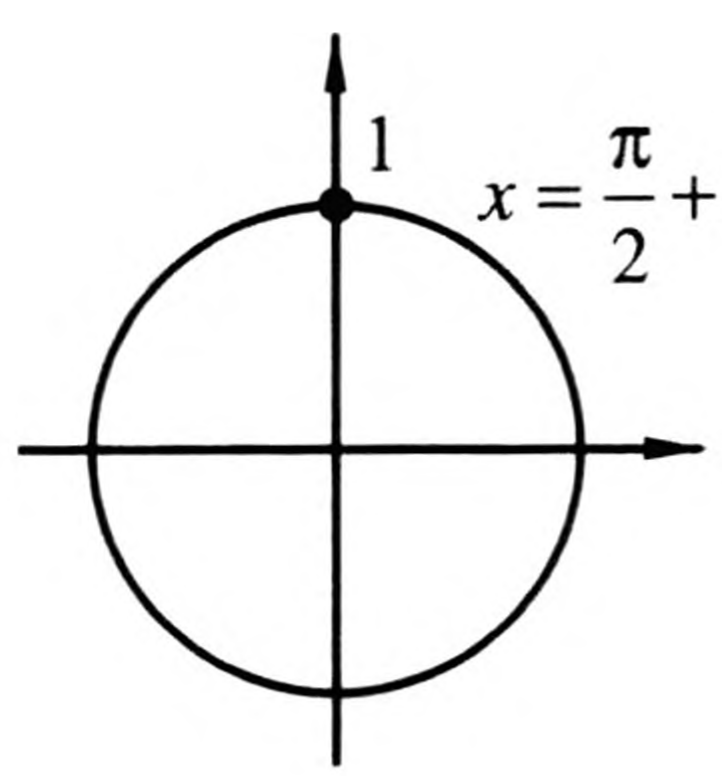
$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающимся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, т. е. на целое число полных кругов. Следовательно, все решения данного уравнения записываются формулой:

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

3. $\sin x = 1$.

Отмечаем на тригонометрическом круге единственную точку с ординатой 1:



$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

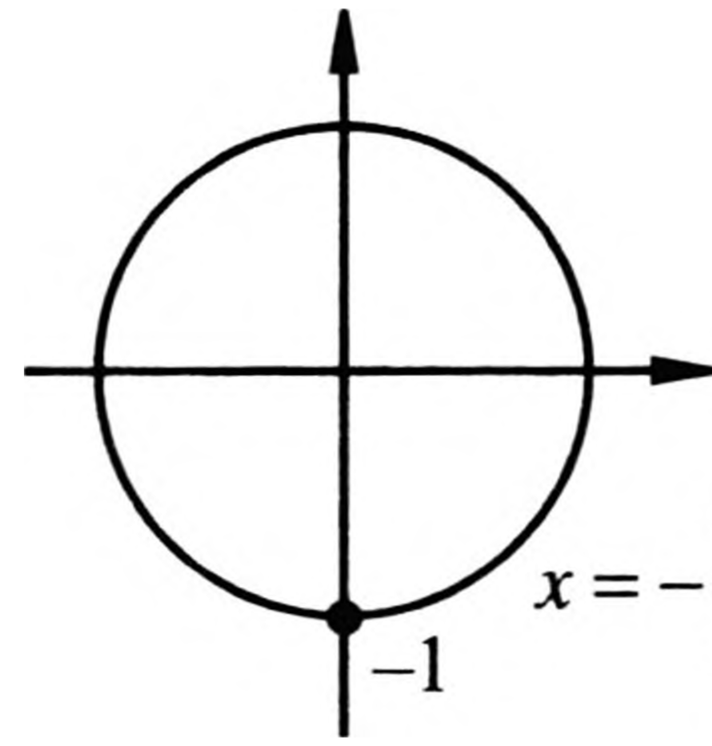
И записываем ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

4. $\sin x = -1$.

Обсуждать тут уже нечего, не так ли?

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Можете, кстати, записать ответ и в другом виде:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

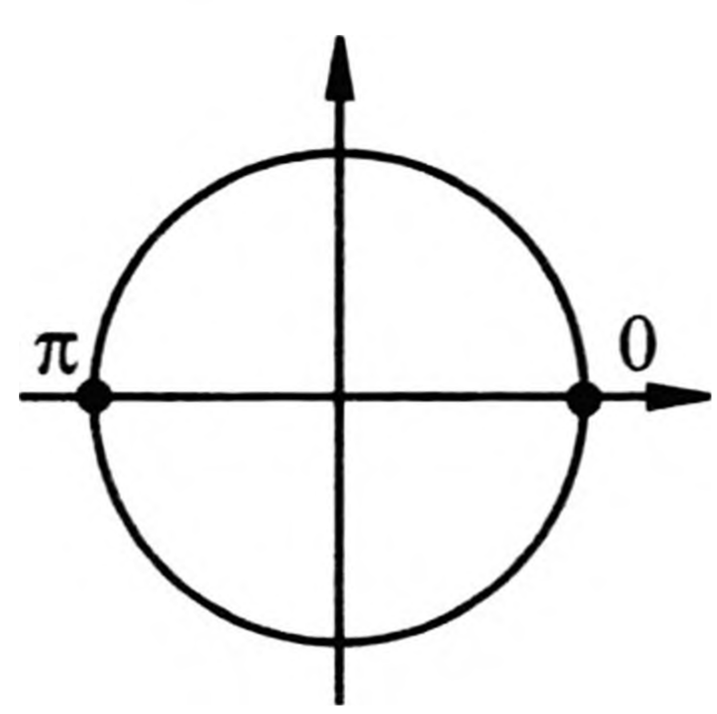
Это — дело исключительно вашего вкуса.

Заодно сделаем первое полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих одной-единственной точке тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить $2\pi n$.

5. $\sin x = 0$.

На тригонометрическом круге имеются две точки с ординатой 0:



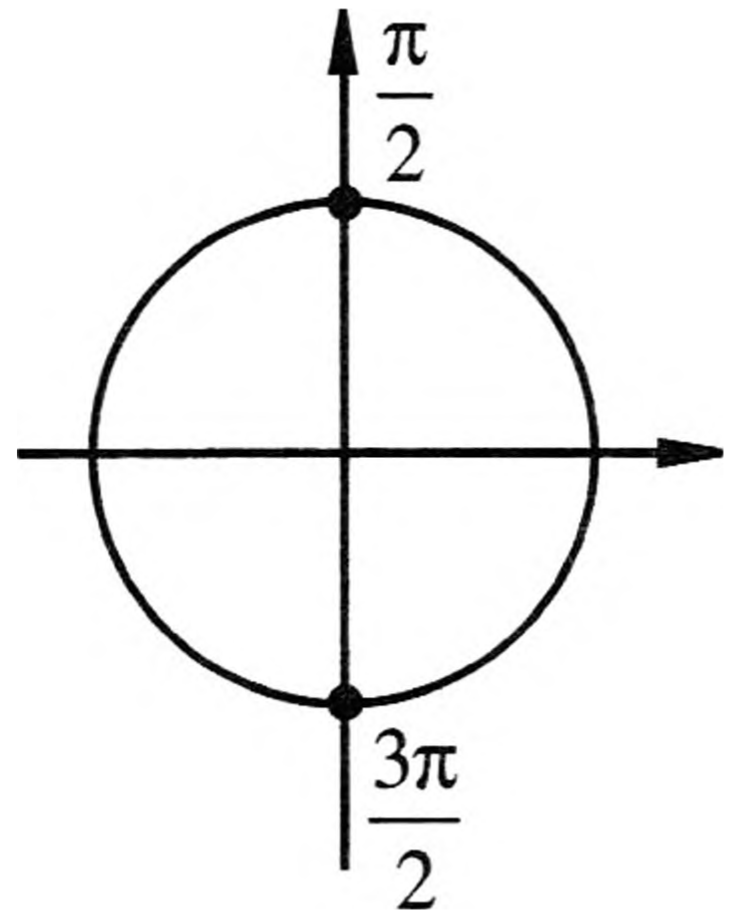
Эти точки соответствуют углам 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... Все эти углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа углов π (т. е. с помощью нескольких полуоборотов в обе стороны). Таким образом,

$$x = \pi n,\ n \in Z.$$

Точки, лежащие на концах диаметра тригонометрического круга, мы будем называть *диаметральной парой*.

6. $\cos x = 0$.

Точки с абсциссой 0 также образуют диаметральную пару, на сей раз вертикальную:



Все углы, отвечающие этим точкам, получаются из $\frac{\pi}{2}$ прибавлением целого числа углов π (полуоборотов):

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

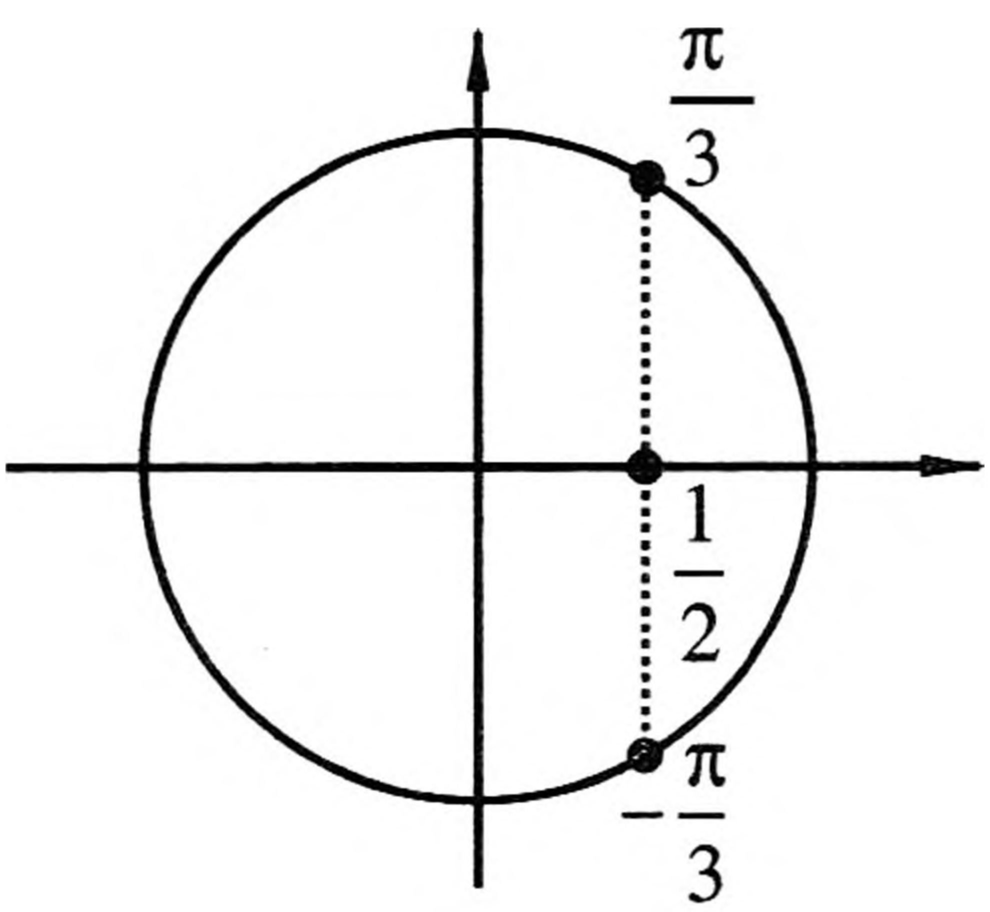
Теперь мы можем сделать и второе полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить πn.

Переходим к следующему этапу. Теперь в правой части будет стоять табличное значение синуса или косинуса (отличное от 0 или ± 1). Начинаем с косинуса.

7. $\cos x = \frac{1}{2}$.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $\frac{1}{2}$:



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

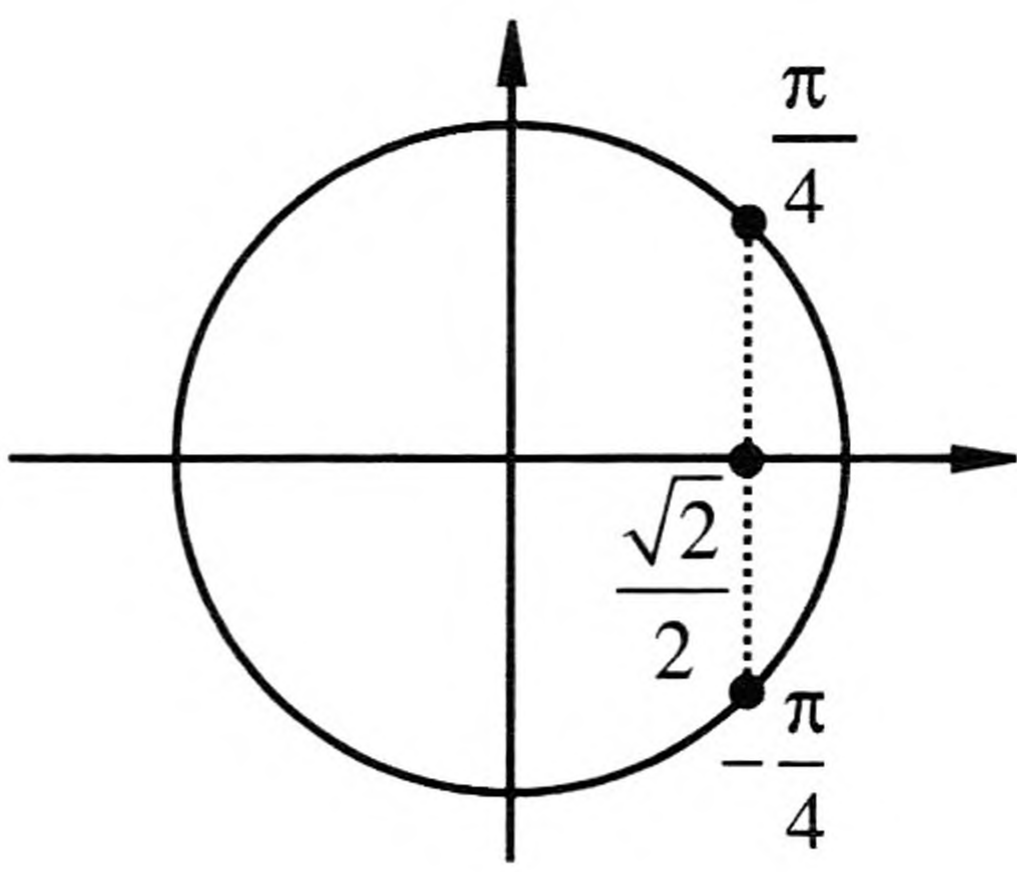
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

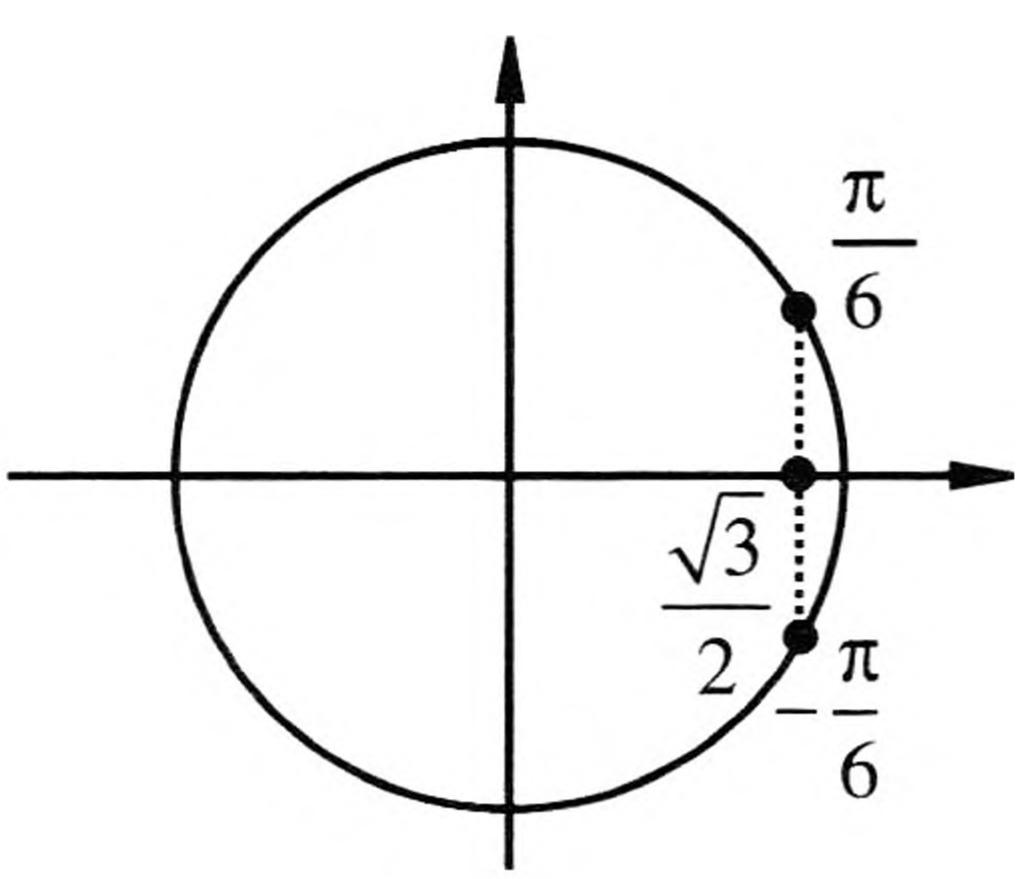
Остальные уравнения с косинусом решаются совершенно аналогично. Мы приводим лишь рисунок и ответ.

8. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



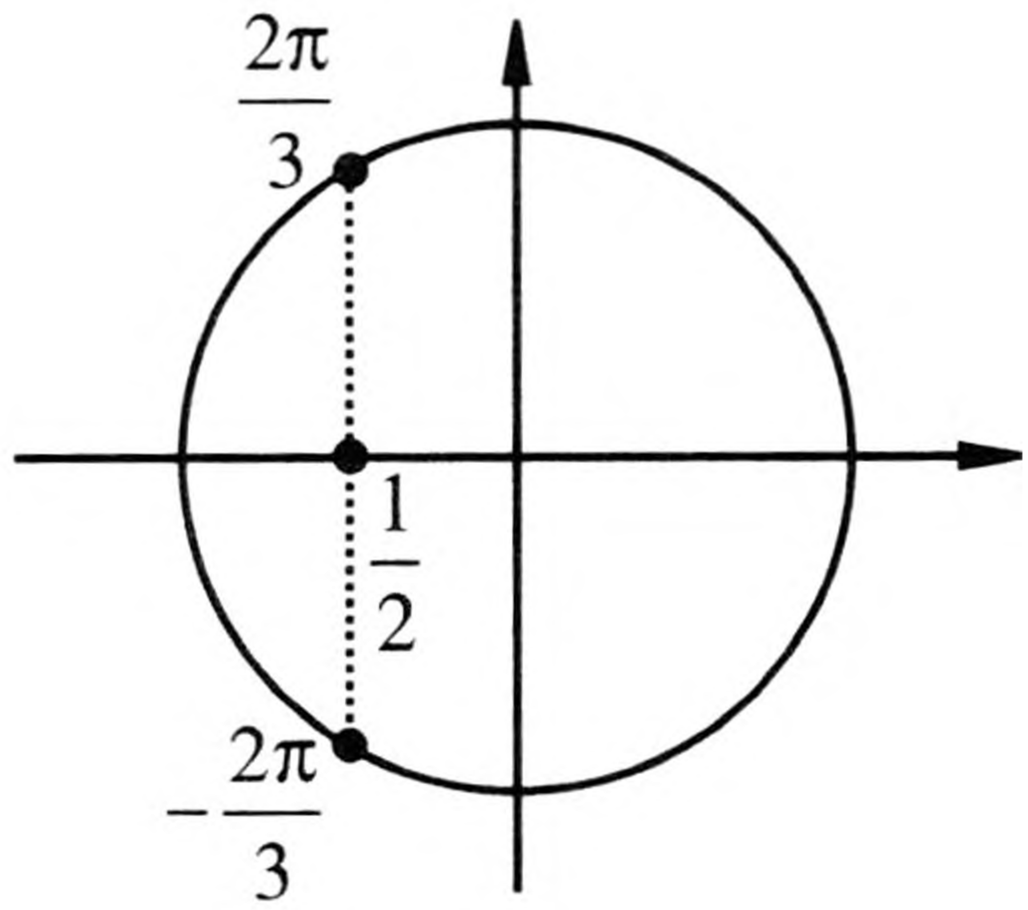
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

9. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



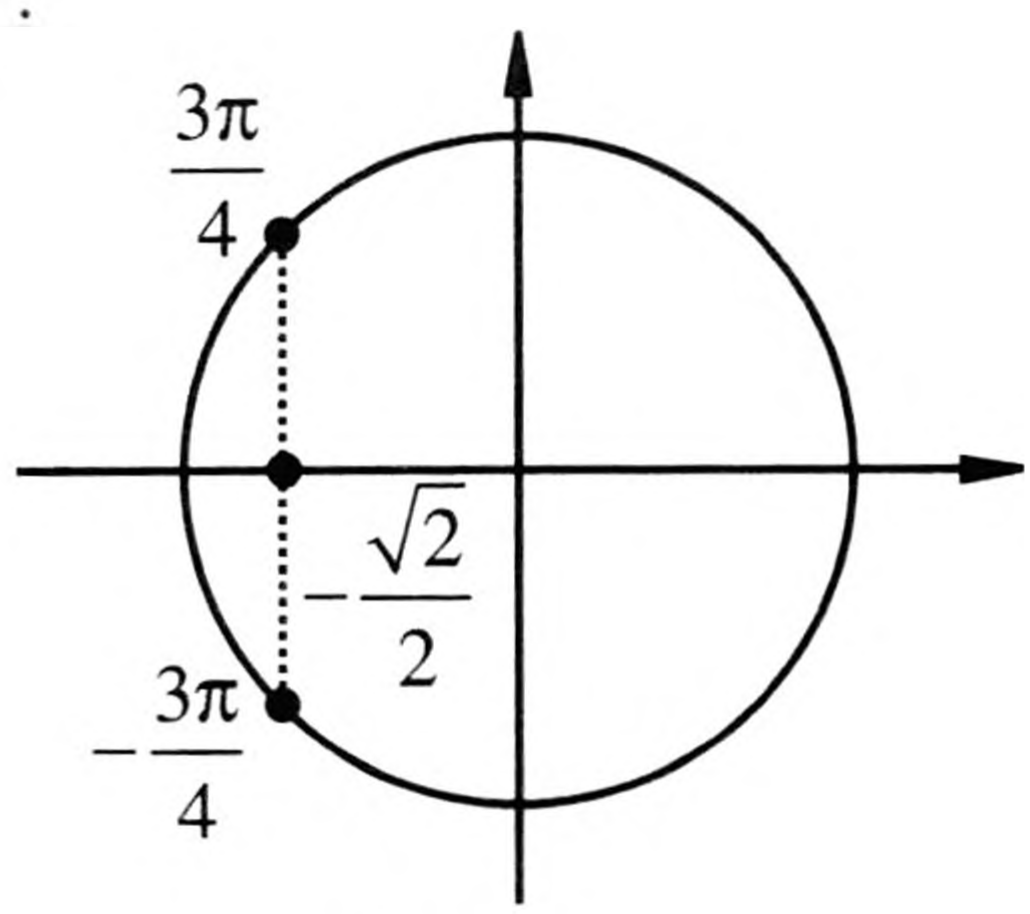
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

10. $\cos x = -\frac{1}{2}$.



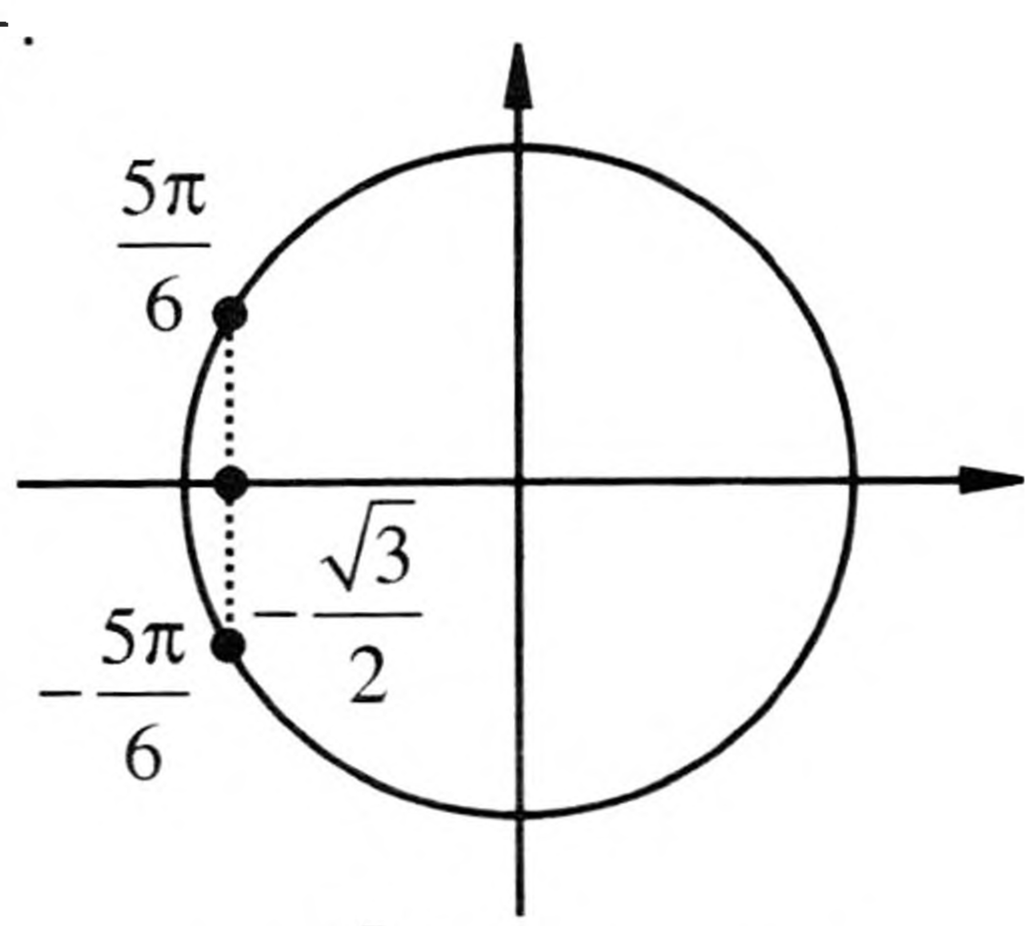
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

11. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

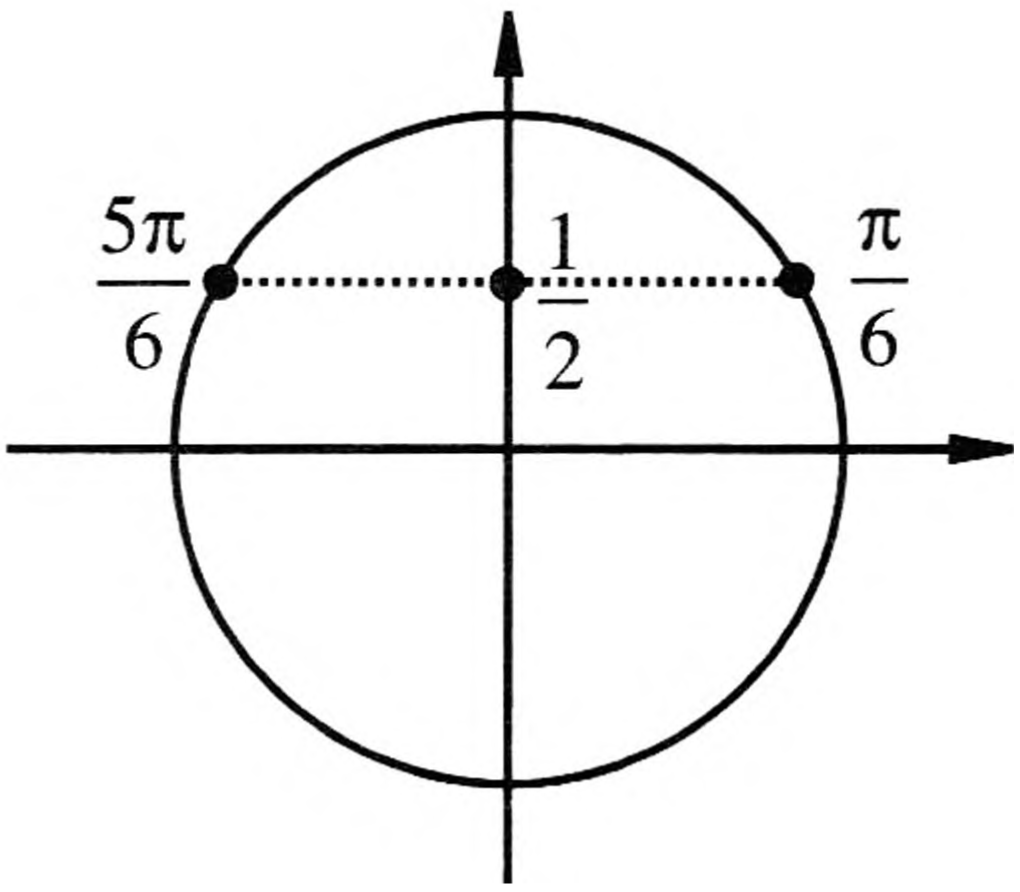
12. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь рассмотрим уравнения с синусом. Тут ситуация немного сложнее.

13. $\sin x = \frac{1}{2}$.



Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $\frac{1}{2}$:

Углы, отвечающие правой точке:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Углы, отвечающие левой точке:

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Описывать эти две серии одной формулой никто не заставляет. Можно записать ответ в таком виде:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Тем не менее, объединяющая формула существует, и ее надо знать. Выглядит она так:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она дает обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при четных k. Если $k = 2n$, то

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Мы получили первую серию решений x_1. А если k нечетно, $k = 2n + 1$, то

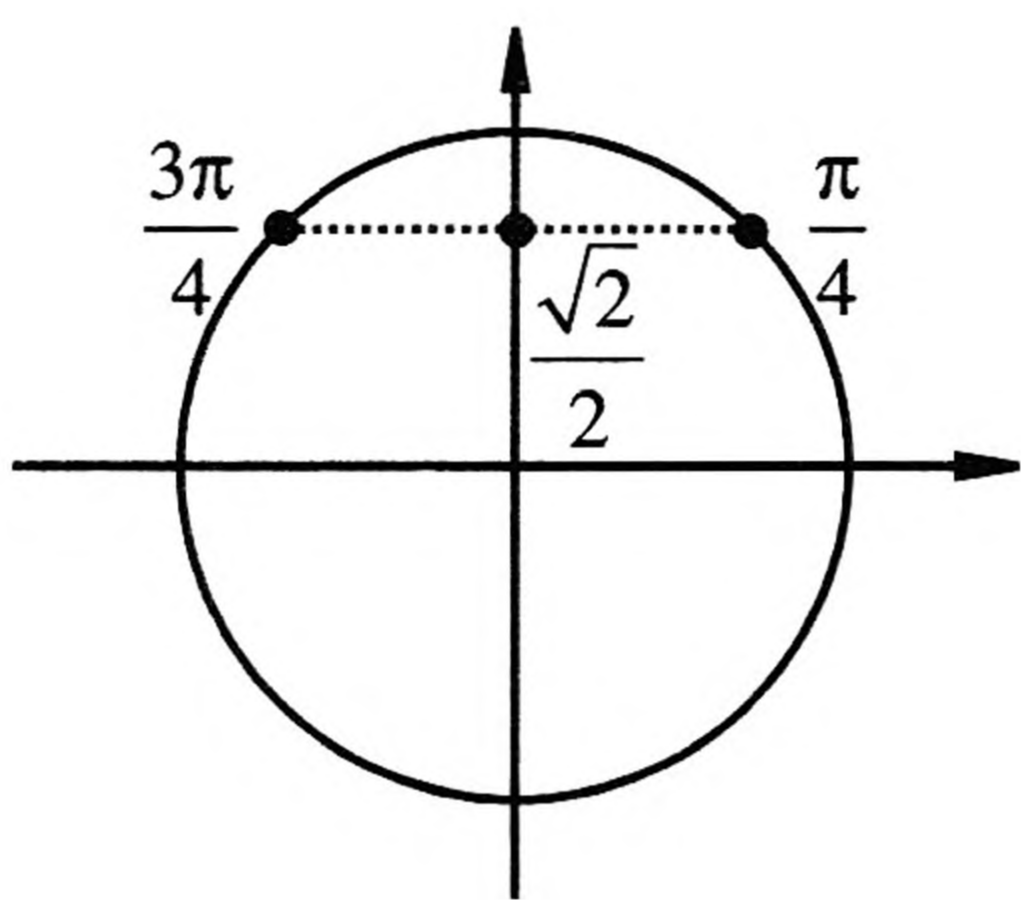
$$x = (-1)^{2n+1}\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Это вторая серия x_2.

Обратим внимание, что в качестве множителя при $(-1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\frac{\pi}{6}$.

Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

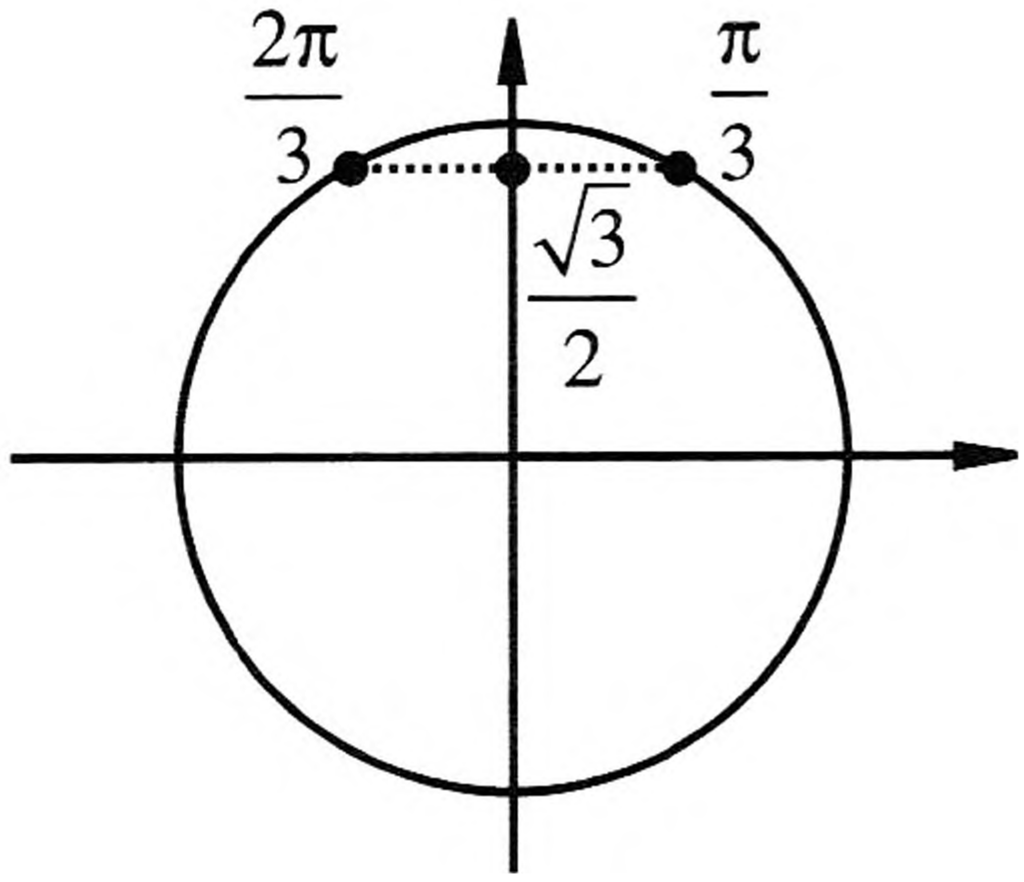
14. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in Z. \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z.$$

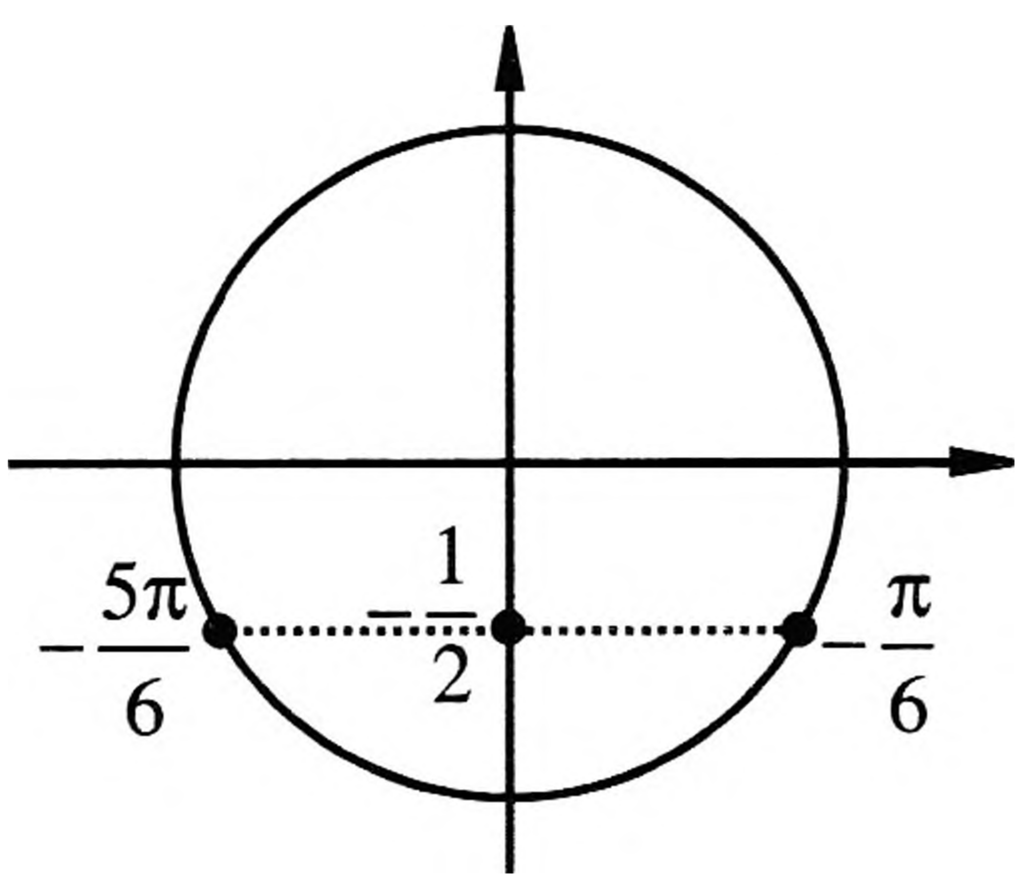
15. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z.$$

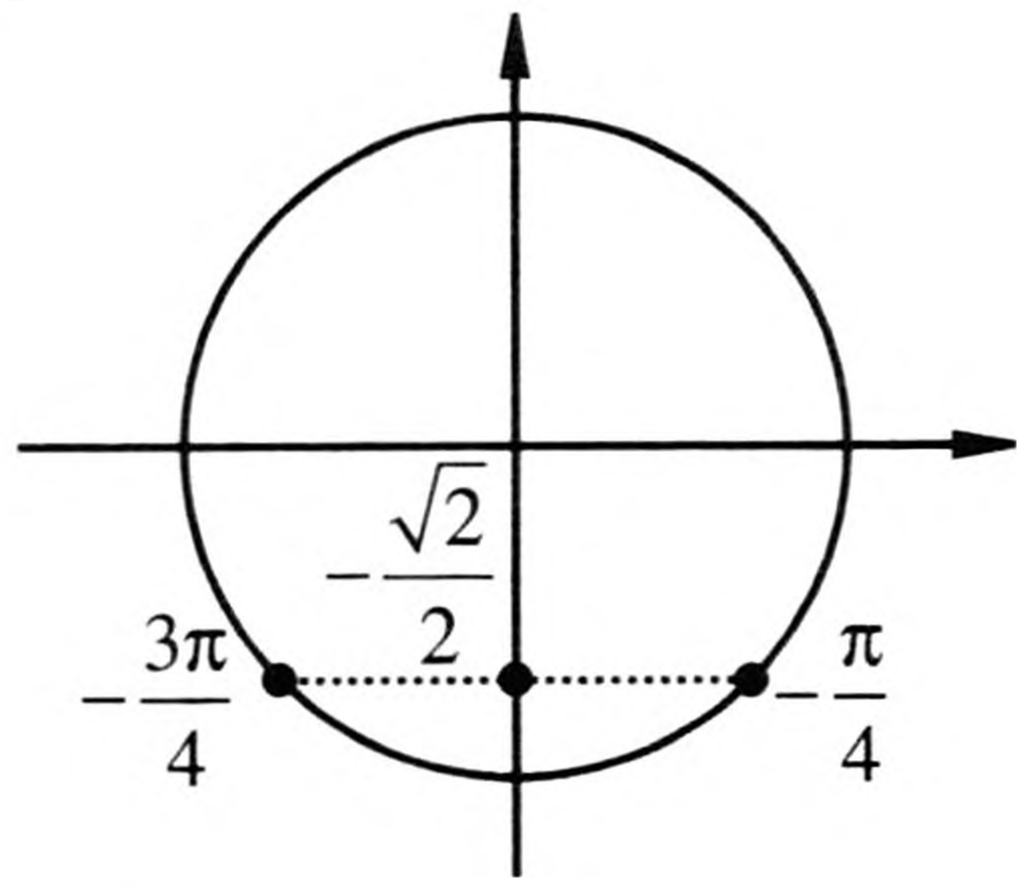
16. $\sin x = -\frac{1}{2}$.



$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z.$$

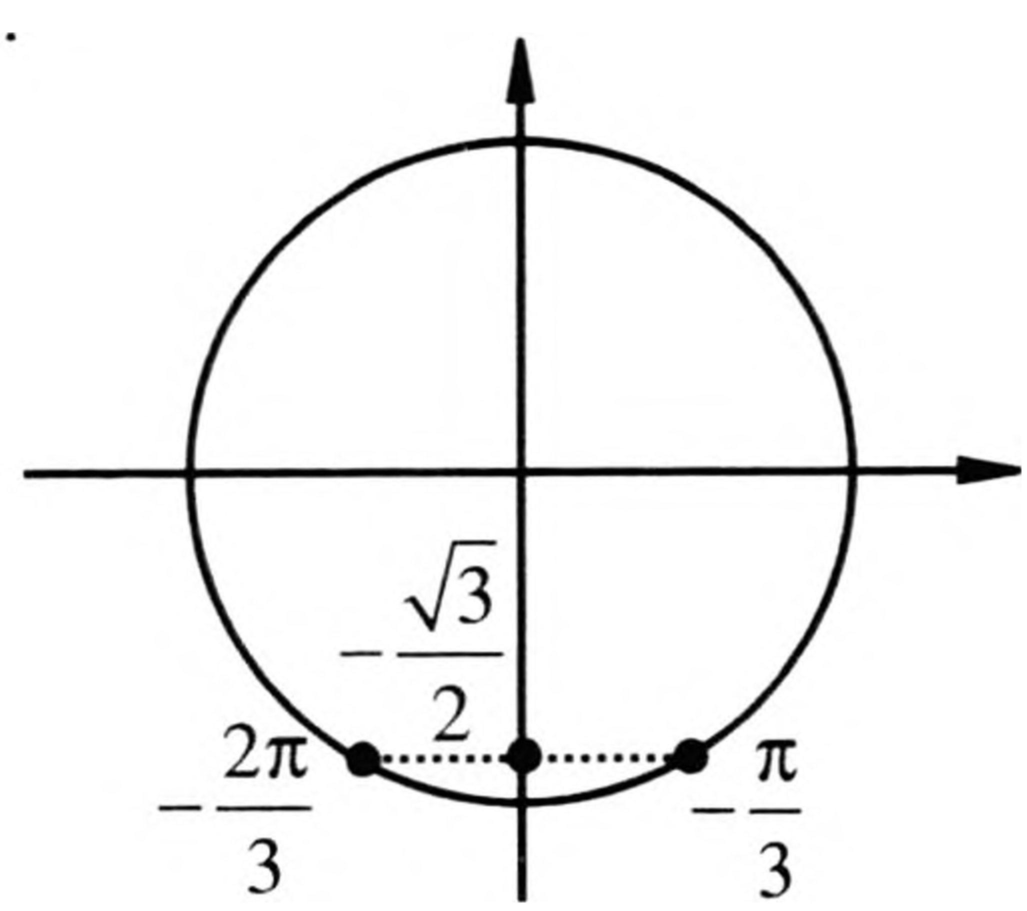
17. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

18. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

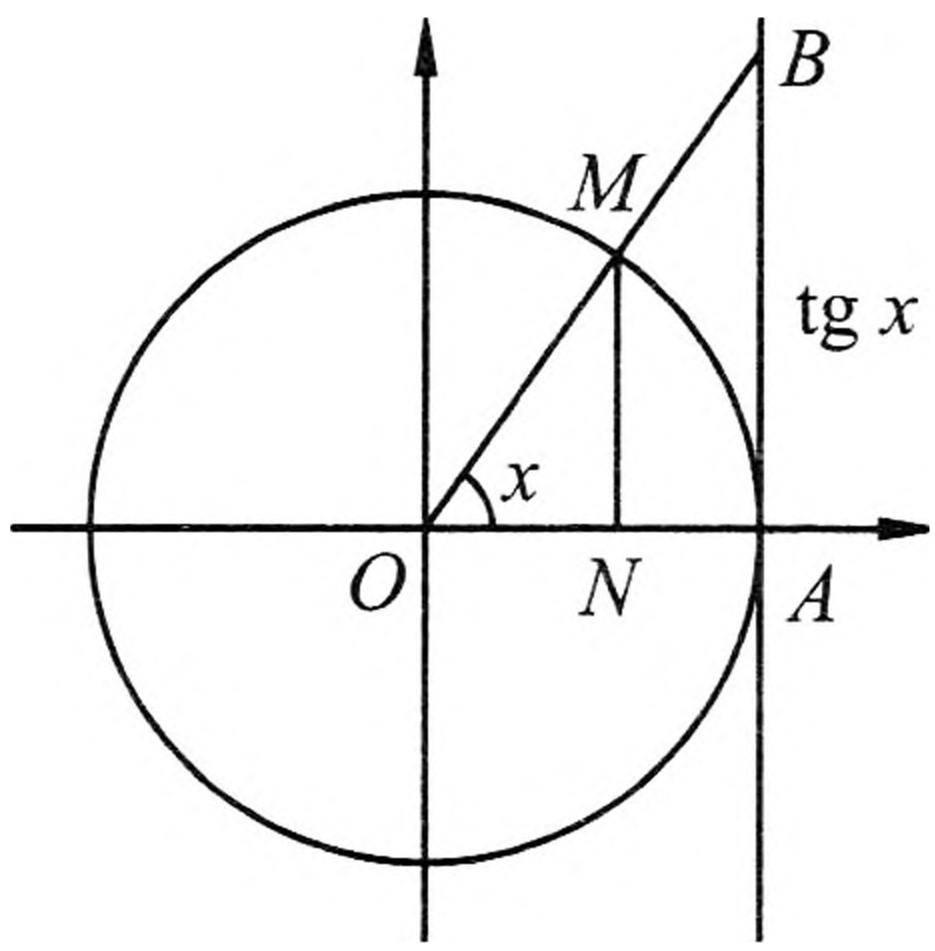


$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Линия тангенсов

Начнем с геометрической интерпретации тангенса — так называемой линии тангенсов. Это касательная AB к единичной окружности, параллельная оси ординат (см. рисунок). Точка M на единичной окружности соответствует углу x.



Из подобия треугольников OAB и ONM имеем:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{ON}.$$

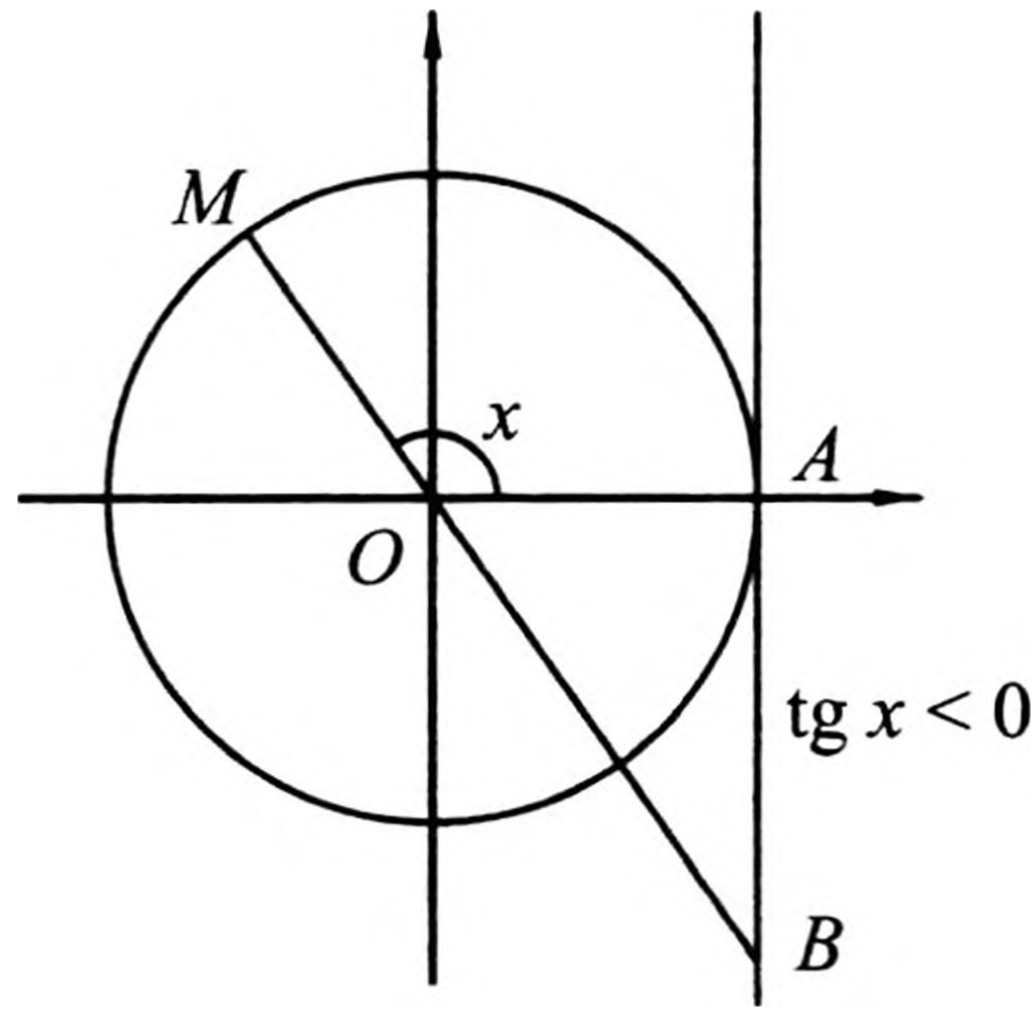
Но $OA = 1$, $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, поэтому

$$AB = \operatorname{tg} x.$$

Мы рассмотрели случай, когда x находится в первой четверти. Аналогично рассматриваются случаи, когда x находится в остальных четвертях. В результате мы приходим к следующей геометрической интерпретации тангенса.

Тангенс угла x равен ординате точки B, которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM, соединяющей точку M с началом координат.

Вот рисунок в случае, когда x находится во второй четверти. Тангенс угла x отрицателен.

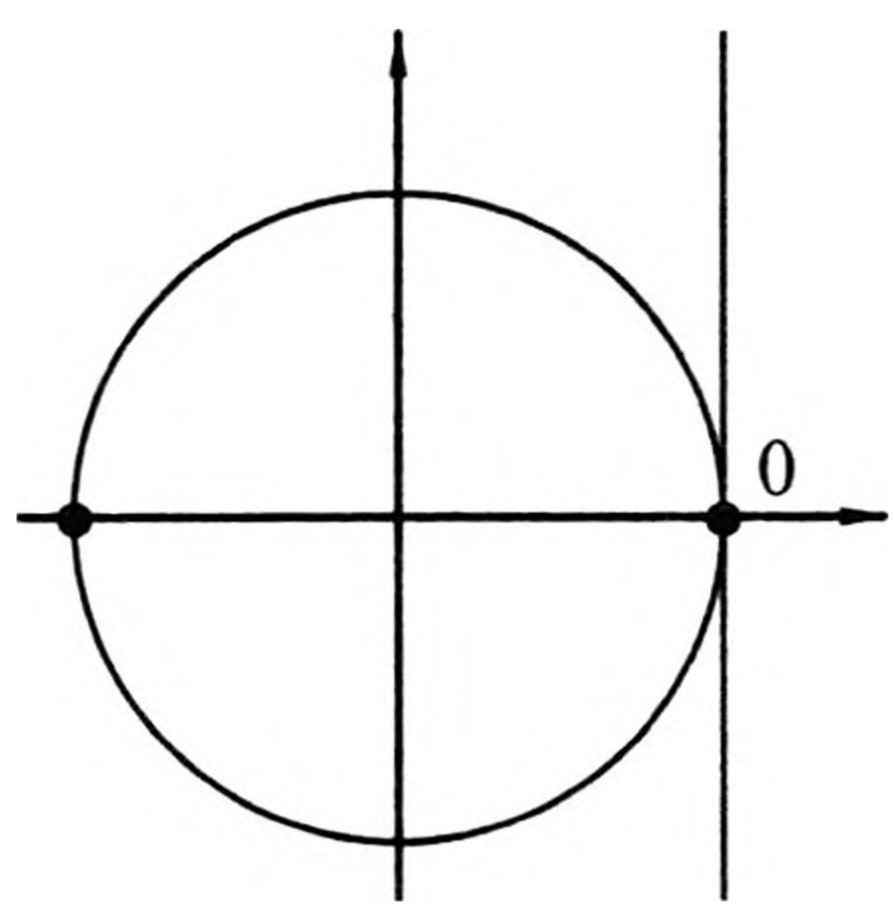


Уравнение tg $x = a$

Заметим, что тангенс может принимать любые действительные значения. Иными словами, уравнение tg $x = a$ имеет решения при любом a.

19. tg $x = 0$.

Имеем диаметральную горизонтальную пару точек:

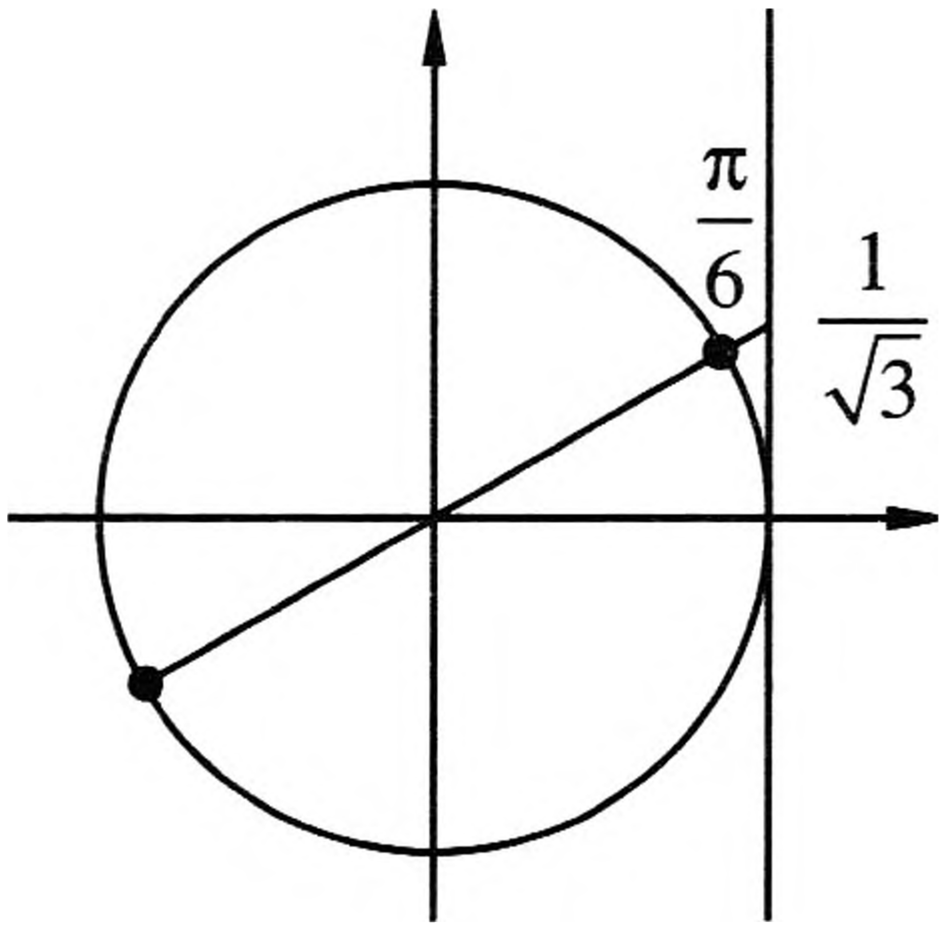


Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

$$x = \pi n,\ n \in Z.$$

20. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Имеем диаметральную пару:

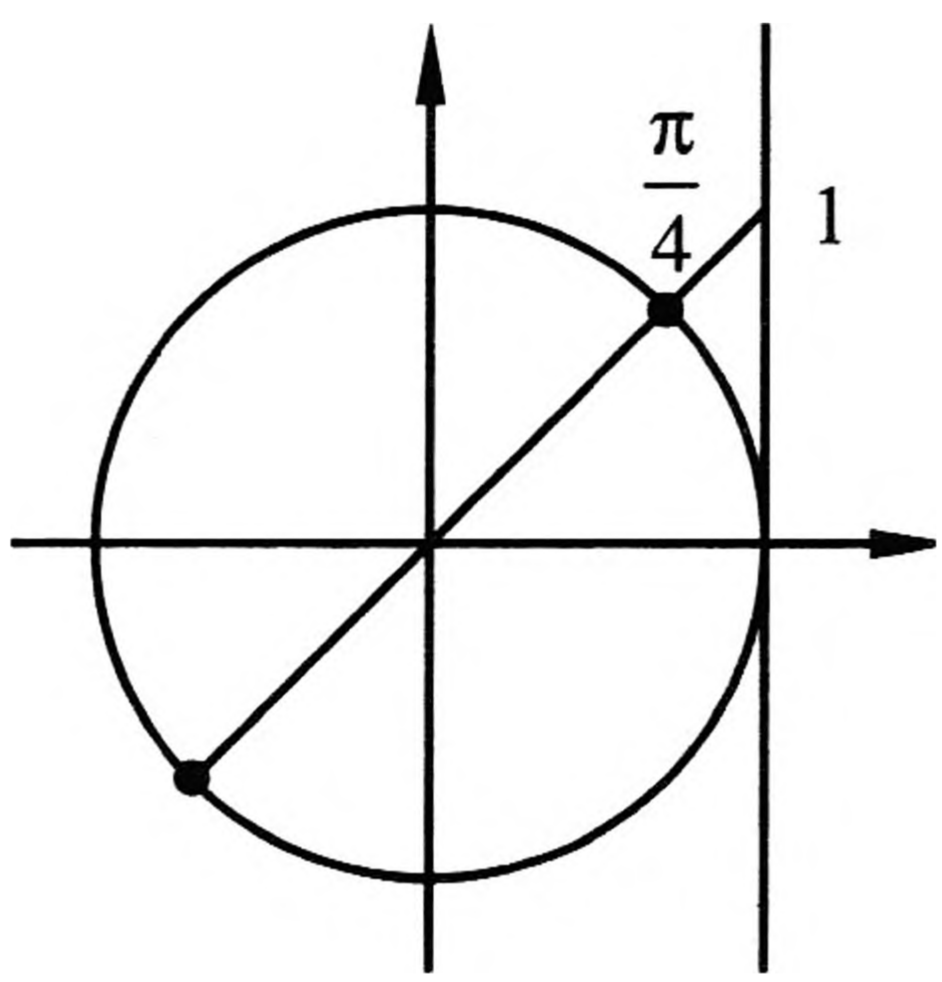


Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

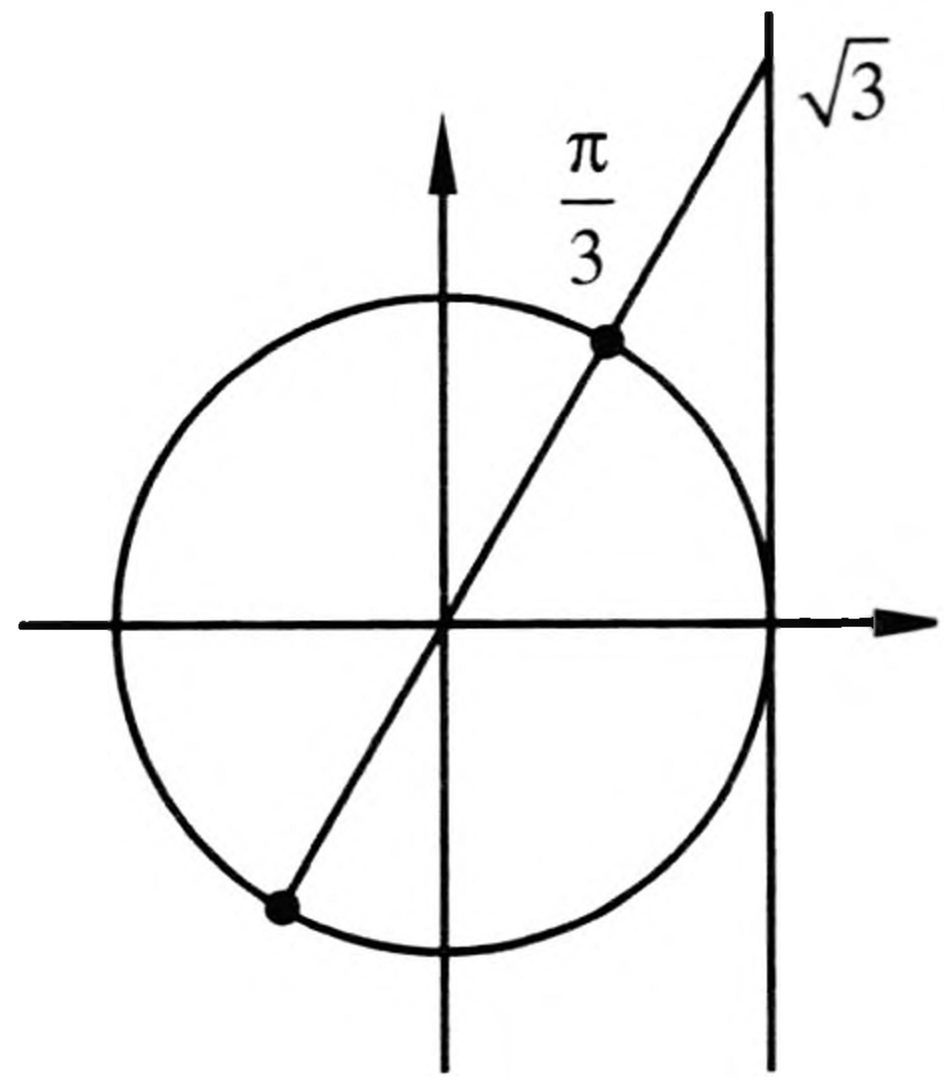
Остальные уравнения с тангенсом решаются аналогично. Мы приводим лишь рисунки и ответы.

21. $\operatorname{tg} x = 1$.



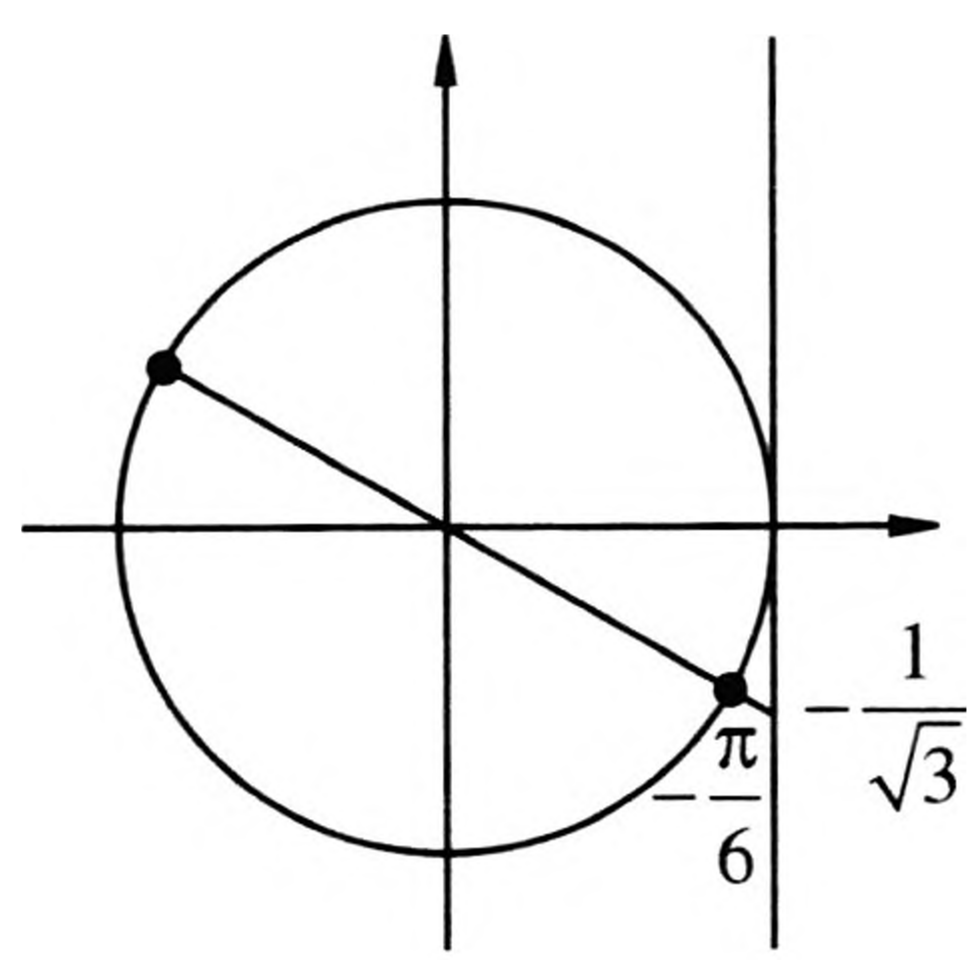
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

22. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.



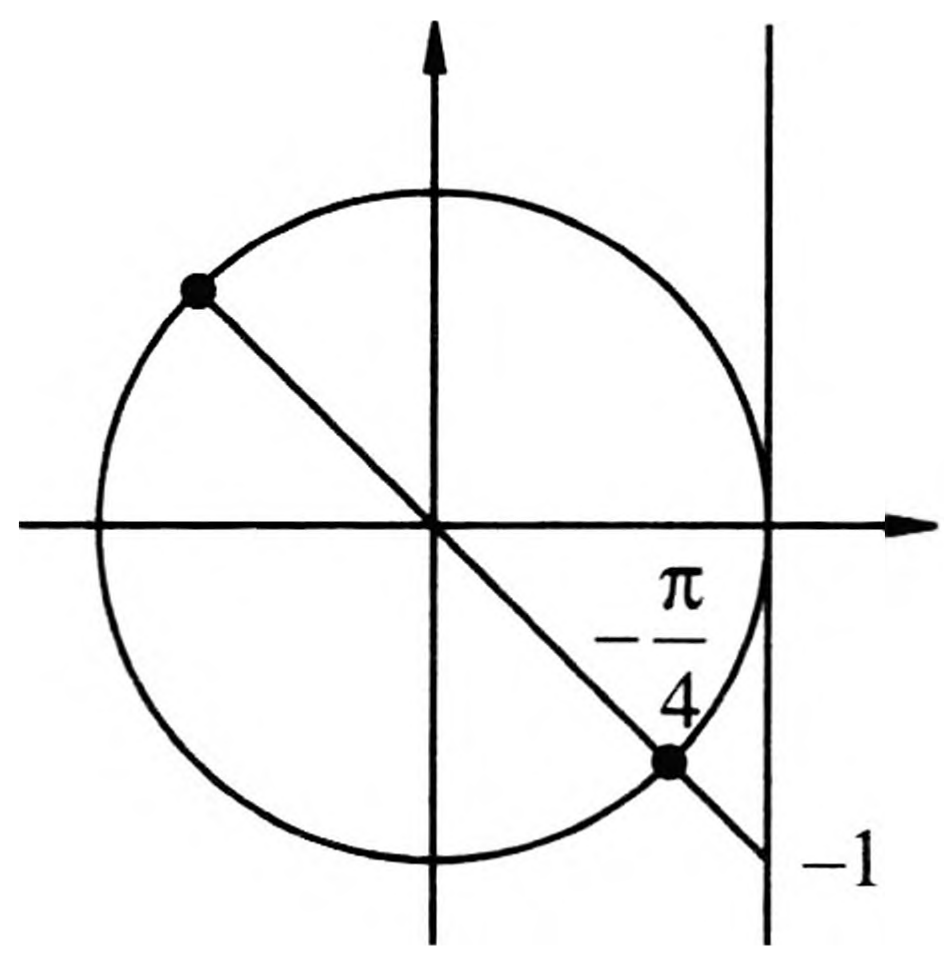
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

23. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.



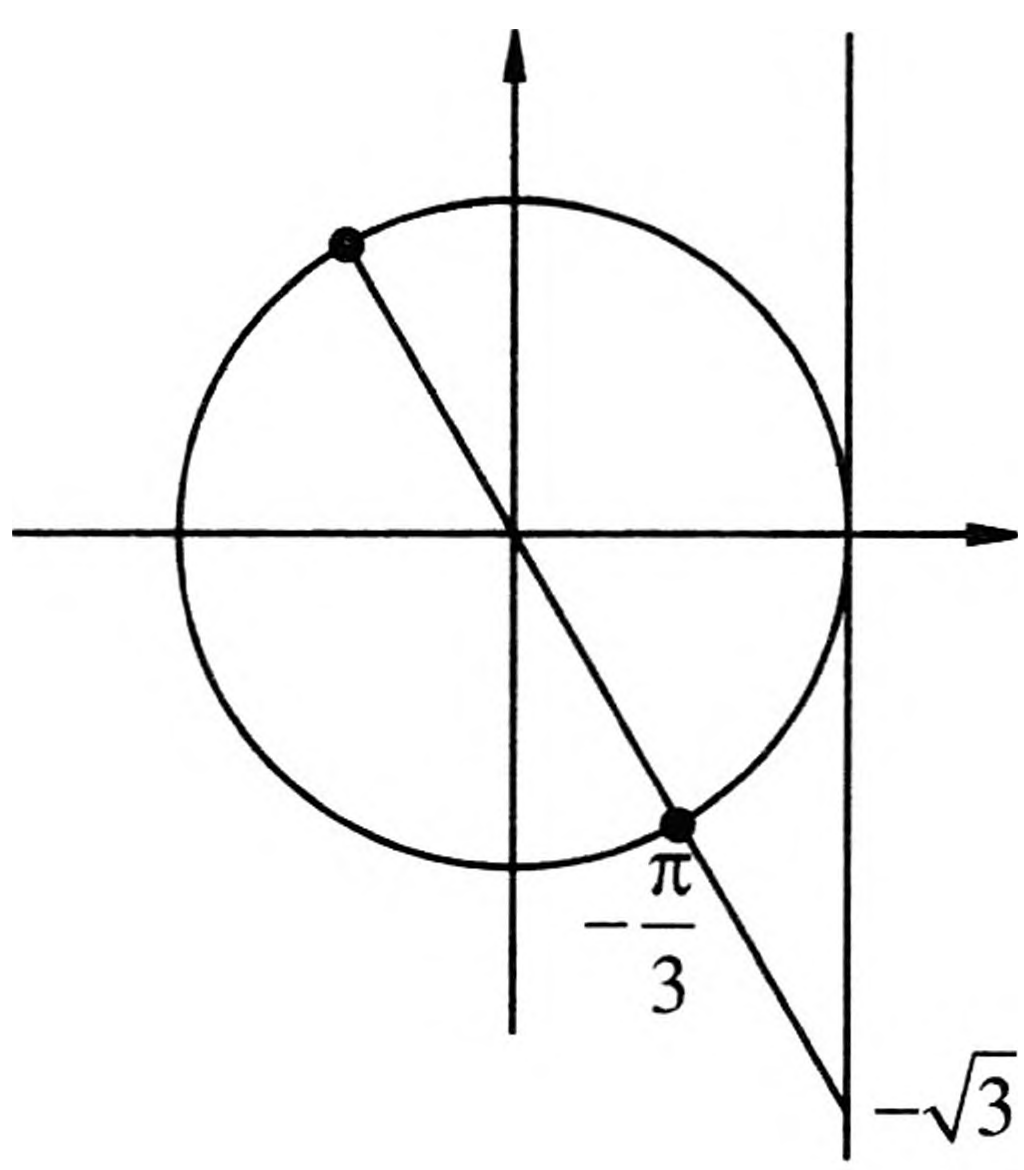
$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

24. $\operatorname{tg} x = -1$.



$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

25. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

На этом заканчиваем пока и с тангенсом.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ нет смысла рассматривать особо. Дело в том, что:

- уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ равносильно уравнению $\cos x = 0$;
- при $a \neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Впрочем, существует также и линия котангенсов — прямая, проходящая через точку (0; 1) параллельно оси OX.

Итак, мы разобрали простейшие тригонометрические уравнения, содержащие в правой части табличные значения тригонометрических функций. Именно такие задачи встречаются в первой части вариантов ЕГЭ.

А что делать, например, с уравнением $\sin x = \frac{1}{3}$? Для этого надо сначала познакомиться с обратными тригонометрическими функциями. О них мы вам и расскажем.

Обратные тригонометрические функции и решение уравнений

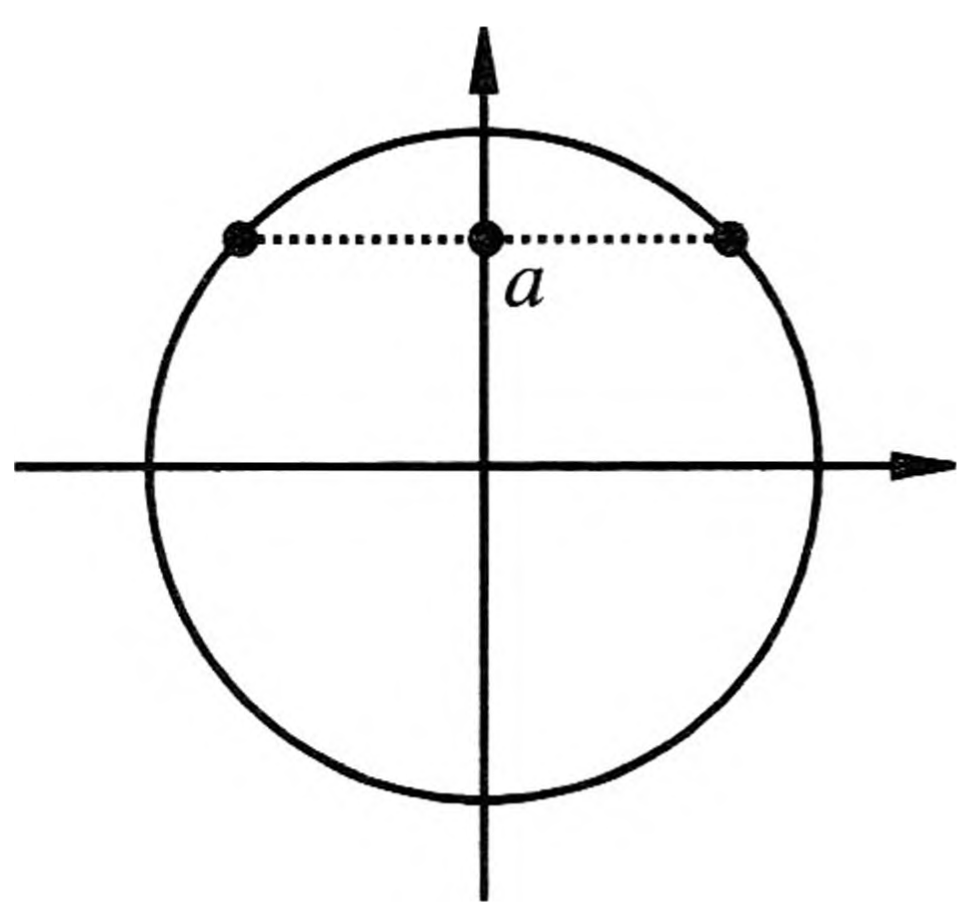
Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым.

Как же записываются решения простейших тригонометрических уравнений, если в правой части стоит произвольное число a?

Уравнение $\sin x = a$

Уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при условии $|a| \leq 1$.

Случай $a = \pm 1$ мы уже разобрали. При $|a| < 1$ решения уравнения $\sin x = a$ изображаются горизонтальной парой точек тригонометрического круга, имеющих ординату a.



Осталось записать эти решения.

Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен числу a. Проблема, однако, в том, что таких углов бесконечно много — функция не получается. (Если последняя фраза для вас не ясна, вернитесь к теме «Что такое функция?»)

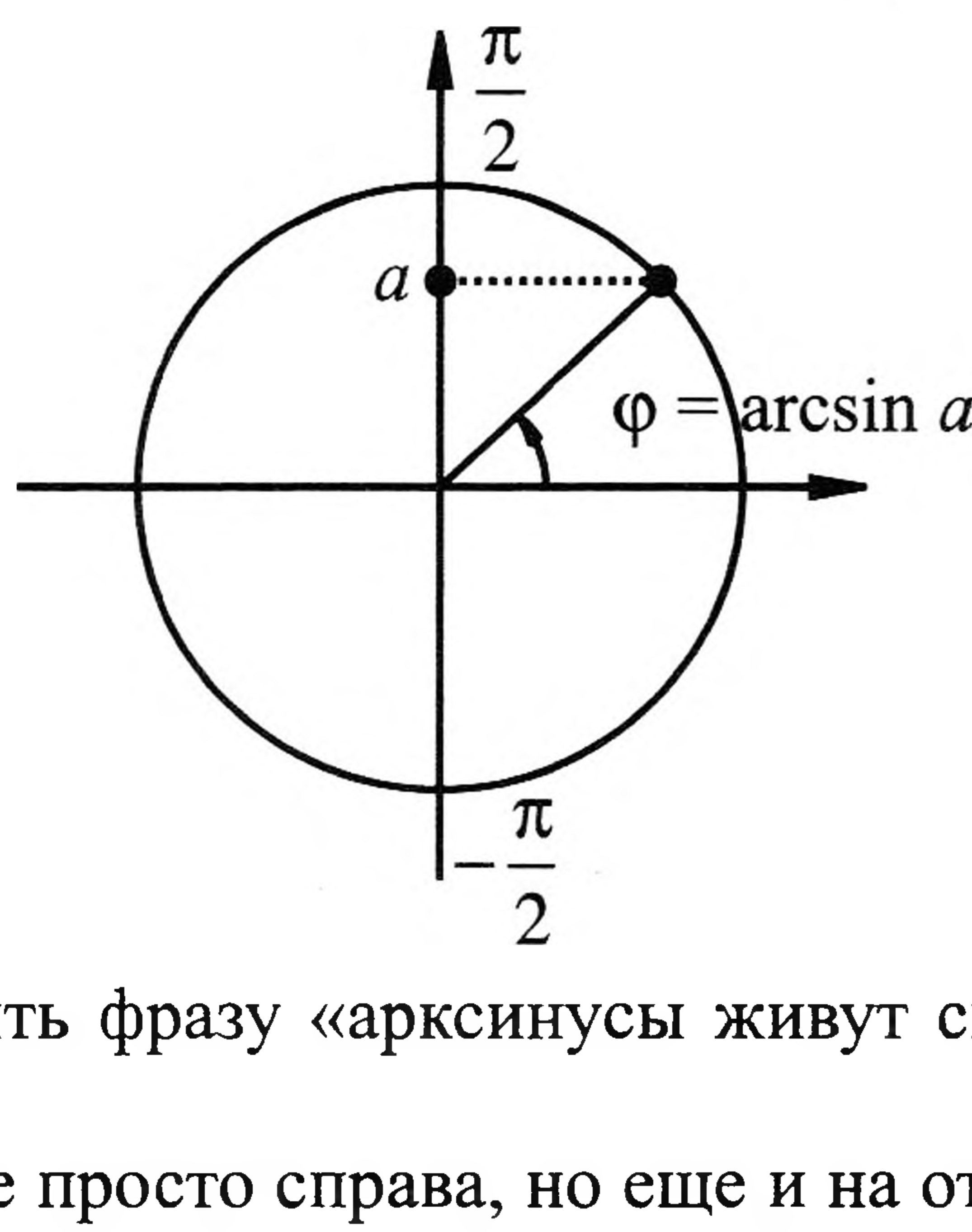
Чтобы такая функция существовала, нужно ограничиться определенным промежутком углов, на котором каждое значение синуса принимается только один раз. Самый удобный выбор — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Взгляните на тригонометрический круг и убедитесь сами: любому значению синуса из промежутка $[-1;\ 1]$ отвечает одно-единственное значение угла на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Вот теперь наше соответствие, сопоставляющее числу $a \in [-1;\ 1]$ число $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $\sin\varphi = a$, становится функцией. Эта функция носит красивое название — арксинус.

***Арксинусом* числа *a* называется число $\boldsymbol{\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$, такое, что $\boldsymbol{\sin\varphi = a}$.**

Обозначение: $\varphi = \arcsin a$. Область определения арксинуса — отрезок $[-1;\ 1]$. Область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



Можно запомнить фразу «арксинусы живут справа». Не забывайте только, что не просто справа, но еще и на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Например:

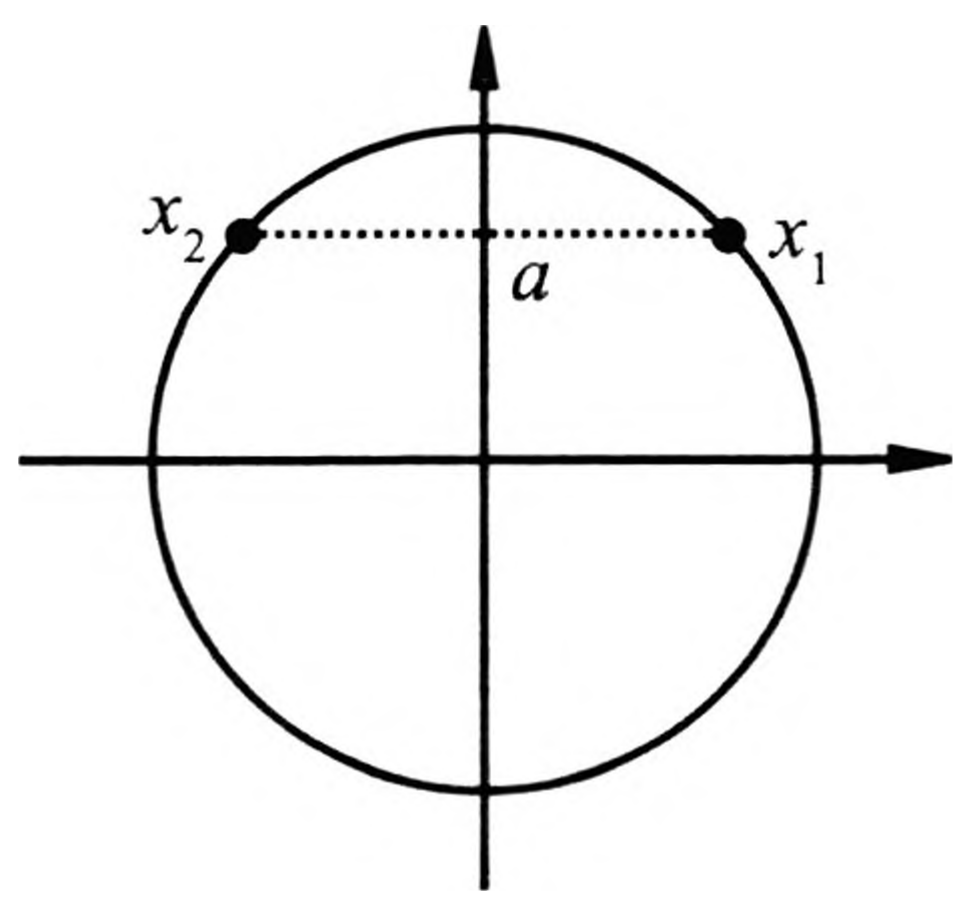
$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}, \text{ так как } \frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\pi}{3}, \text{ так как } -\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\ \arcsin 0=0;\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2};\ \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

Обратите внимание, что $\arcsin(-a)=-\arcsin a$. Иными словами, арксинус является нечетной функцией.

Теперь мы готовы вернуться к уравнению $\sin x=a$. Снова изобразим горизонтальную пару точек с ординатой a. Углы, отвечающие правой точке, обозначим x_1. Углы, отвечающие левой точке, обозначим x_2.



Не составляет труда записать эти углы:

$$x_1=\arcsin a+2\pi n,\ n\in Z;$$
$$x_2=\pi-\arcsin a+2\pi n,\ n\in Z.$$

Собственно, это и есть ответ. При желании можно объединить обе формулы в одну — с помощью конструкции, известной вам из предыдущей статьи:

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.$$

При записи ответа в случае отрицательного a можно использовать нечетность арксинуса.

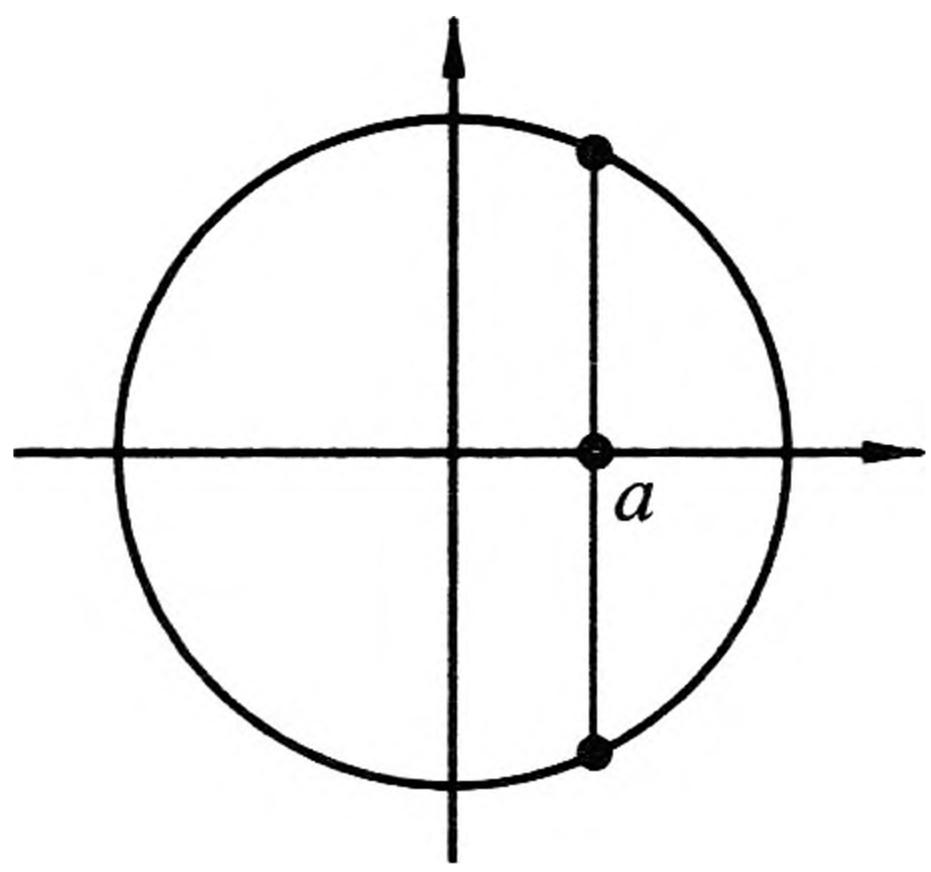
Например, для уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$ имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k = x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Уравнение $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$ также имеет решения лишь при $|a| \leq 1$. Случай $a = \pm 1$ рассмотрен в предыдущей статье.

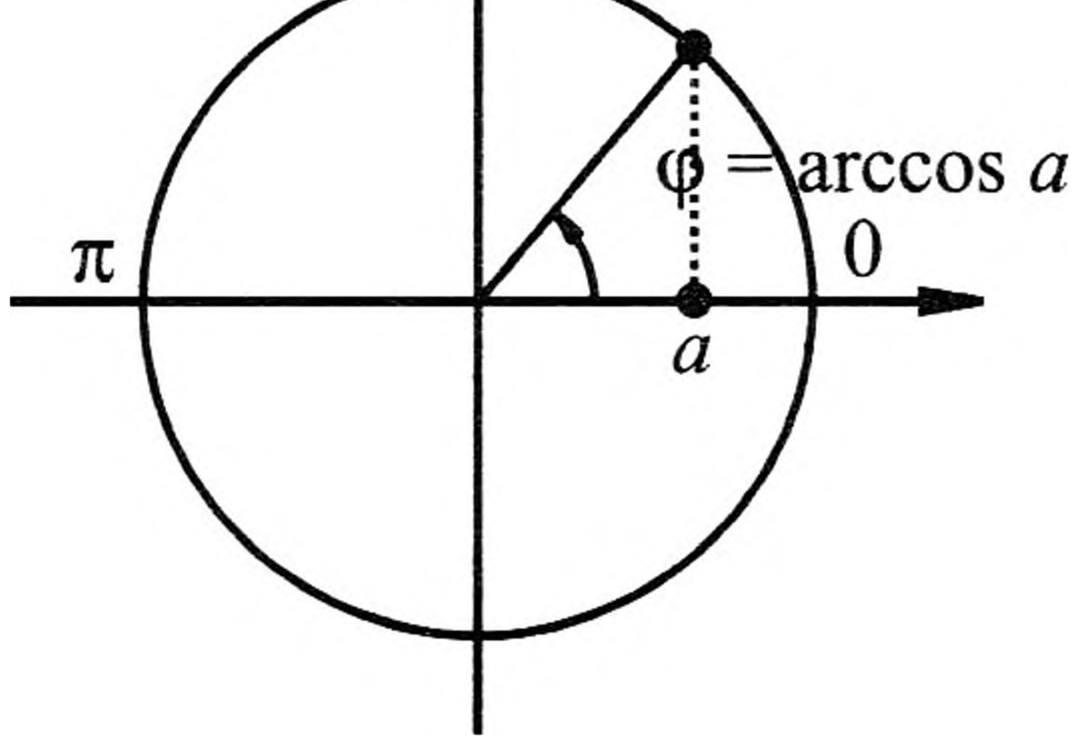
Решения уравнения $\cos x = a$ при $|a| < 1$ изображаются вертикальной парой точек с абсциссой a:



Как вы уже догадались, сейчас возникнет новая функция — арккосинус. Кто лучший кандидат в арккосинусы — верхняя или нижняя точка? Принципиальной разницы нет, но люди выбрали верхнюю. «Арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке $[0; \pi]$.

***Арккосинусом* числа а называется число $\varphi \in [0; \pi]$, такое, что $\cos \varphi = a$.**

Обозначение: $\varphi = \arccos a$. Область определения арккосинуса — отрезок $[-1; 1]$. Область значений — отрезок $[0; \pi]$.



Промежуток $[0; \pi]$ выбран потому, что на нем каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1, соответствует одно-единственное значение угла из промежутка $[0; \pi]$.

Например:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6}\in[0;\pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \frac{3\pi}{4}\in[0;\pi] \text{ и } \cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

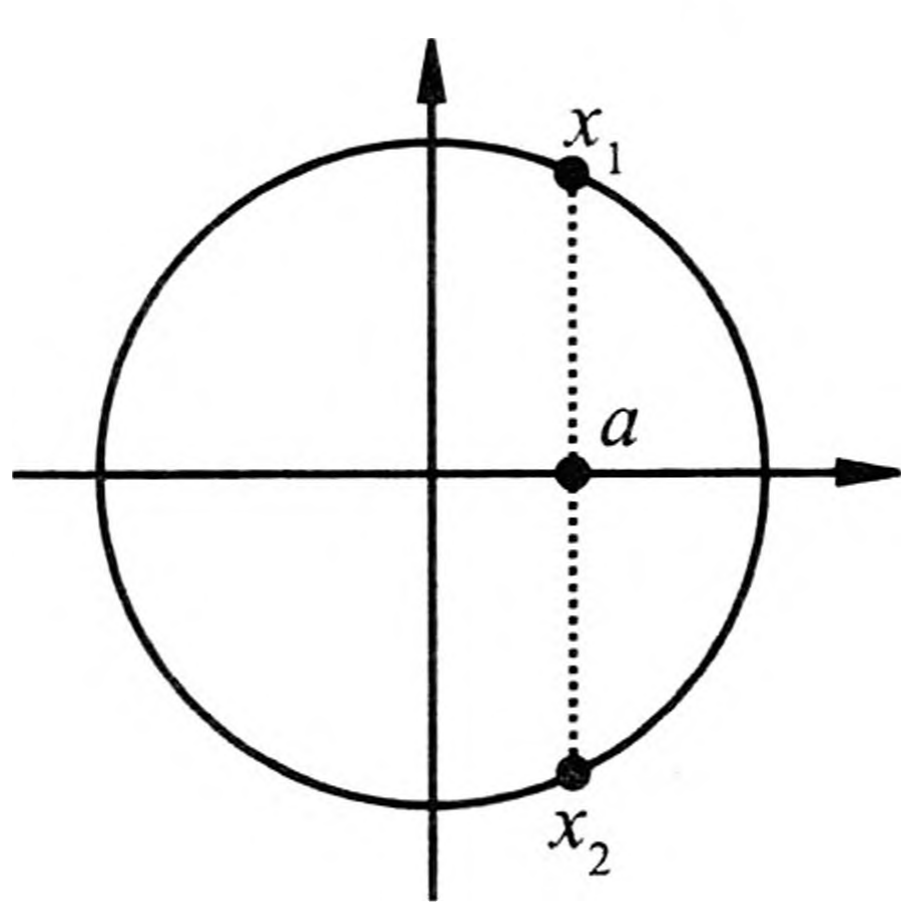
$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}; \ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}; \ \arccos 1=0; \ \arccos(-1)=\pi.$$

Внимание! Арккосинус не является ни четной, ни нечетной функцией. Имеет место следующее очевидное соотношение: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Теперь мы можем решить уравнение $\cos x = a$ для произвольного a, удовлетворяющего неравенству $|a| < 1$.

Снова отметим на окружности вертикальную пару точек с абсциссой a. Углы, отвечающие верхней точке, обозначим x_1. Углы, отвечающие нижней точке, обозначим x_2.



Легко написать формулы для этих углов:

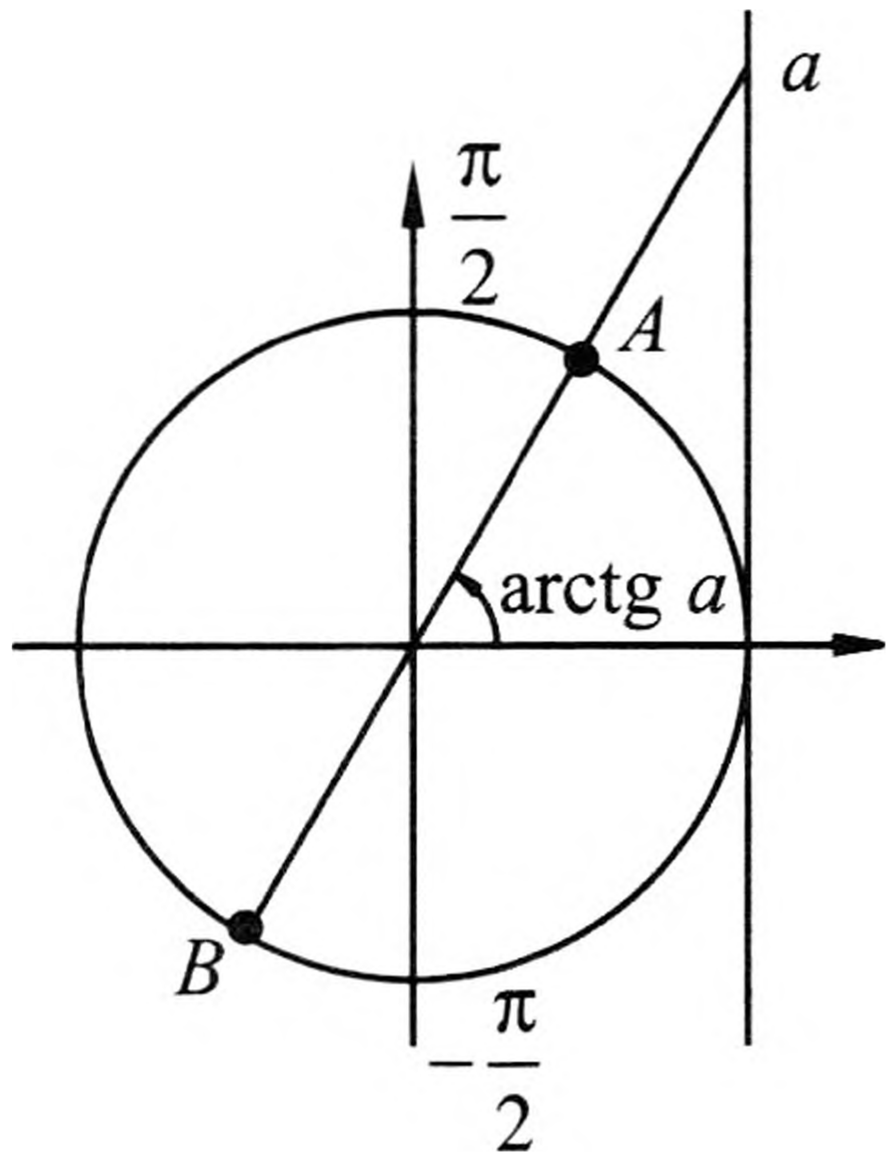
$$x_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$x_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Объединяем их в одну формулу и записываем ответ:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Уравнения $\mathbf{tg}\,x = a$ и $\mathbf{ctg}\,x = a$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом a. Эти решения изображаются диаметральной парой точек:



Как и в случае арксинуса, роль арктангенса отведена правой точке. Точнее: ***арктангенсом*** **числа a называется число** $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, **такое, что** $\operatorname{tg}\varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \operatorname{arctg} a$. Область определения арктангенса — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Область значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

На нашем рисунке $\operatorname{arctg} a$ является одним из углов, соответствующих точке A.

А почему в определении арктангенса исключены концы промежутка — точки $\pm\frac{\pi}{2}$? Дело в том, что тангенс в этих точках не определен. Не существует числа a, равного тангенсу какого-либо из этих углов.

Записать решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ совсем просто. Вспоминаем второе полезное наблюдение из предыдущей статьи (как описывать диаметральную пару) и пишем ответ:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Тем самым мы фактически разобрались и с уравнением $\operatorname{ctg} x = a$ при $a \neq 0$. В этом случае оно равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$, и можно сразу записать ответ:

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \pi n,\ n \in Z.$$

Но можно использовать и арккотангенс. Такая функция тоже существует, и вот ее определение.

Арккотангенсом **числа а называется число $\varphi \in (0; \pi)$, такое, что $\operatorname{ctg} \varphi = a$.**

Тогда решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ при любом a имеют вид:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Подведем итог. Соберем формулы для решений простейших тригонометрических уравнений в небольшую таблицу.

Уравнение	Решения
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Обратите внимание, что все частные случаи типа $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, $\operatorname{tg} x = 0$, с которых мы начинали изучение простейших тригонометрических уравнений, тоже вписываются в эту схему. Однако стоит ли записывать, например, решение уравнения $\sin x = 0$ в виде $x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k$? Ведь можно сделать это намного проще — так, как было показано в первой статье.

Графики обратных тригонометрических функций

Начнем с построения графика функции $y = \arcsin x$.

В предыдущей главе мы дали определение арксинуса. Согласно этому определению, запись $y = \arcsin x$ означает, что y — это такое число, что $\sin y = x$, и при этом $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Будем откладывать x по горизонтальной оси, а значение y — по вертикальной.

Поскольку $x = \sin y$, следовательно, x лежит в пределах от -1 до 1.

Значит, областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$.

Мы сказали, что у принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что областью значений функции $y = \arcsin x$ является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что график функции $y = \arcsin x$ весь помещается в области, ограниченную линиями $x = -1$; $x = 1$, $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

Как всегда при построении графика незнакомой нам функции, начнем с заполнения таблицы.

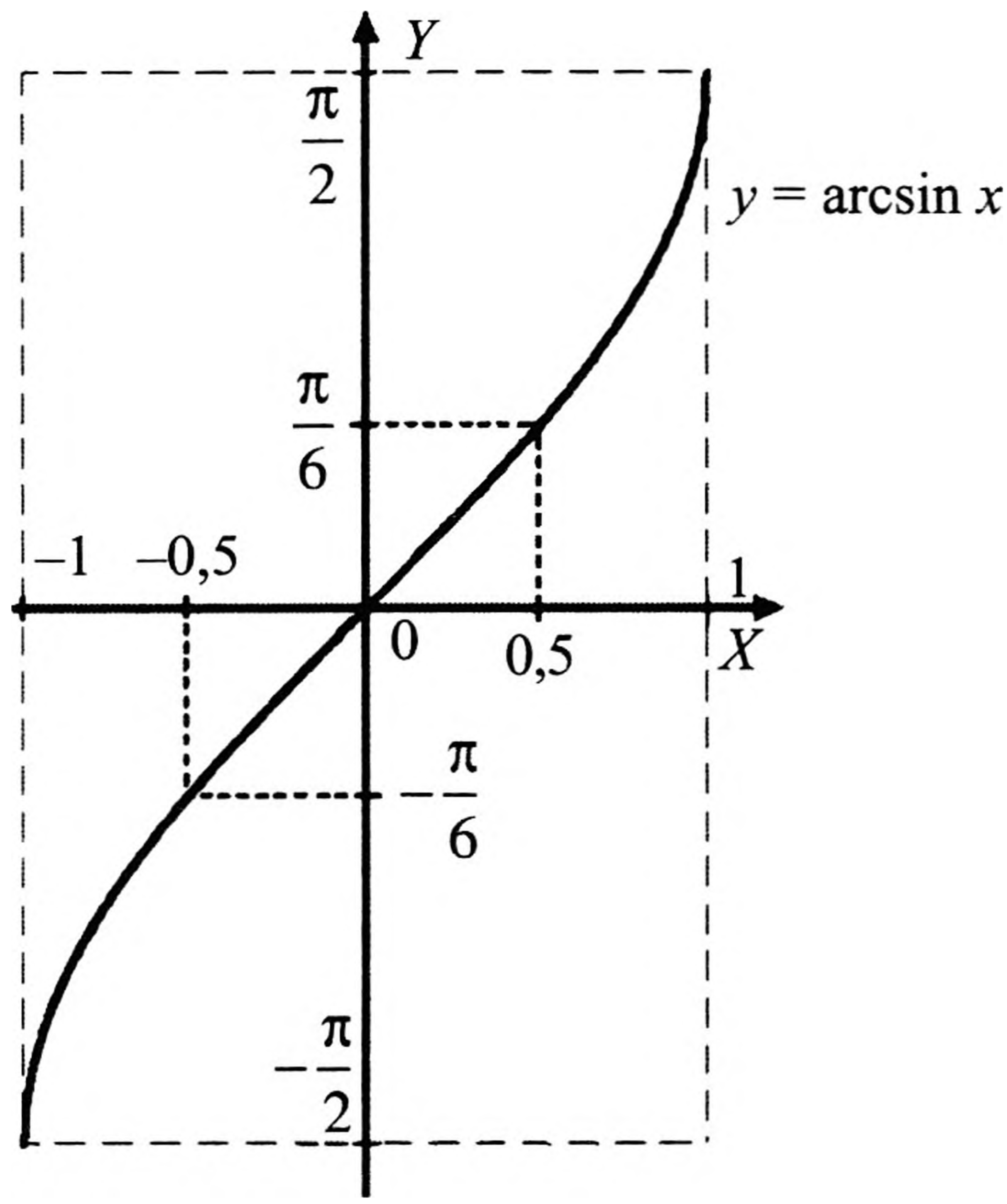
По определению, арксинус нуля — это такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен нулю. Что это за число? — Понятно, что это ноль.

Аналогично, арксинус единицы — это такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен единице. Очевидно, это $\frac{\pi}{2}$.

Продолжаем: $\arcsin\frac{1}{2}$ — это такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{1}{2}$. Да, это $\frac{\pi}{6}$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

Теперь мы готовы построить график функции $y = \arcsin x$.



Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения $D(y)$: $x \in [-1; 1]$

2. Область значений $E(y)$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, то есть эта функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает. Ее наименьшее значение, равное $-\frac{\pi}{2}$, достигается при $x = -1$, а наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{2}$, при $x = 1$.

5. Что общего у графиков функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$? Не кажется ли вам, что они «сделаны по одному шаблону» — так же, как правая ветвь функции $y = x^2$ и график функции $y = \sqrt{x}$, или как графики показательной и логарифмической функций?

Представьте себе, что мы из обычной синусоиды вырезали небольшой фрагмент от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а затем развернули его вертикально, — и мы получим график арксинуса.

То, что для функции $y = \sin x$ на этом промежутке — значения аргумента, то для арксинуса будут значения функции. Так и должно быть! Ведь синус и арксинус — взаимно обратные функции. Другие примеры пар взаимно обратных функций — это $y = x^2$ при $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$, а также показательная и логарифмическая функции.

Напомним, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Теперь построим график функции $y = \arccos x$.

Рассуждаем аналогично. Нам нужен такой участок функции $y = \cos x$, на котором она монотонна, то есть принимает каждое свое значение ровно один раз.

Выберем отрезок $[0; \pi]$. На этом отрезке функция $y = \cos x$ монотонно убывает, то есть соответствие между множествами $[0; \pi]$ и $[-1; 1]$ взаимно однозначно. Каждому значению x соответствует свое значение y. На этом отрезке существует функция, обратная к косинусу, то есть функция $y = \arccos x$.

Заполним таблицу, пользуясь определением арккосинуса.

Согласно определению, арккосинусом числа x, принадлежащего промежутку $[-1; 1]$, будет такое число y, принадлежащее промежутку $[0; \pi]$, что $x = \cos y$.

Значит, $\arccos 1 = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$;

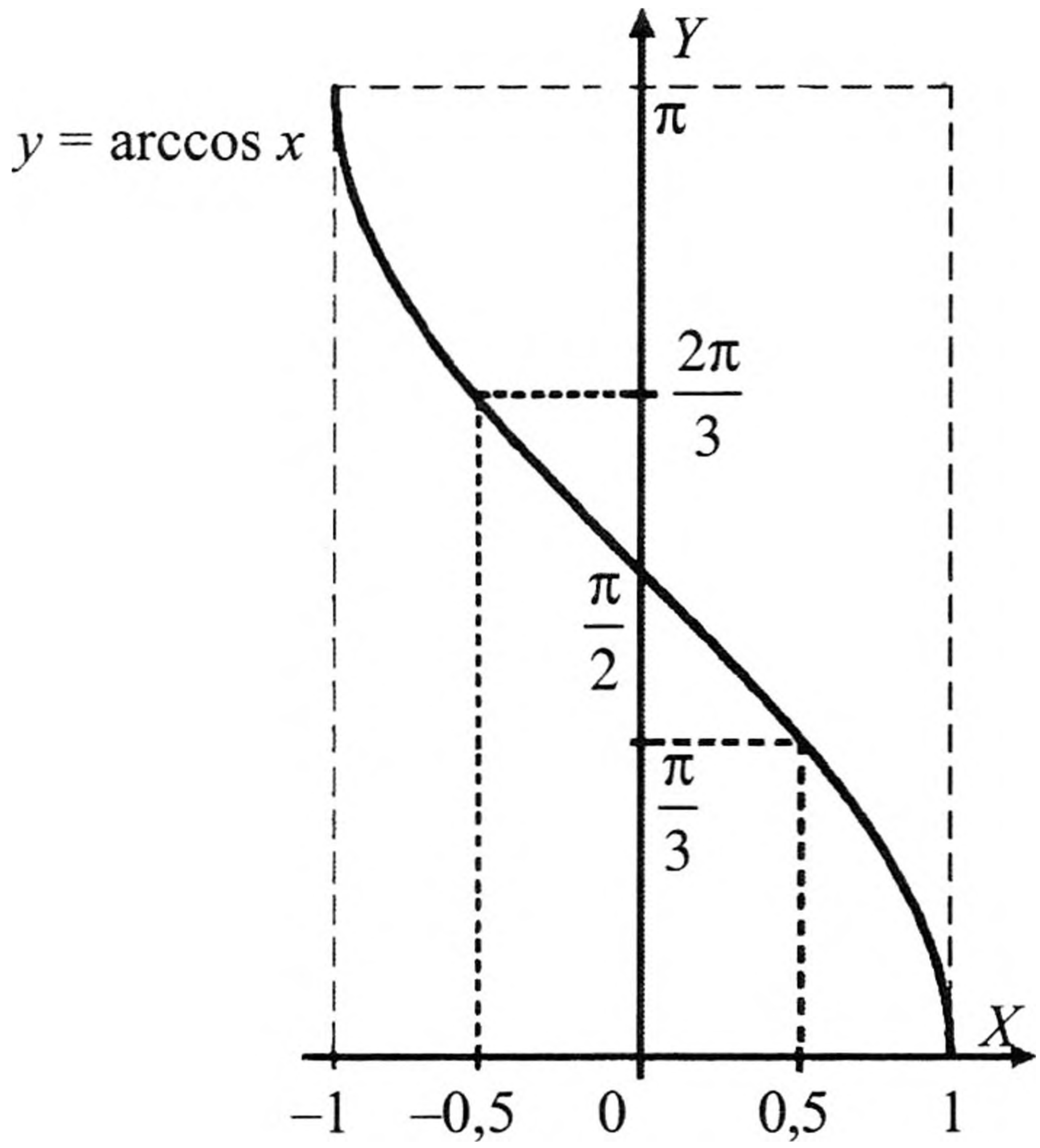
$\arccos(-1) = \pi$, так как $\cos \pi = -1$;

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, так как $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

Построим график функции $y = \arccos x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0



Свойства функции $y = \arccos x$:

1. Область определения $D(y)$: $x \in [-1; 1]$
2. Область значений $E(y)$: $y \in [0; \pi]$
3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Эта функция общего вида — она не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция является строго убывающей. Наибольшее значение, равное π, функция $y = \arccos x$ принимает при $x = -1$, а наименьшее значение, равное нулю, принимает при $x = 1$.
5. Функции $y = \cos x$ и $y = \arccos x$ являются взаимно обратными.

Построим график арктангенса. Согласно определению, арктангенсом числа x называется число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $\operatorname{tg} y = x$.

Как строить график — уже понятно. Поскольку арктангенс — функция обратная тангенсу, мы поступаем следующим образом.

Выбираем такой участок графика функции $y = \operatorname{tg} x$, где соответствие между x и y взаимно однозначное. Это участок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом участке функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда у обратной функции, то есть у функции $y = \operatorname{arctg} x$, областью определения будет вся числовая прямая, от $-\infty$ до $+\infty$, а областью значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Дальше рассуждаем так же, как при построении графиков арксинуса и арккосинуса.

$\operatorname{tg} 0 = 0$, значит, $\operatorname{arctg} 0 = 0$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, значит, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, значит, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

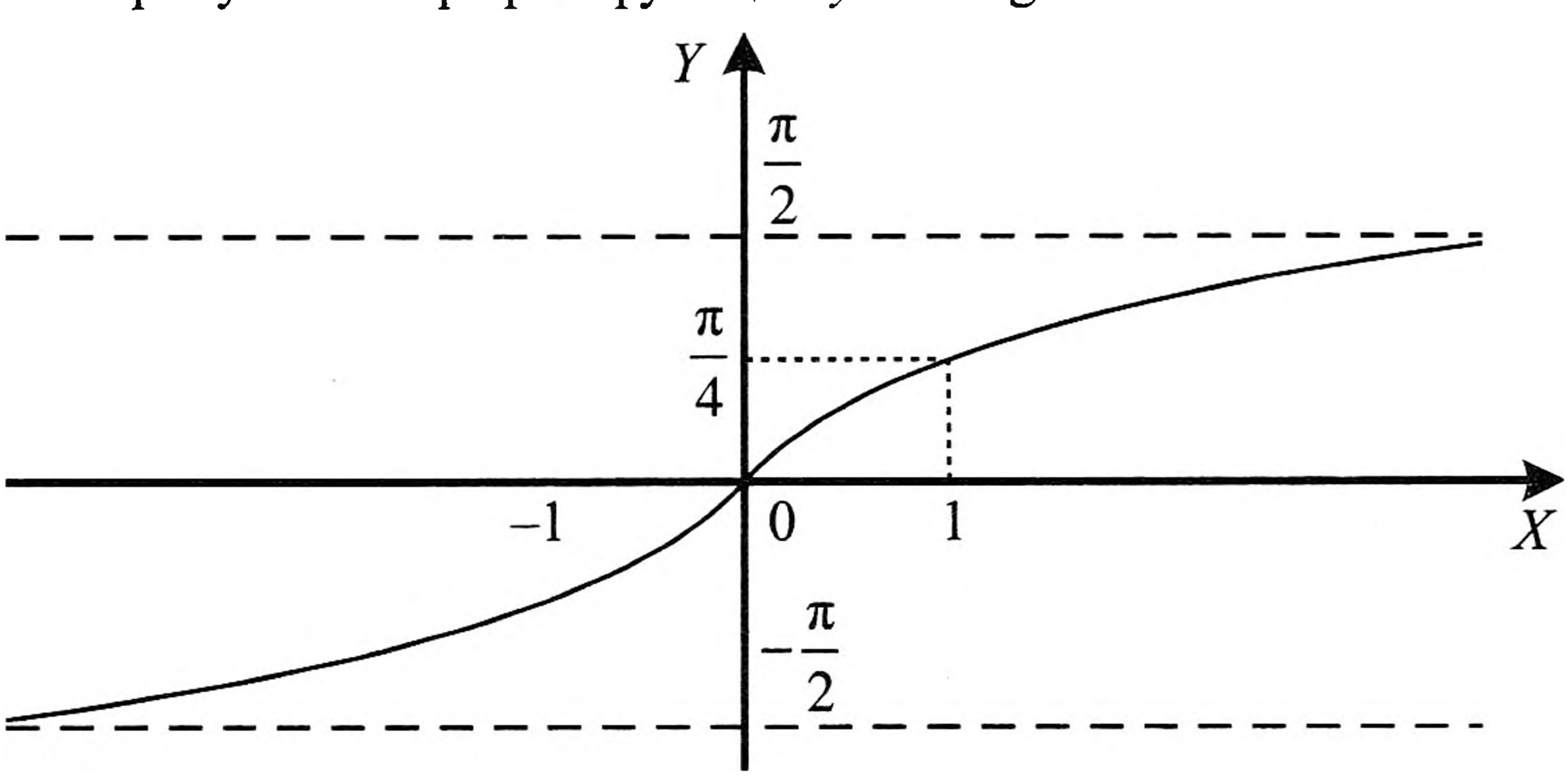
А что же будет при бесконечно больших значениях x? Другими словами, как ведет себя эта функция, если x стремится к плюс бесконечности?

Мы можем задать себе вопрос: к какому числу из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ стремится x, когда значение тангенса стремится к плюс бесконечности? Очевидно, x стремится к $\frac{\pi}{2}$.

А значит, при бесконечно больших значениях х график арктангенса приближается к горизонтальной асимптоте $y = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично, если х стремится к минус бесконечности, график арктангенса приближается к горизонтальной асимптоте $y = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке — график функции $y = \operatorname{arctg} x$

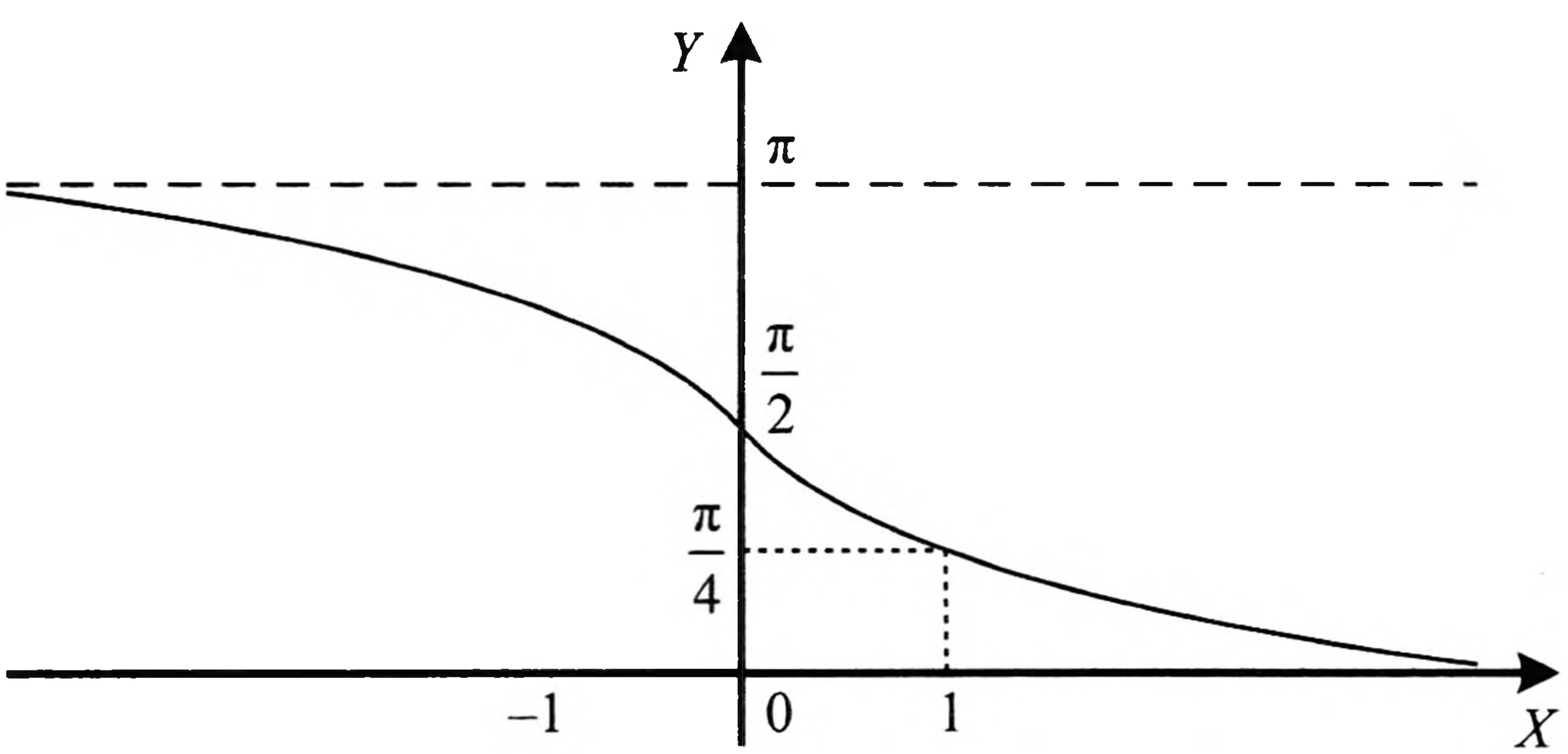


Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1. Область определения $D(y)$: $x \in \mathrm{R}$
2. Область значений $E(y)$: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная.
4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является строго возрастающей.
5. Прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ — горизонтальные асимптоты данной функции.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ являются взаимно обратными — конечно, когда функция $y = \operatorname{tg} x$ рассматривается на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Остался арккотангенс. Вот его график.



Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1. Область определения $D(y)$: $x \in \mathrm{R}$
2. Область значений $E(y)$: $y \in (0; \pi)$
3. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ — общего вида, то есть ни четная, ни нечетная.
4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является строго убывающей.
5. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ — горизонтальные асимптоты данной функции.

Функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ являются взаимно обратными, если рассматривать $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$.

Задачи с физическим содержанием по теме

1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью v_0 м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

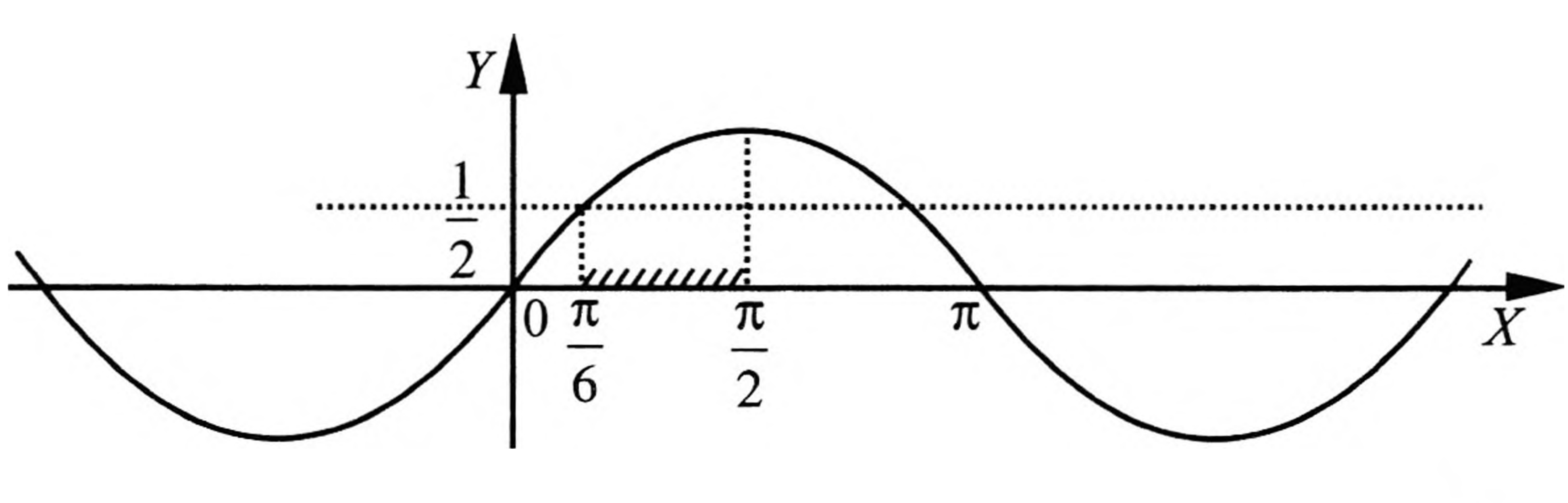
На самом деле, конечно, ускорение свободного падения не равно 10 м/с^2. Это очень грубое приближение, взятое в этой задаче для удобства расчетов.

Время полета $t \geq 3$. Подставим все данные в формулу для времени полета

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geq 3.$$

Выразим отсюда $\sin\alpha$. Получим $\sin\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.

Для того чтобы наглядно увидеть то, о чем говорится в задаче, нарисуем кусочек графика синусоиды $y = \sin x$.



Угол α — острый, значит, он принимает значения от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Поэтому $30° \leq \alpha \leq 90°$. Нам нужно наименьшее значение угла. Очевидно, что наименьшее значение при этих условиях 30°.

Ответ: 30.

2. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

Если даже вы ничего не знаете о дифракции и дифракционной решетке — не расстраивайтесь! Во-первых, еще не поздно узнать. Дифракция — интереснейшая тема из курса физики. А во-вторых, для решения этой задачи вам достаточно только знать тригонометрию.

Период решетки $d = 1600$ нм. Подставляем все данные в формулу. k — номер максимума. Так как мы внимательно прочитали условие, то знаем, что максимум у нас второй, и $k = 2$.

$$1600 \cdot \sin \varphi = 2 \cdot 400,$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2},$$

$$\varphi = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

3. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0{,}5 \sin \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

В условии сказано, что кинетическая энергия $E \geq 5 \cdot 10^{-3}$. Подставим все данные в формулу для энергии.

$$\frac{0{,}08 \cdot \sin^2 \pi t}{4 \cdot 2} \geq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Преобразуем данное выражение. Получим

$$\sin^2 \pi t \geq \frac{1}{2}.$$

Этой формулой не очень удобно пользоваться, поскольку в таком случае придется строить график $y = \sin^2\pi t$. Поэтому вспомним о формуле понижения степени

$$\sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$\frac{1-\cos 2\pi t}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Получим отсюда:

$$\cos 2\pi t \leq 0.$$

Построим график функции $y = \cos 2\pi t$, где $0 \leq t \leq 1$ (первая секунда). По горизонтальной оси возьмем время t.

При $t = 0$ $\quad y = \cos 0 = 1$.

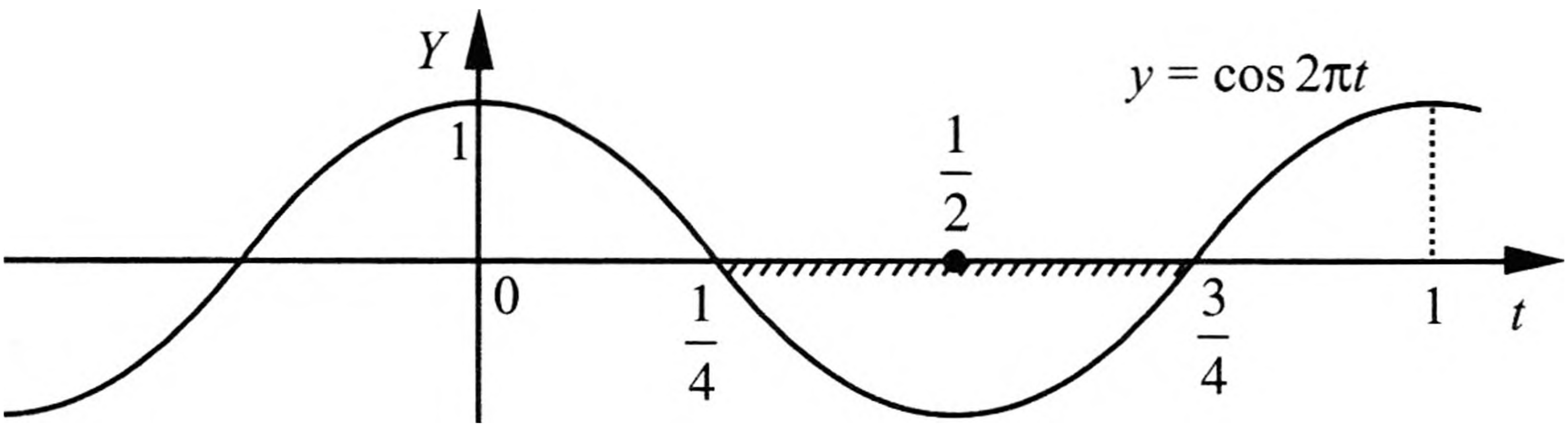
При $t = 1$ $\quad y = \cos 2\pi = 1$.

При $t = \frac{1}{2}$ $\quad y = \cos \pi = -1$.

При $t = \frac{1}{4}$ $\quad y = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

При $t = \frac{3}{4}$ $\quad y = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

Получается трансформированная косинусоида.



Нужно узнать, какую часть времени из первой секунды $\cos 2\pi t < 0$, то есть какую часть первой секунды график находится ниже оси t.

Видно, что это ровно половина времени из первой секунды (полуволна ниже оси t).

Ответ: 0,5.

Производная функции. Первообразная функции

Производная функции

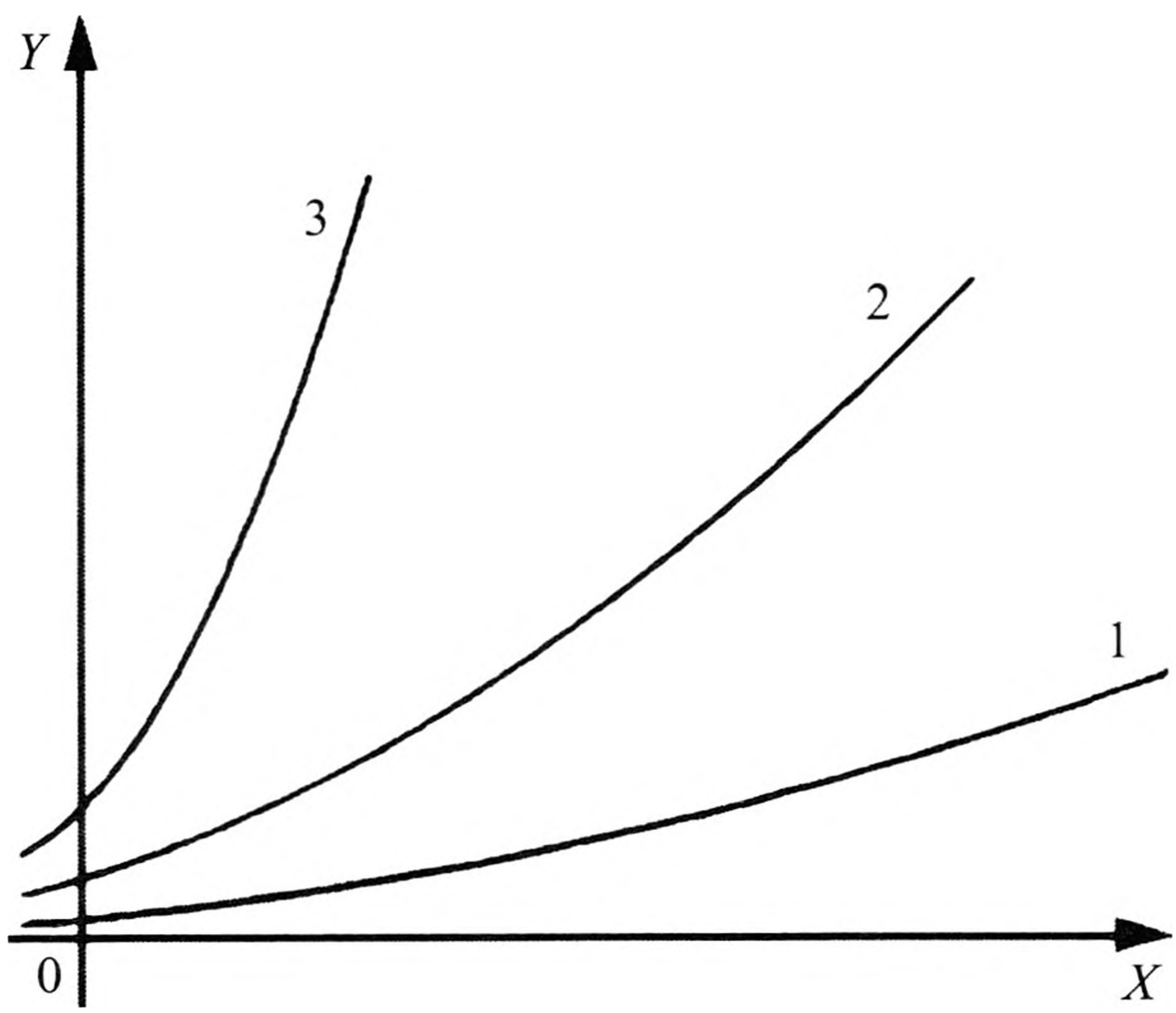
Производная функции — одна из самых сложных тем в школьной программе. Сейчас я просто и понятно расскажу о том, что такое производная и для чего она нужна. Я не буду пока стремиться к математической строгости изложения. Самое главное — понять смысл.

А для тех, кто лучше воспринимает видео, чем печатный текст, моя видеолекция на *Youtube* «Производная функции».

Запомним определение:

Производная — это скорость изменения функции.

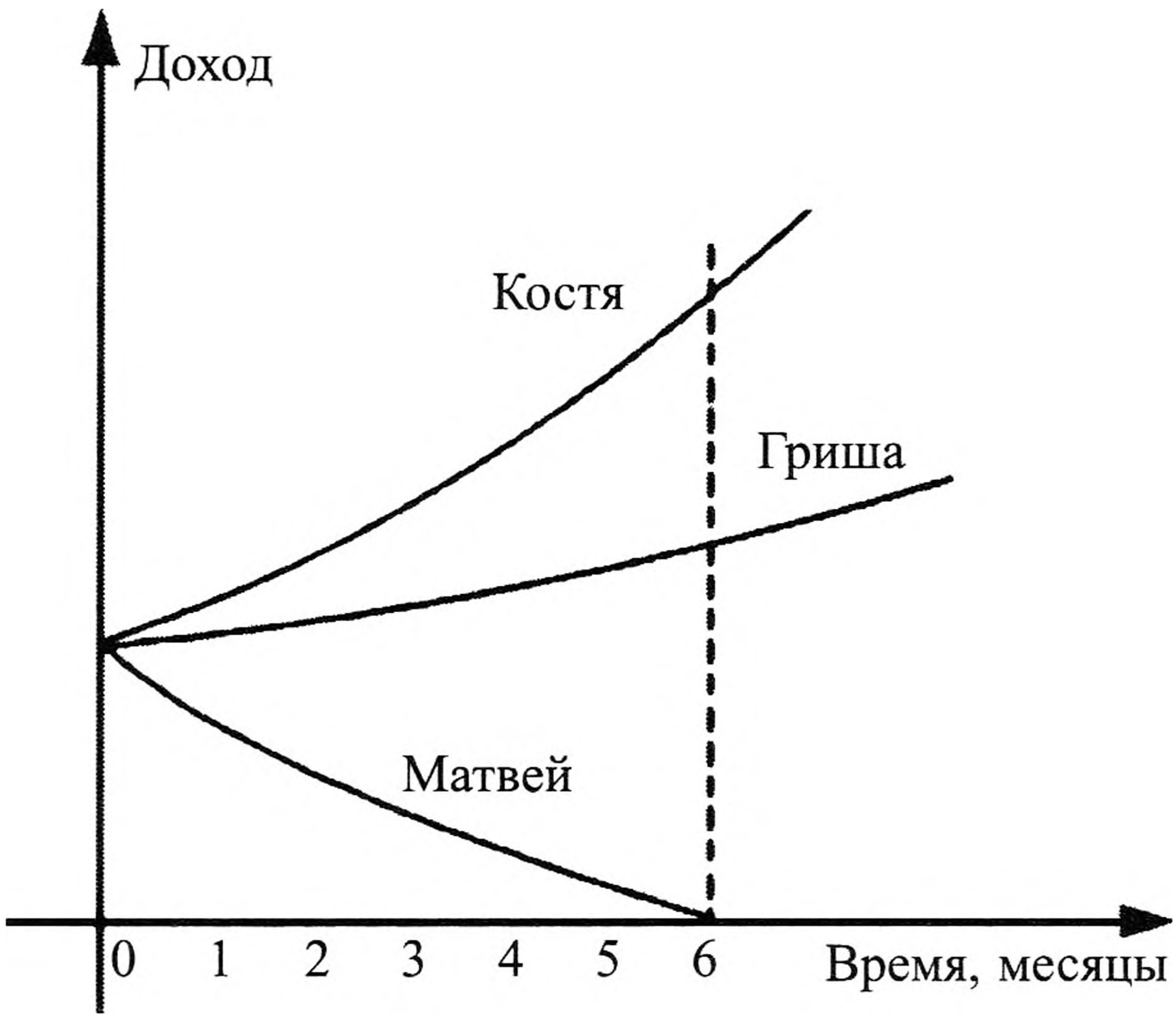
На рисунке — графики трех функций. Как вы думаете, какая из них быстрее растет?



Ответ очевиден — третья. У нее самая большая скорость изменения, то есть самая большая производная.

Вот другой пример.

Костя, Гриша и Матвей одновременно устроились на работу. Посмотрим, как менялся их доход в течение полугода.



На графике сразу все видно, не правда ли? Доход Кости за полгода вырос больше чем в два раза. И у Гриши доход тоже вырос, но совсем чуть-чуть. А доход Матвея уменьшился до нуля. Стартовые условия одинаковые, а скорость изменения функции, то есть **производная**, — разная. Что касается Матвея — у его дохода производная вообще отрицательна.

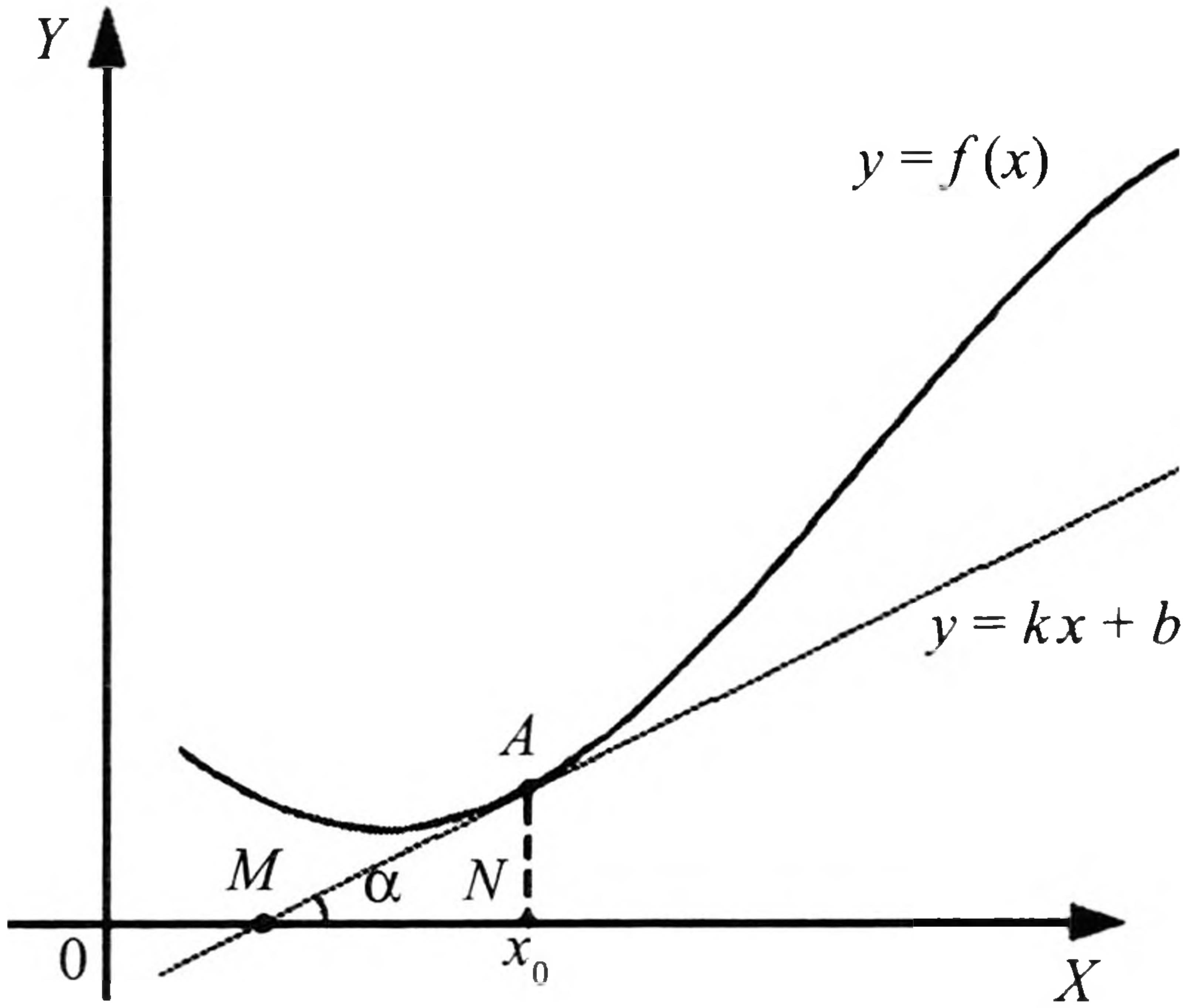
Интуитивно мы без труда оцениваем скорость изменения функции. Но как же это делаем?

На самом деле мы смотрим, насколько круто идет вверх (или вниз) график функции. Другими словами — насколько быстро меняется y с изменением x. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной — то есть может меняться быстрее или медленнее.

Производная функции обозначается $f'(x)$.

Покажем, как найти $f'(x)$ с помощью графика.

Нарисован график некоторой функции $y = f(x)$. Возьмем на нем точку A с абсциссой x_0. Пусть эта функция — возрастающая



в точке x_0. Проведем в этой точке касательную к графику функции. Мы хотим оценить, насколько круто вверх идет график функции. Удобная величина для этого — *тангенс угла наклона касательной.*

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Обратите внимание — в качестве угла наклона касательной мы берем угол между касательной и положительным направлением оси OX.

Иногда учащиеся спрашивают, что такое касательная к графику функции. Это прямая, имеющая на данном участке единственную общую точку с графиком и касающаяся его так, как касалась бы части окружности.

Найдем $k = \operatorname{tg} \alpha$. Мы помним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Из треугольника AMN:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AN}{MN}.$$

Мы нашли производную с помощью графика, даже не зная формулу функции.

Есть и другое важное соотношение. Вспомним, что прямая задается уравнением

$$y = kx + b.$$

Величина k в этом уравнении называется *угловым коэффициентом прямой*. Она равна тангенсу угла наклона прямой к оси X.

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Мы получаем, что

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k}.$$

Запомним эту формулу. Она выражает геометрический смысл производной.

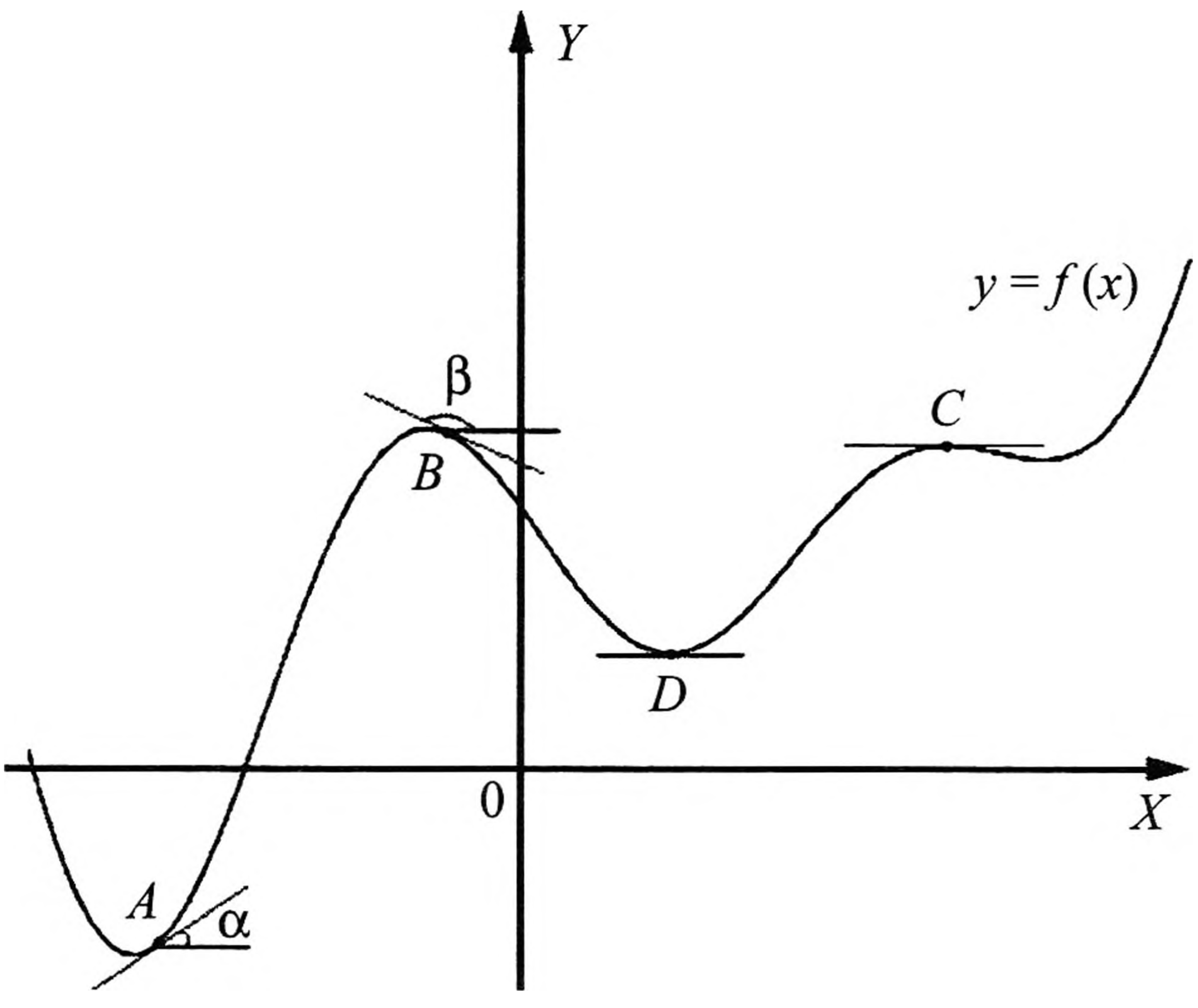
Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Другими словами, производная равна тангенсу угла наклона касательной.

Мы уже сказали, что у одной и той же функции в разных точках может быть разная производная. Посмотрим, как же связана производная с поведением функции.

Нарисуем график некоторой функции $y = f(x)$. Пусть на одних участках эта функция возрастает, на других — убывает, причем с разной скоростью. И пусть у этой функции будут точки максимума и минимума.

В точке A функция $f(x)$ возрастает. Касательная к графику, проведенная в точке A, образует острый угол α с положительным направлением оси X. Значит, в точке A производная положительна.



В точке B наша функция убывает. Касательная в этой точке образует тупой угол β с положительным направлением оси X. Поскольку тангенс тупого угла отрицателен, в точке B производная отрицательна.

Вот что получается:

Если функция $y = f(x)$ возрастает, ее производная положительна.

Если $f(x)$ убывает, ее производная отрицательна.

А что же будет в точках максимума и минимума? Мы видим, что в точках C (точка максимума) и D (точка минимума) касательная горизонтальна. Следовательно, тангенс угла наклона касательной в этих точках равен нулю, и производная тоже равна нулю.

Точка C — точка максимума. В этой точке возрастание функции сменяется убыванием. Следовательно, знак производной меняется в точке C с «плюса» на «минус».

В точке D — точке минимума — производная тоже равна нулю, но ее знак меняется с «минуса» на «плюс».

Вывод: с помощью производной можно узнать о поведении функции все, что нас интересует.

Если производная $f'(x)$ положительна, то функция $f(x)$ возрастает.

Если производная отрицательная, то функция убывает.

В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».

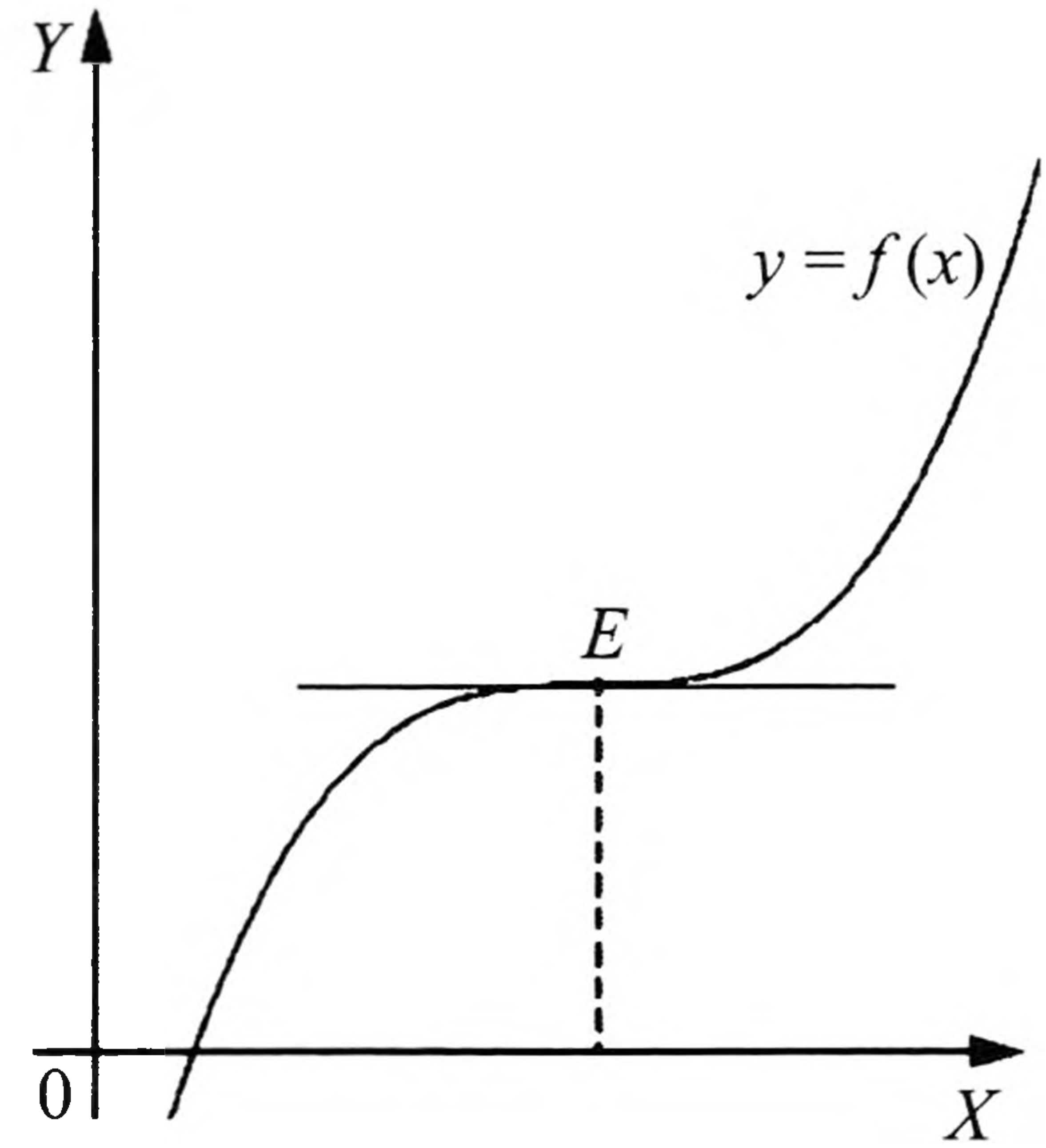
В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Запишем эти выводы в виде таблицы.

$f(x)$	возрастает	точка максимума	убывает	точка минимума	возрастает
$f'(x)$	+	0	–	0	+

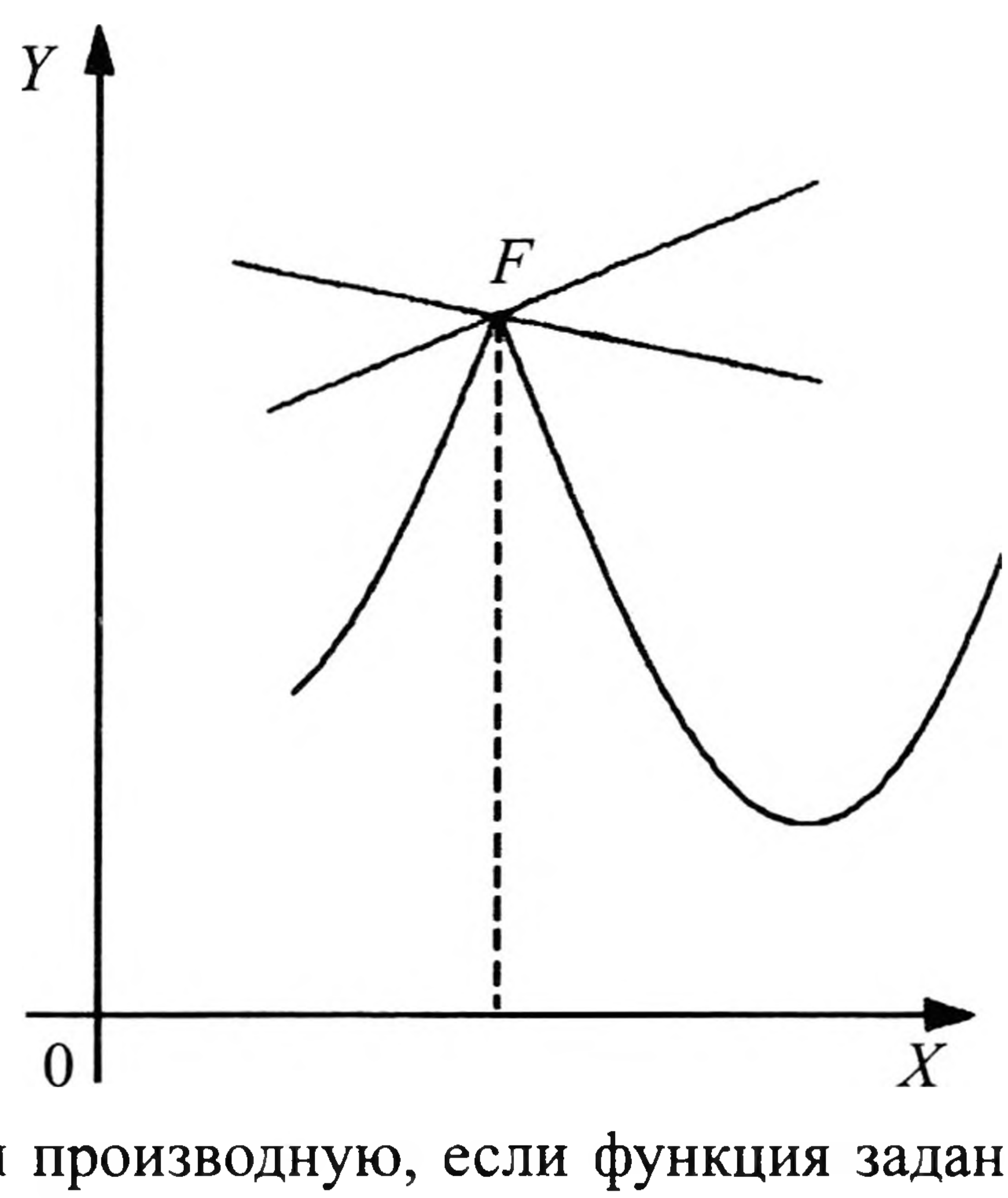
Сделаем два небольших уточнения. Одно из них понадобится вам при решении задач ЕГЭ. Другое — на первом курсе, при более серьезном изучении функций и производных.

Возможен случай, когда производная функции в какой-либо точке равна нулю, но ни максимума, ни минимума у функции в этой точке нет. Именно такой случай показан на рисунке. У изображенной здесь функции *точка E является точкой перегиба.*



В точке E касательная к графику горизонтальна, и производная равна нулю. Однако до точки E функция возрастала — и после точки E продолжает возрастать. Знак производной не меняется — она как была положительной, так и осталась.

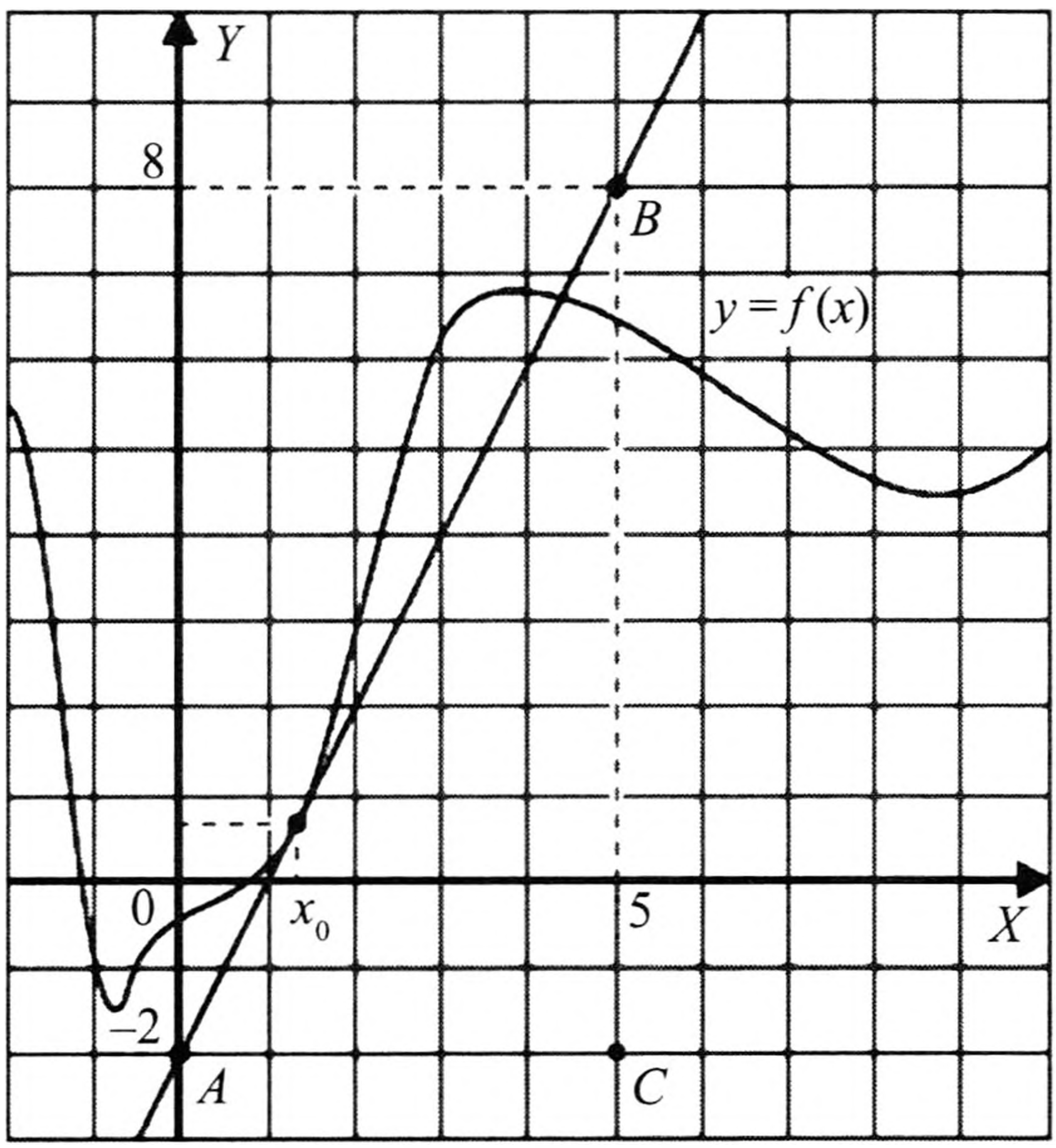
Бывает и так, что в точке максимума или минимума производная не существует. На графике это соответствует резкому излому, когда касательную в данной точке провести невозможно.



А как найти производную, если функция задана не графиком, а формулой? В этом случае применяется таблица производных.

Типовые задачи ЕГЭ на тему «Производная»

1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

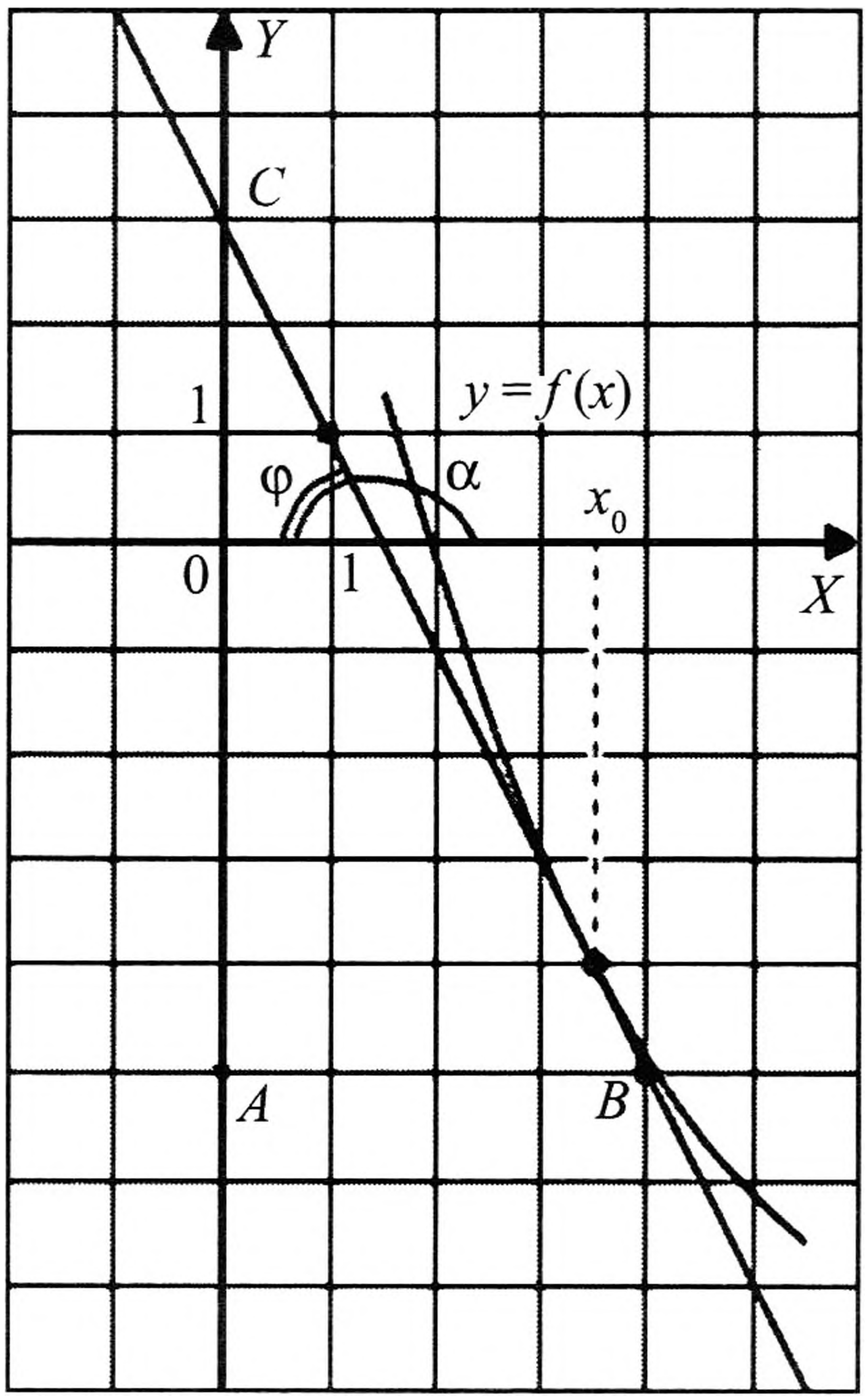


Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной в точке x_0. Эта касательная изображена на рисунке. Найдем ее угловой коэффициент. Касательная проходит через точки (0; –2) и (5; 8). Построим прямоугольный треугольник ABC, из которого найдем тангенс угла φ.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

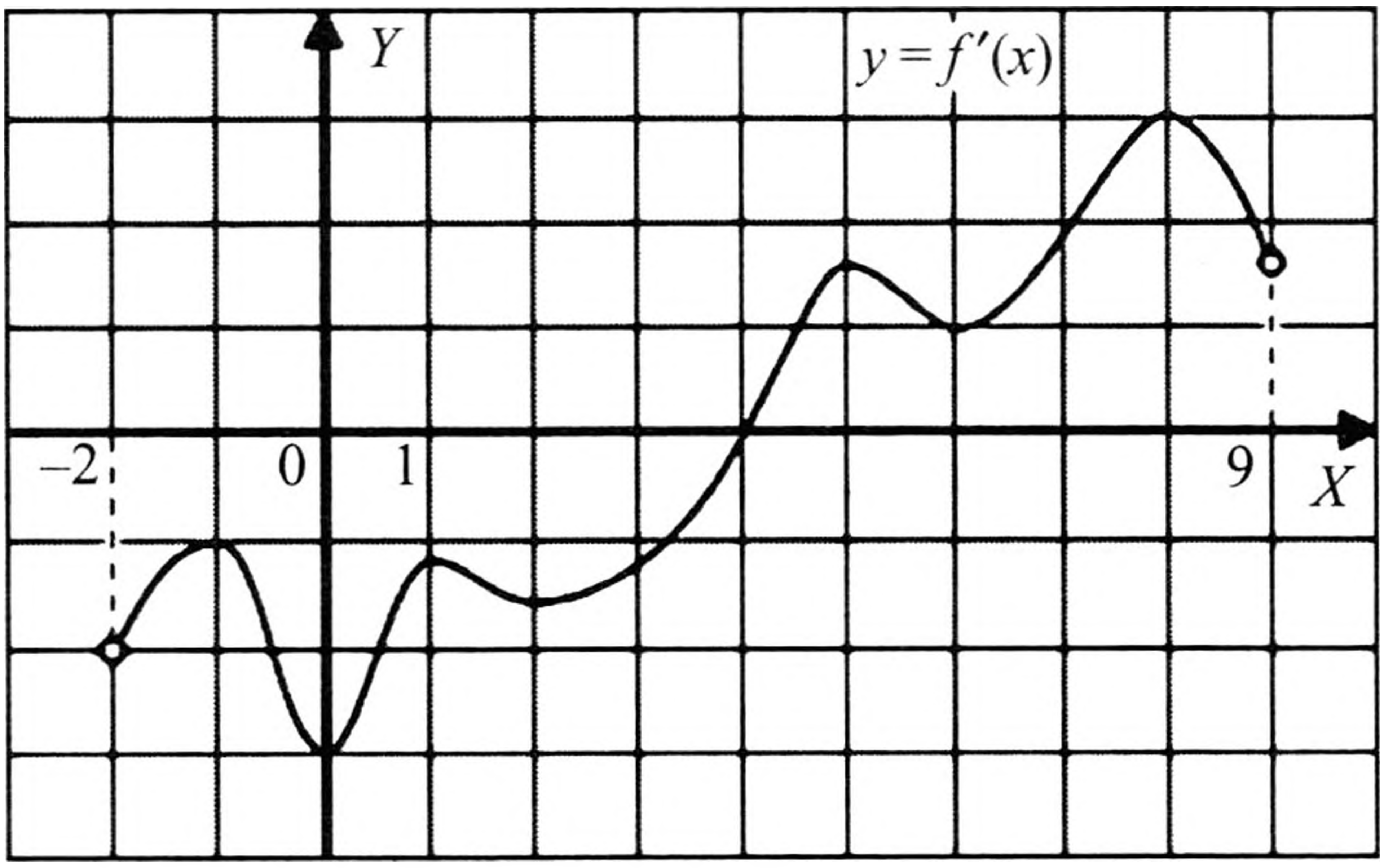


Начнем с определения знака производной. Мы видим, что в точке x_0 функция убывает, следовательно, ее производная отрицательна. Касательная в точке x_0 образует тупой угол α с положительным направлением оси X. Поэтому из прямоугольного треугольника ABC мы найдем тангенс угла φ, смежного с углом α.

Касательная проходит через точки (1; 1) и (4; –5). Построим прямоугольный треугольник, из которого найдем тангенс угла φ. $\operatorname{tg} \varphi = 2$, тогда тангенс угла наклона касательной равен –2.

Ответ: –2.

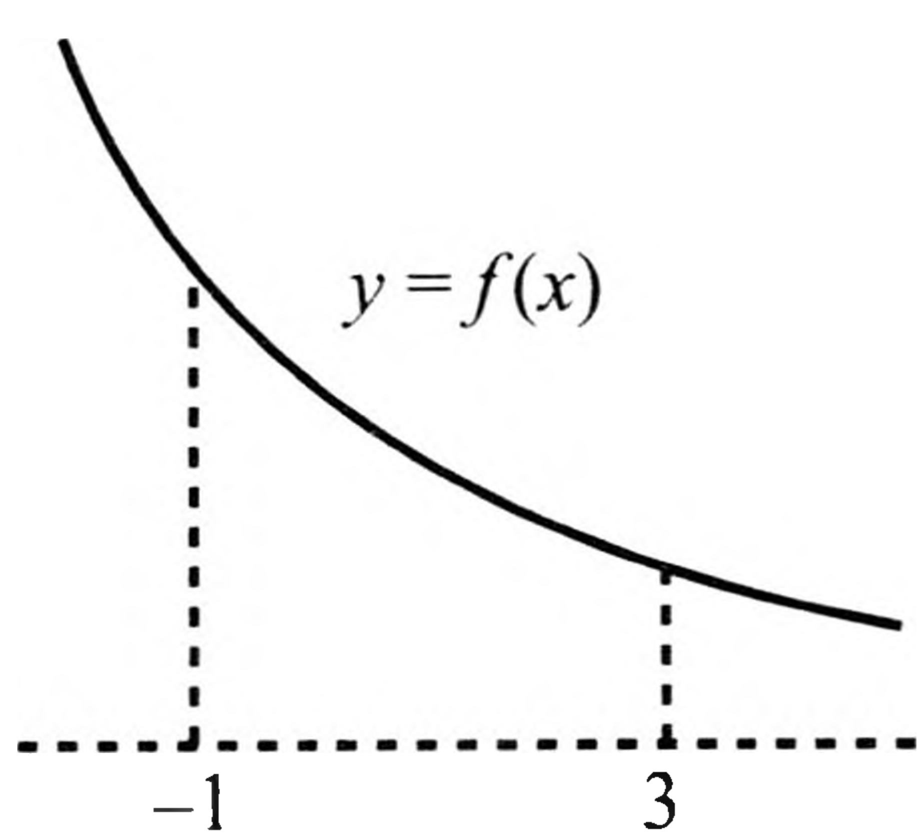
3. На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$ на интервале $(-2; 9)$. Найдите точку отрезка $[-1; 3]$, в которой функция $y=f(x)$ принимает наименьшее значение.



Эта задача — одна из любимых ловушек, которые составители вариантов ЕГЭ заготовили для вас, дорогие абитуриенты!

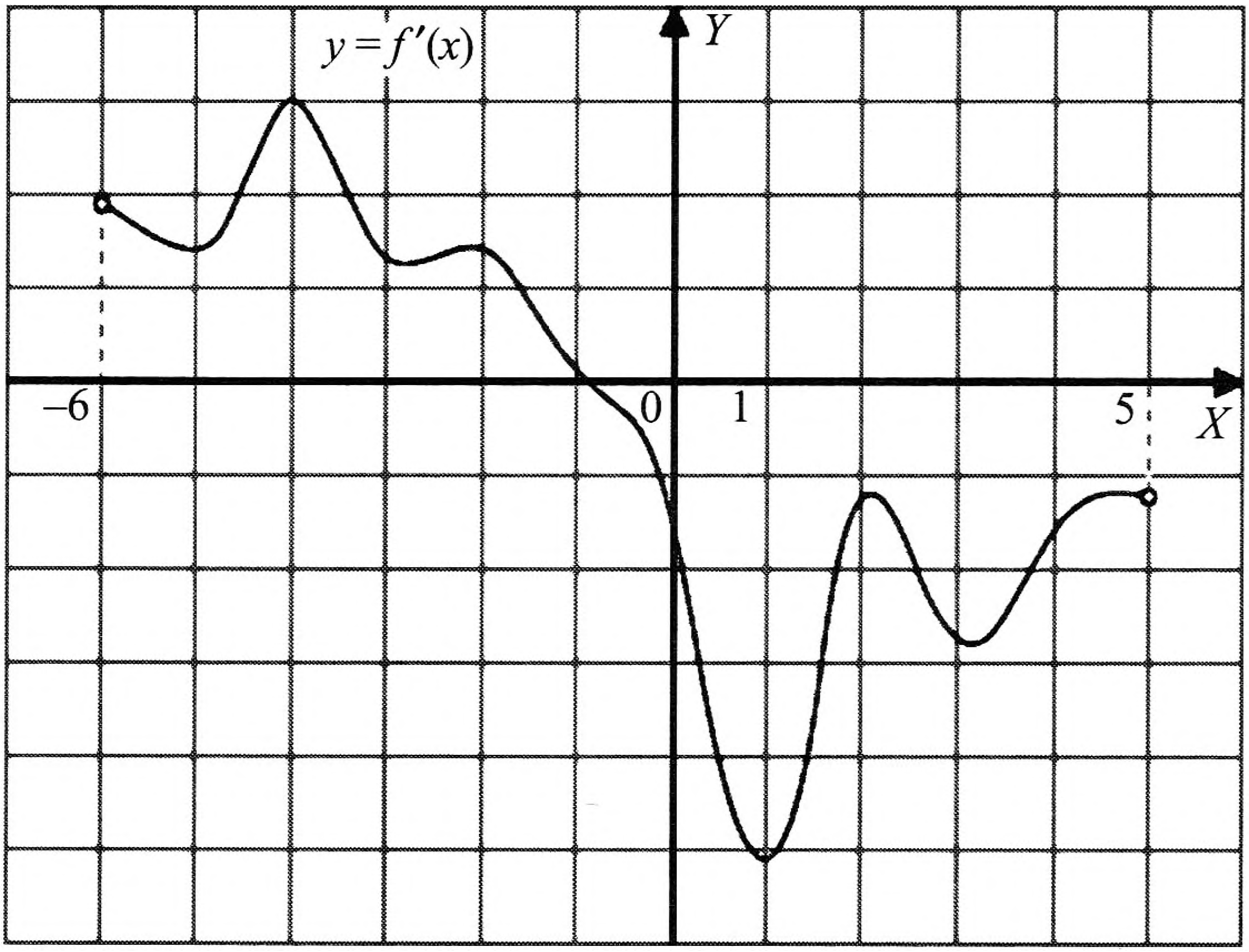
В ней спрашивается о наименьшем значении функции. А нарисована не функция, а ее производная!

Согласно графику, на всем отрезке $[-1; 3]$ значение производной $f'(x)$ отрицательно. Значит, на всем этом отрезке функция $y=f(x)$ монотонно убывает. Поэтому минимальное значение она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке 3.



Ответ: 3.

4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

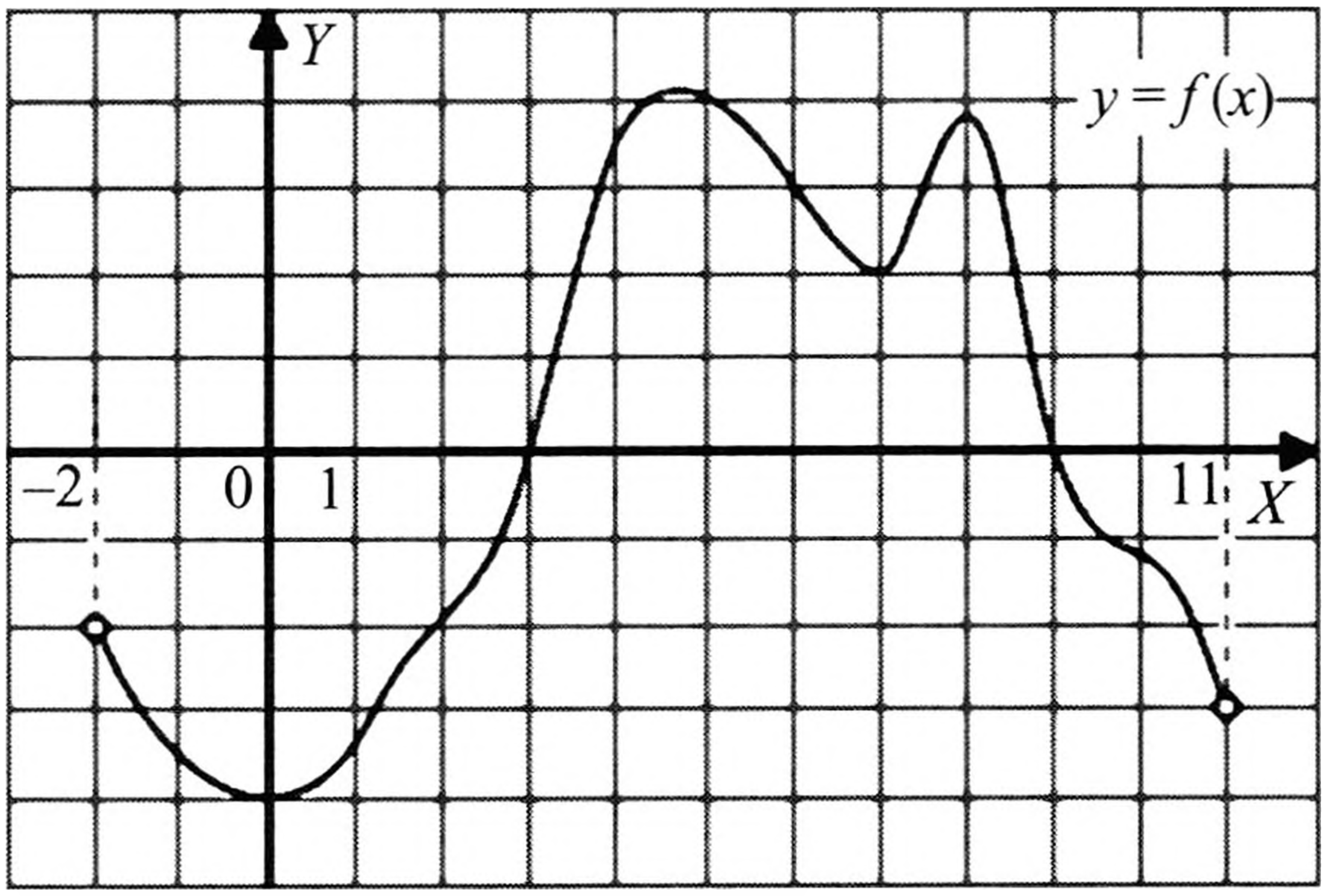


И снова нарисована производная, а вопрос задан о функции!

Видим на графике, что на всем отрезке $[-5; -1]$ значение производной $f'(x)$ положительно. Значит, на всем этом отрезке функция $y = f(x)$ монотонно возрастает. Поэтому минимальное значение она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке -5.

Ответ: -5.

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество целых точек интервала $(-2;\ 11)$, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



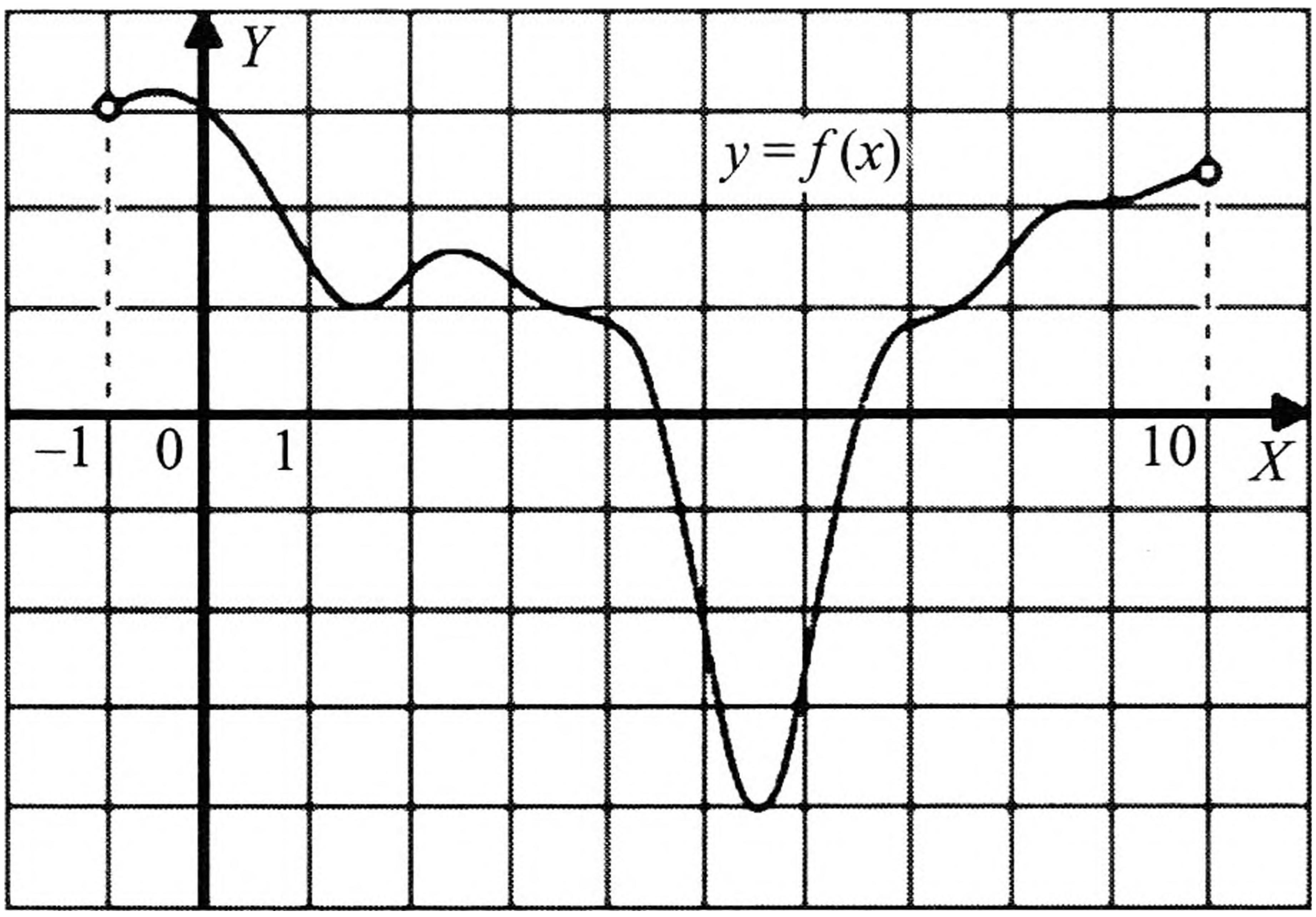
Обратите внимание, что и здесь ловушка: на рисунке изображен график функции, а вопрос задан о производной!

Вспомним, что производная функции положительная в тех точках, в которых функция возрастает. Значит, надо найти по графику количество целых точек (т. е. точек, где координата x выражается целым числом), в которых функция возрастает. Это точки 1, 2, 3, 4 — всего 4 точки.

Хорошо, а что же можно сказать о точках 7 и 8? Мы видим, что при $x = 7$ функция имеет минимум, а при $x = 8$ — максимум. Ни возрастания, ни убывания в этих точках нет.

Ответ 4.

6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 10)$. Найдите промежуток убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



А в этой задаче нет никаких ловушек! Нарисована функция, и вопрос задан о функции. Производная здесь просто ни при чем. Целые точки, в которых наша функция убывает, это 0, 1, 3, 4, 5, и сумма этих чисел равна 13.

Ответ: 13.

7. Найдите точку касания прямой $y = 3x + 8$ и графика функции $y = x^3 + x^2 - 5x - 4$. В ответе укажите абсциссу этой точки.

Уравнение касательной имеет вид $y = 3x + 8$, угловой коэффициент этой прямой равен 3, значит, производная функции в точке касания тоже равна 3. Из этого условия найдем возможные точки касания.

Запишем **условие касания функции и прямой**.

Пусть функция задана уравнением $y = f(x)$, прямая задана уравнением $y = kx + b$.

Тогда для точки касания:

$$\begin{cases} x) = kx + b, \\ f'(x) = k. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 5x - 4 = 3x + 8, \\ 3x^2 + 2x - 5 = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем:

$x_1 = 43$, $x_2 = -2$.

Подставим эти числа в первое уравнение системы. Число 43 не является его корнем, а число –2 — является.

Ответ: –2.

Таблица производных и правила дифференцирования

Теперь вы знаете, что такое производная. Если функция задана графиком, ее производная в каждой точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции. А если функция задана формулой — вам помогут таблица производных и правила дифференцирования, то есть правила нахождения производной.

Запишем, чему равны производные для знакомых нам функций. Мы намеренно не пишем в эту таблицу обратные тригонометрические функции. Их производные понадобятся вам только на первом курсе.

1. $(C)' = 0$.

Производная константы, то есть постоянной величины, равна нулю.

Формула очевидна. Постоянная величина не меняется. Скорость ее изменения (то есть производная) равна нулю. График $y = C$ — прямая, параллельная оси X. Ее угловой коэффициент равен нулю.

2. $(x)' = 1$.

Нарисуйте график функции $y = x$. Это прямая, образующая угол 45° с положительным направлением оси X. Мы помним, что производная — это тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX. Для линейной функции производная — это тангенс угла наклона самого графика функции к положительному направлению оси OX.

Поскольку $\text{tg}\,45° = 1$, получим, что $(x)' = 1$.

3. Производные степенных функций вычисляются по формуле: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

В частности:

$(x^2)' = 2x$;

$(x^3) = 3x^2$;

$$\left(\sqrt{x}\right) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

4. Производные тригонометрических функций:

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$$(\text{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\text{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5. Осталось записать производные показательной и логарифмической функций. Для этого познакомимся с числом e и понятиями «экспонента» и «натуральный логарифм».

Число *e*

С замечательным числом e мы впервые встречаемся, начиная изучать показательную функцию, логарифмы и производные.

В главе «Показательная функция» мы говорили о важнейшем свойстве функции $y = a^x$ — при $a > 1$ эта функция очень быстро растет. И не просто «быстро растет» — чем больше x, тем больше скорость ее роста, тем круче идет график. Вспомните историю про кроликов!

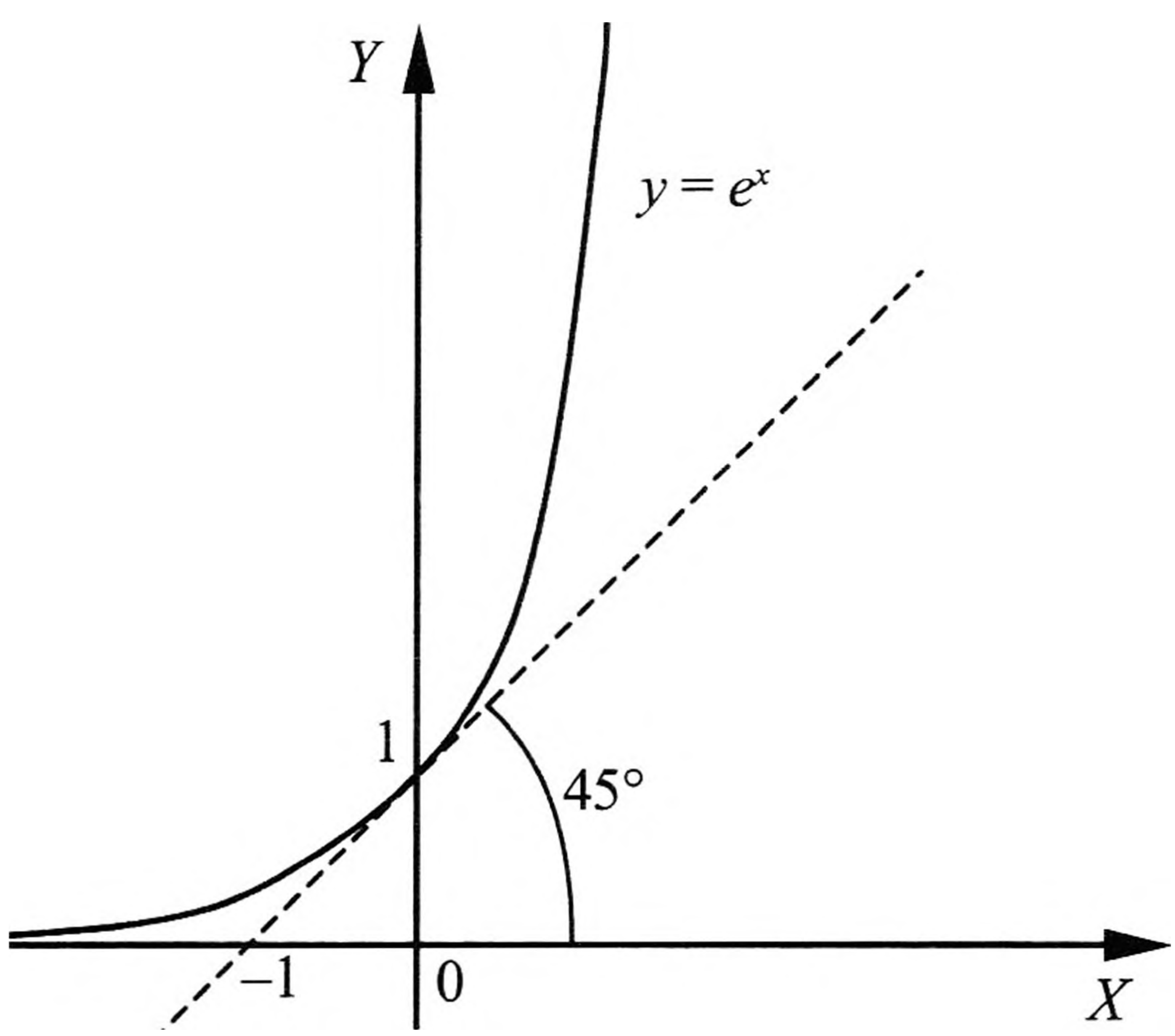
Можно сказать, что с увеличением x растут и значения показательной функции, и ее производная. А если аргументом показательной функции $y = a^t$ является время, то при $a > 1$ такая функция есть математическое выражение стремительно развивающегося процесса.

Среди показательных функций есть особенная.

Называется она **экспонента, ее формула $y = e^x$.**

Особенность ее в том, что в каждой точке скорость роста этой функции равна значению самой функции в этой точке. Другими словами, $(e^x)' = e^x$, то есть производная функции $y = e^x$ равна ей самой.

Нарисуем несколько графиков функции $y = a^x$ при $a = 2$, $a = 3$, а также при $2 < a < 3$. Среди этих графиков есть такой, что касательная к нему, проведенная в точке $x = 0$, идет ровно под углом 45° к положительному направлению оси OX.



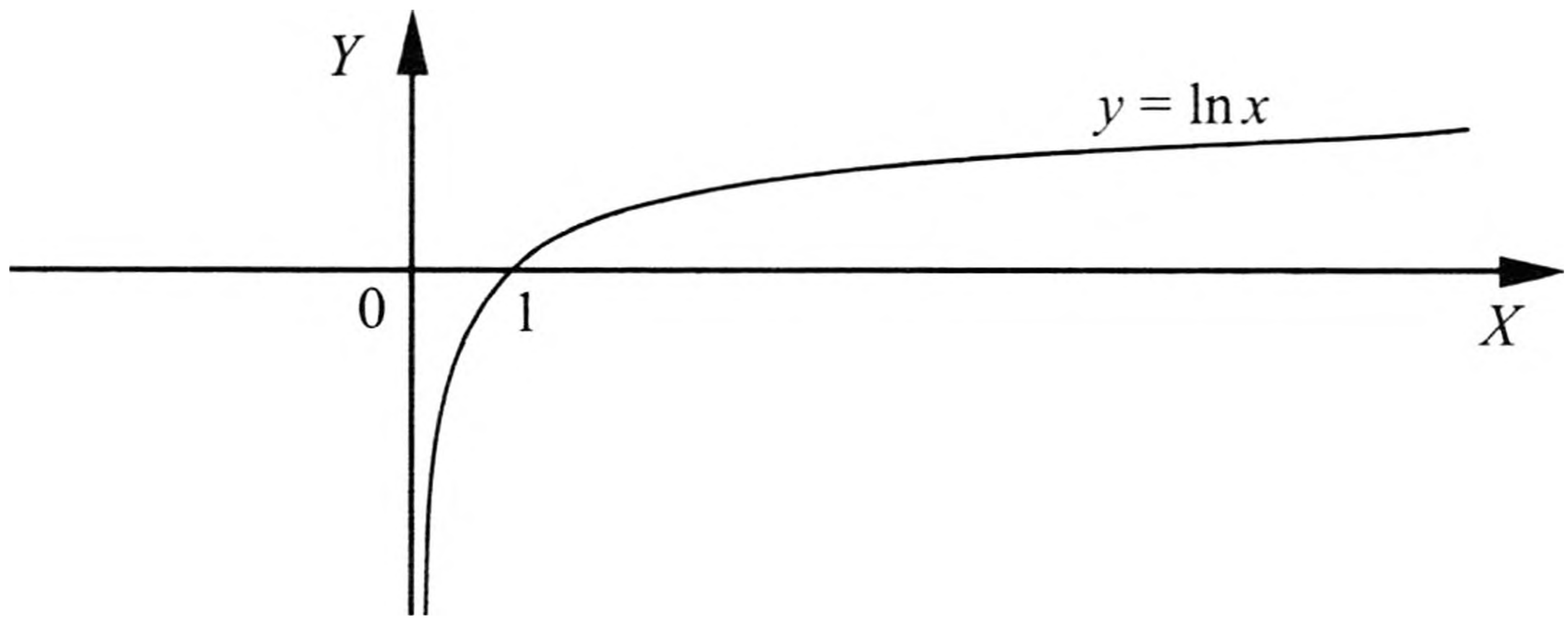
Это и есть график функции $y = e^x$. Само число e — иррациональное, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Приблизительно оно равно 2,718.

Логарифм по основанию e называется натуральным и обозначается $\ln x$. Если в уравнении или неравенстве вам встретились такие логарифмы, вы работаете с ними так же, как и с любыми другими, у которых основание больше 1.

Функция $y = \ln x$ также обладает интересным свойством:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Это значит, что с ростом x график логарифмической функции идет более и более полого, скорость роста его уменьшается, что мы и видим.



Формулы для производных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ содержат в себе выражение $\ln a$:

$$(a^x)' = (a^x) \cdot \ln a;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Число e, как и число π, является одной из мировых констант. Так называют числа, которые можно встретить в математических формулах, выражающих фундаментальные законы природы, — в физике, статистике, биологии или экономике.

Число π известно людям с глубокой древности. Оно равно отношению длины окружности к ее диаметру. А вот с числом e (названным так в честь великого математика Леонарда Эйлера) человечество познакомилось намного позже. Впервые его вычислил математик Якоб Бернулли в начале XVIII века, причем сделал это, решая чисто практическую задачу о начислении процентов на банковский вклад.

Нам уже встречались задачи, где вклад величиной x помещен в банк под $p\%$ годовых. Найти нужно было, например, каким станет вклад через два года. Тогда мы вывели удобные формулы:

если величину x увеличить на p процентов, получится

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

если величину x дважды увеличить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Именно таким станет вклад через два года.

А если вклад пролежит в банке n лет, его величина станет равной

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Итак, если вклад поместить банк под 10% годовых, он вырастет за год в 1,1 раз, за два года — в 1,21 раза, за десять — примерно в 2,6 раза. Значит, рост вклада зависит от того, сколько он пролежит в банке, то есть сколько раз начисляются проценты. А что будет через сто лет? А если найти такой банк, где процент начисляется не раз в год, а раз в день? И пусть даже каждый день начисляется совсем небольшой процент, но ведь дней-то много! Верно ли, что можно положить в такой банк один доллар под одну сотую процента в день, а через пару десятков лет забрать из банка миллион?

Давайте так и сформулируем задачу. Пусть банк начисляет каждый день по одной сотой процента. Во сколько раз вырастет вклад через 10 000 дней (это двадцать семь с лишним лет)? Иными словами, чему приближенно равна величина $\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}$? И к чему будет стремиться величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, если n стремится к бесконечности?

Вот такую задачу и решал Бернулли. Если n будет очень большим или, как говорят математики, бесконечно большим, будет стремиться к бесконечности (т. е. больше миллиона, больше миллиарда, больше двух миллиардов...) — то величина $\frac{1}{n}$ будет, наоборот, очень малой. Можно сказать, что $\frac{1}{n}$ будет стремиться к нулю.

Оказывается, что в этом случае величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет стремиться к числу e. Если банк каждый год начисляет по 1%, через 100 лет вклад увеличится примерно в e раз (напомним, что $e \approx 2{,}718$). Еще большая точность будет достигнута, если каждый день банк начисляет по 0,01 процента. Через 10 000 дней вклад увеличится примерно в e раз. Итак, если n стремится к бесконечности, то величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к числу e.

Этот неожиданный факт называется **вторым замечательным пределом**. Вы встретитесь с ним в курсе математического анализа.

Соберем в одной таблице производные функций и правила взятия производных — то есть дифференцирования.

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Правила дифференцирования

$(u+v)' = u' + v'$

$(u-v)' = u' - v'$

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$(c \cdot f)' = c\,(f)'$

u, v, f — функции
c — константа

Задачи ЕГЭ на применение таблицы производных и правил дифференцирования

1. Найдите точку максимума $y = x^3 - 3x + 4$.

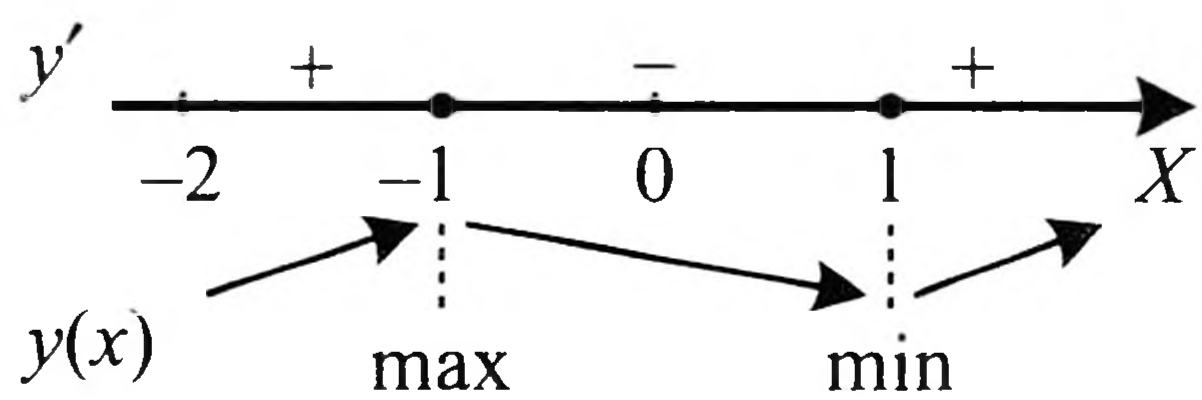
Мы помним, что в точке максимума функции производная (если она существует) равна нулю и меняет знак с «+» на «–».

Найдем производную данной функции.

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1).$$

Производная равна нулю при $x = -1$ и $x = 1$.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Точка $x = -1$ является точкой максимума функции.

Ответ: –1.

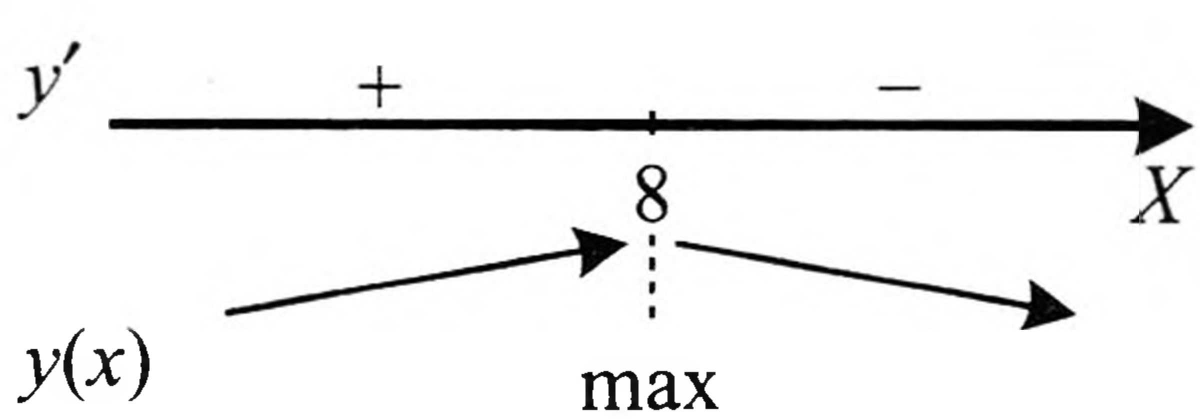
2. Найдите максимум функции $y = (9 - x) \cdot e^{(x - 8)}$.

Найдем производную данной функции, пользуясь формулой производной произведения.

$$y' = (9 - x)' \cdot e^{(x - 8)} + (9 - x)\,(e^{x - 8})' =$$
$$= -e^{x - 8} + (9 - x) \cdot e^{x - 8} = (8 - x) \cdot e^{x - 8}.$$

Производная равна нулю при $x = 8$.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Получаем, что $x = 8$ — точка максимума функции.

Что запишем в ответ? В задании сказано: «Найдите максимум функции». Будьте внимательны! В отличие от предыдущей задачи, здесь требуется найти значение функции в точке максимума. Подставим $x = 8$ в формулу функции $y = (9 - x) \cdot e^{x-8}$.

$$y = (9 - 8) \cdot e^{8-8} = 1.$$

Ответ: 1.

3. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

Функция $y = \sqrt{t}$ монотонно возрастает на всей своей области определения. Это значит, что большему значению t соответствует большее значение y, а наименьшее значение t дает наименьшее значение y.

Функция $t = x^2 - 6x + 11$ задает квадратичную параболу. Вершина параболы $x = 3$ является точкой минимума этой функции.

Функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$ определена при найденном значении переменной и достигает минимума в той же точке, в какой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x +$ 3 на отрезке $[-3; -0{,}5]$.

Заметим, что функция $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ определена на всей числовой оси.

Напомним, что наибольшее свое значение на отрезке функция принимает в точке максимума или на концах отрезка.

Определим точки, в которых функция может иметь максимум. Для этого найдем производную функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1$$

и приравняем ее к нулю.

$$y' = 0.$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = -13.$$

Найдем знаки производной.

При $x_1 = -1$ производная меняет знак с «плюса» на «минус». Это значит, что в данной точке возрастание функции сменяется убыванием, и точка $x = -1$ — точка максимума данной функции на отрезке $[-3; -0{,}5]$.

Точка $x_2 = -13$, в которой производная меняет знак с «минуса» на «плюс», не принадлежит рассматриваемому отрезку $[-3; -0{,}5]$.

Осталось вычислить значение функции в точке $x = -1$. Оно и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на данном отрезке.

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 3 = -1 + 2 - 1 + 3 = 3.$$

Обратите внимание. В этой задаче, в отличие от предыдущей, надо найти наибольшее значение функции на отрезке. Значит, в ответ мы запишем значение в точке -1, то есть 3.

Ответ: 3.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

Эта функция существует только при $x > 0$, поскольку выражение $\ln x$ определено только для положительных чисел.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^2 - 3x + \ln x + 5$. Как всегда, возьмем производную и приравняем ее к нулю.

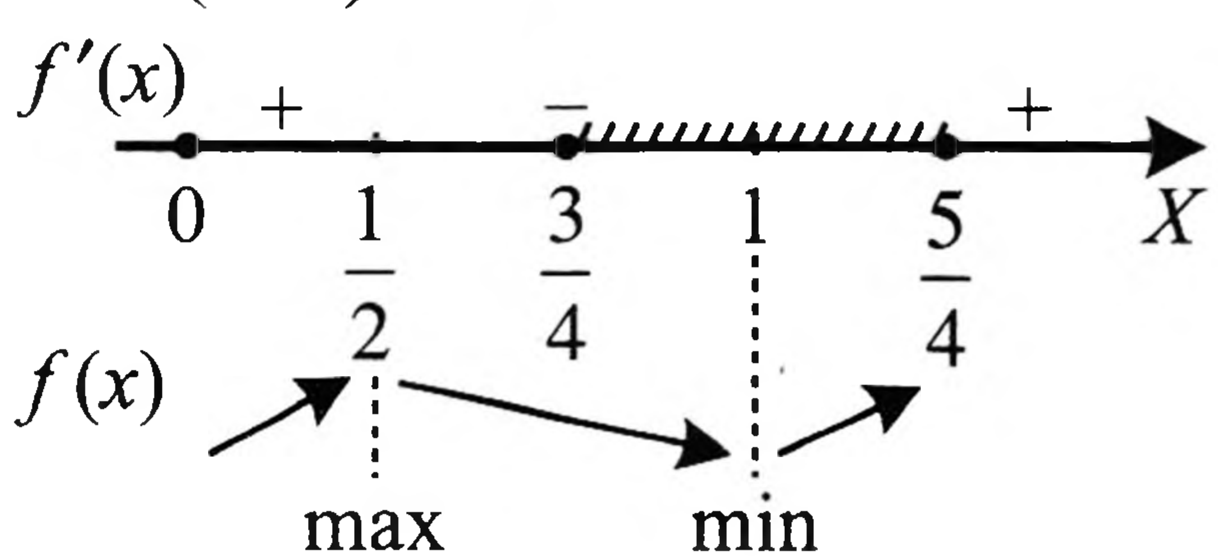
$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}, \text{ при } x > 0.$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{2} \text{ и } x = 1.$$

При $x = 0$ производная не существует, но эта точка и не входит в область определения функции.

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty).$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$



Мы помним, что на промежутках, где производная функции положительна, функция возрастает. Там, где производная отрицательна, функция убывает.

$x = \frac{1}{2}$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.

Рассмотрим отрезок $\left[\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right]$. На промежутке $\left[\frac{3}{4};\ 1\right)$ функция убывает, а на $\left(1;\ \frac{5}{4}\right]$ возрастает. Наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right]$ достигается в точке $x = 1$.

Найдем его: $f(1) = 3$.

Ответ: 3.

6. При каком значении a функция $y = x(x^3 - a)$ имеет экстремум в точке $x = 2$?

Запишем функцию в виде $y = x^4 - ax$ и возьмем ее производную:

$$y' = 4x^3 - a.$$

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Значит, если $x = 2$ — точка экстремума функции, то $y'(2) = 0$.

Поэтому $4 \cdot 2^3 - a = 0$.

Отсюда $a = 32$.

Ответ: 32.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

Найдем производную функции:

$$y' = 15 - 3\cos x.$$

$\cos x = 5$ — решений нет.

Уравнение $y' = 0$ не имеет решений. Значит, производная этой функции никогда не равна нулю. Более того — она положительна при всех значениях x, поэтому заданная функция является монотонно возрастающей.

Следовательно, наибольшее значение функции на заданном отрезке достигается в правом конце этого отрезка, то есть при $x = 0$.

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

8. Найдите наибольшее значение функции

$y = 16\text{tg}x - 16x + 4\pi - 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Как всегда, найдем производную этой функции:

$$y' = \frac{16}{\cos^2 x} - 16 = 16\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 16\text{tg}^2 x.$$

Что мы видим? На всем отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ производная неотрицательна. При $x = 0$ производная равна нулю, однако она не меняет знак при переходе через эту точку.

Это значит, что при $x = 0$ ни минимума, ни максимума у функции $y = 16\text{tg}x - 16x + 4\pi - 5$ не имеется. При $x < 0$ эта функция возрастает, и при $x > 0$ она тоже возрастает.

И тогда наибольшим значением функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ будет значение в правом конце этого отрезка.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16\text{tg}\frac{\pi}{4} - 16\frac{\pi}{4} + 4\pi - 5 = 11.$$

А что же точка $x = 0$, в которой производная равна нулю, но не меняет знак? Эта точка является точкой перегиба функции $y = 16\text{tg}x - 16x + 4\pi - 5$.

Ответ: 11.

Первообразная

Вспомним таблицу производных. В левой колонке — функции, в правой — их производные. Например, $2x$ — производная от функции $y = x^2$, $\cos x$ — производная функции $y = \sin x$. А чем будет являться $y = x^2$ для функции $y = 2x$? Или $y = \sin x$ — для функции $y = \cos x$?

Заметим, кстати, что $y = 2x$ — производная не только функции $y = x^2$, но и функций $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 5$ — в общем, всех функций вида $y = x^2 + C$. Здесь C — константа, то есть постоянная величина, и ее производная равна нулю.

Аналогично, функция $y = \cos x$ — производная для всех функций вида $y = \sin x + C$, где C — константа.

Функция $F(x)$, для которой $f(x)$ является производной, называется *первообразной* функции $y = f(x)$. Функции вида $y = F(x) + C$ образуют множество первообразных функции $y = f(x)$.

Посмотрим на таблицу первообразных. Каждая функция в левом столбце таблицы является производной для функции в правом столбце.

Таблица первообразных

$f(x)$ (функция)	$F(x)$ (первообразная)
0	C (константа)
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$

Первообразная суммы функций равна сумме их первообразных. Первообразная разности функций — разности первообразных. Первообразная от функции $y = kf(x)$, где k — постоянный множитель, равна произведению k на первообразную функции $f(x)$, то есть $kF(x)$,

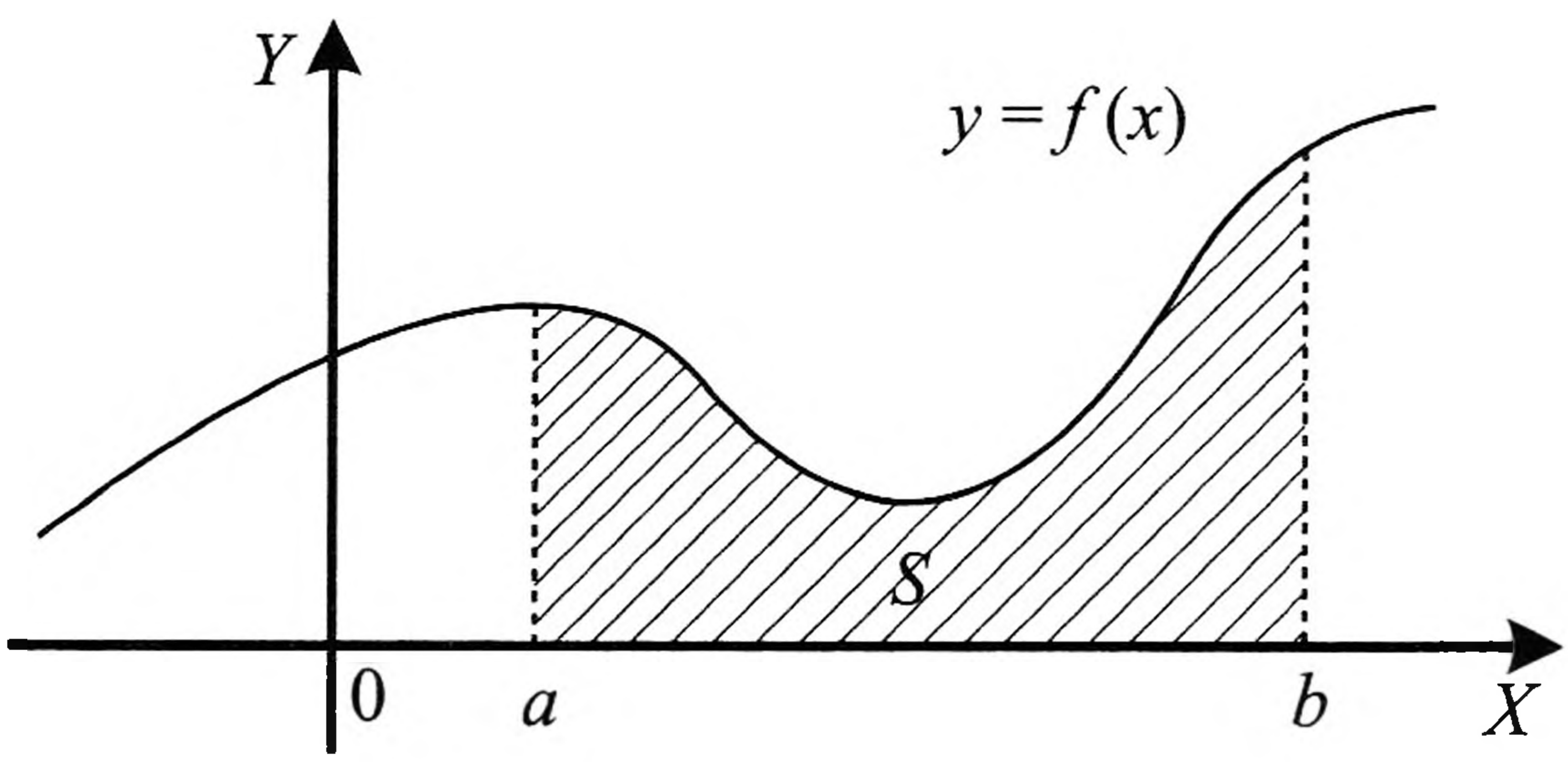
Множество всех первообразных функции называется **неопределенным интегралом** данной функции. Записывается это так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Дальше об интегралах я рассказывать не буду. Вы узнаете о них всё, став студентами. В задачах ЕГЭ по математике неопределенные интегралы не встречаются, а теме «Первообразная» посвящено всего несколько задач в первой части ЕГЭ. Для их решения надо знать только таблицу первообразных и еще одну важную формулу.

Формула для вычисления площади под графиком функции

Пусть в прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью X и прямыми $x = a$ и $x = b$. Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$.

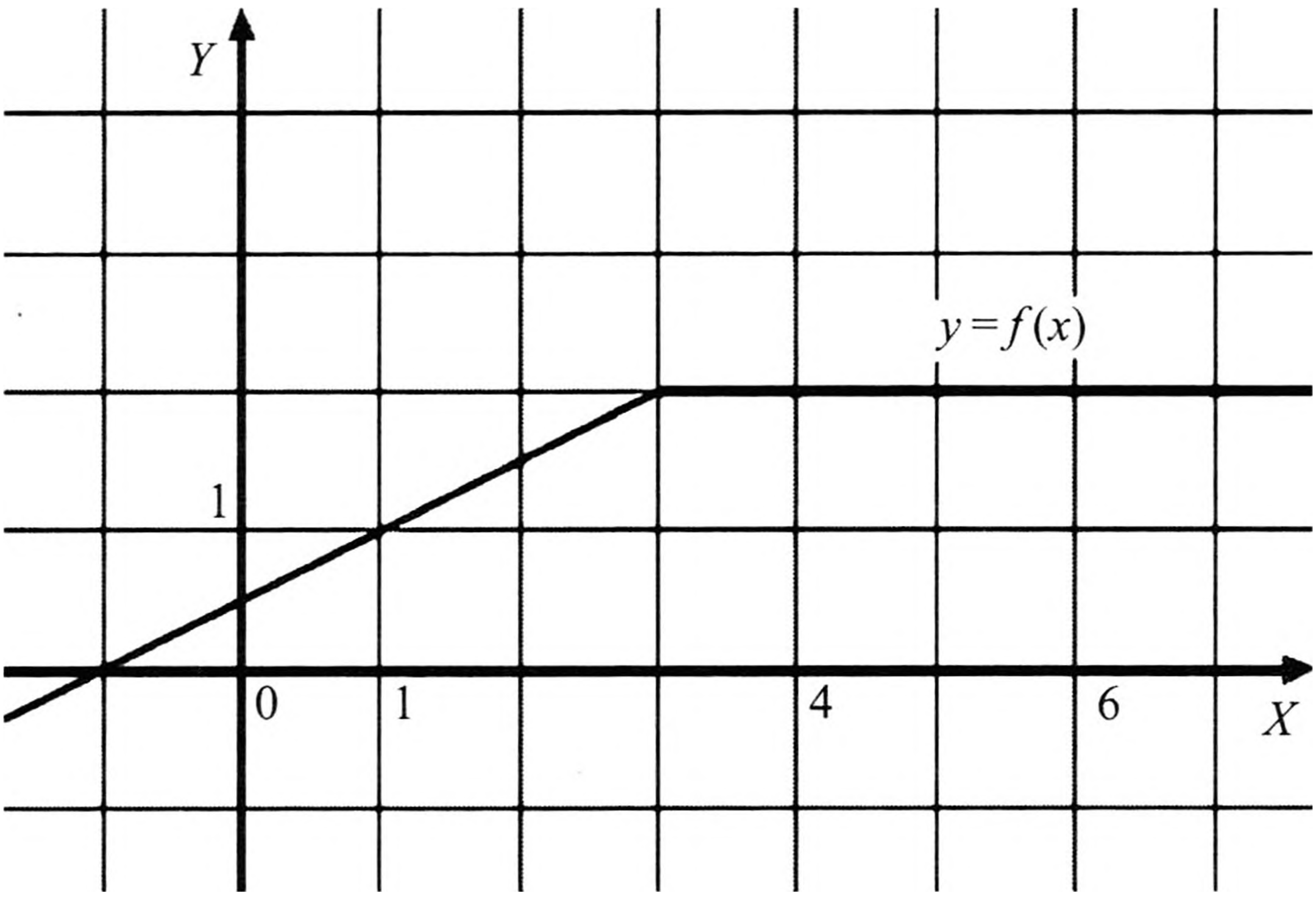


Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{S = F(b) - F(a).} \qquad (1)$$

Такую фигуру называют еще криволинейной трапецией. А сама формула (1) носит название «Формула Ньютона–Лейбница».

9. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значение выражения $F(6) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

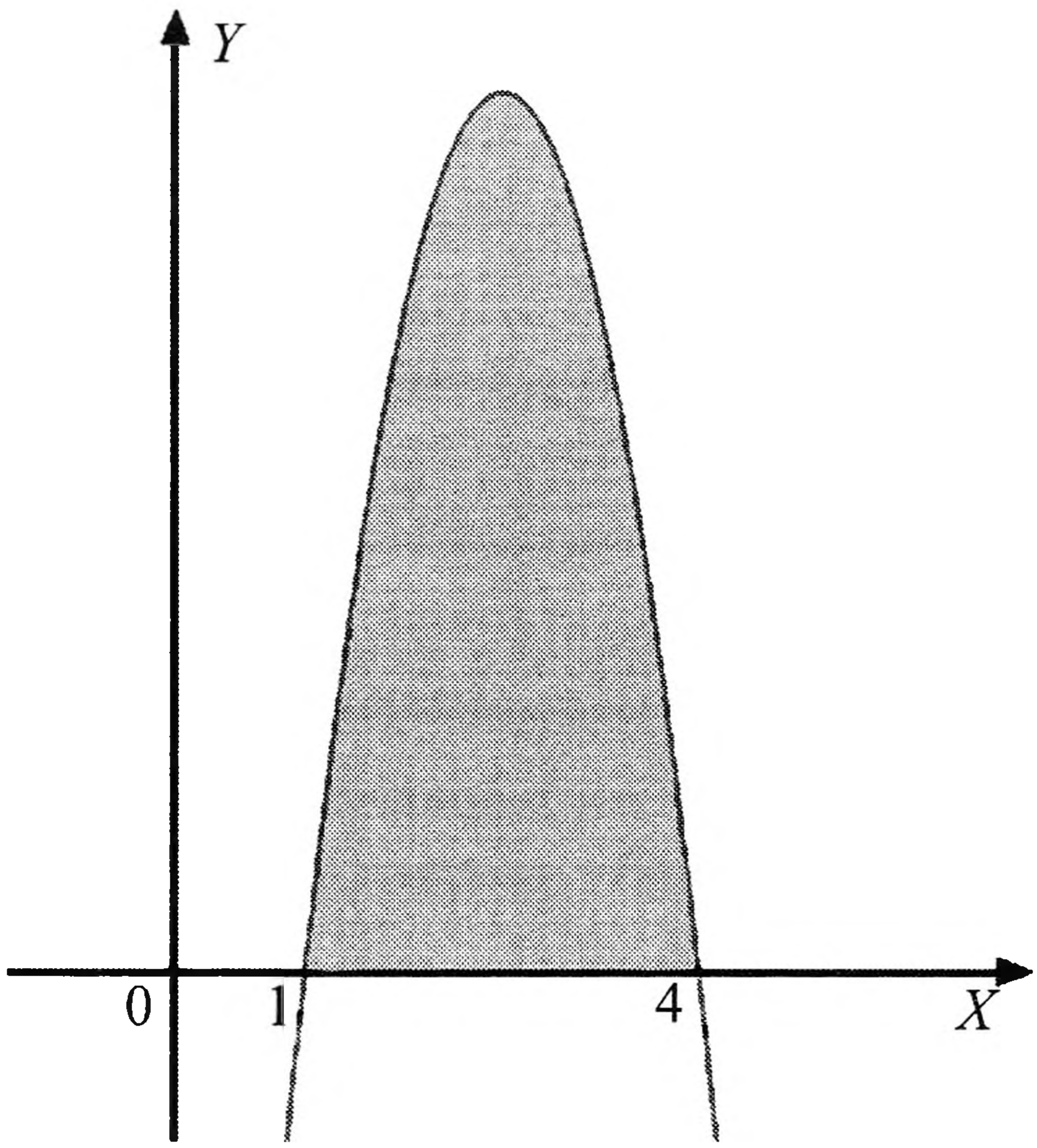


По формуле Ньютона–Лейбница, разность первообразных $F(b) - F(a)$ — это площадь, ограниченная графиком функции, осью X и прямыми $x = a$ и $x = b$.

В этой задаче нужная фигура ограничена графиком функции, осью X и прямыми $x = 4$ и $x = 6$. Это квадратик, и площадь его равна 4.

Ответ: 4.

10. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 + 7{,}5x^2 - 12x + 8{,}5$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



По формуле Ньютона–Лейбница, площадь под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равна разности значений первообразной в концах отрезка, то есть

$$S = F(b) - F(a).$$

В нашей задаче имеем:

$$S = (-4^3 + 7{,}5 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8{,}5) - (-1^3 + 7{,}5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8{,}5).$$

Дальше — только арифметика. Вам помогут формулы сокращенного умножения для разности кубов, а также группировка слагаемых.

Ответ: 13,5.

Уравнения на ЕГЭ по математике. Часть 2

Модуль числа. Уравнения с модулем

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым.

Модуль числа и уравнения с модулем — тема особенная, прямо-таки заколдованная. Она совсем не сложная, просто в школе ее редко объясняют нормально.

В результате без специальной подготовки почти никто из школьников не может дать правильное определение модуля и тем более решить уравнение с модулем. И эту картину мы наблюдаем на протяжении многих лет.

Освоив эту тему, вы сумеете обойти множество конкурентов на ЕГЭ, олимпиадах и вступительных экзаменах.

Модуль числа называют еще абсолютной величиной этого числа. Попросту говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак. В записи положительного числа и так нет никакого знака, поэтому модуль положительного числа равен ему самому. Например, $|5| = 5$. Модуль нуля равен нулю. А модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному (без знака!).

Например, $|-7| = 7$, $|-9{,}36| = 9{,}36$.

Обратите внимание: модуль числа всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

Дадим определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

От большинства известных из школы определений оно отличается лишь одним: в нем есть выбор. Есть условие. И в зависимости от этого условия мы раскрываем модуль либо так, либо иначе.

Так же, как в информатике — в разветвляющихся алгоритмах с применением условных операторов. Как, вообще-то, и в жизни: если сдал ЕГЭ на минимальный балл — можешь подавать документы в вуз. Не сдал на минимальный балл — можешь идти в армию.

Таким образом, если под знаком модуля стоит выражение, зависящее от переменной, мы раскрываем модуль по определению. Например,

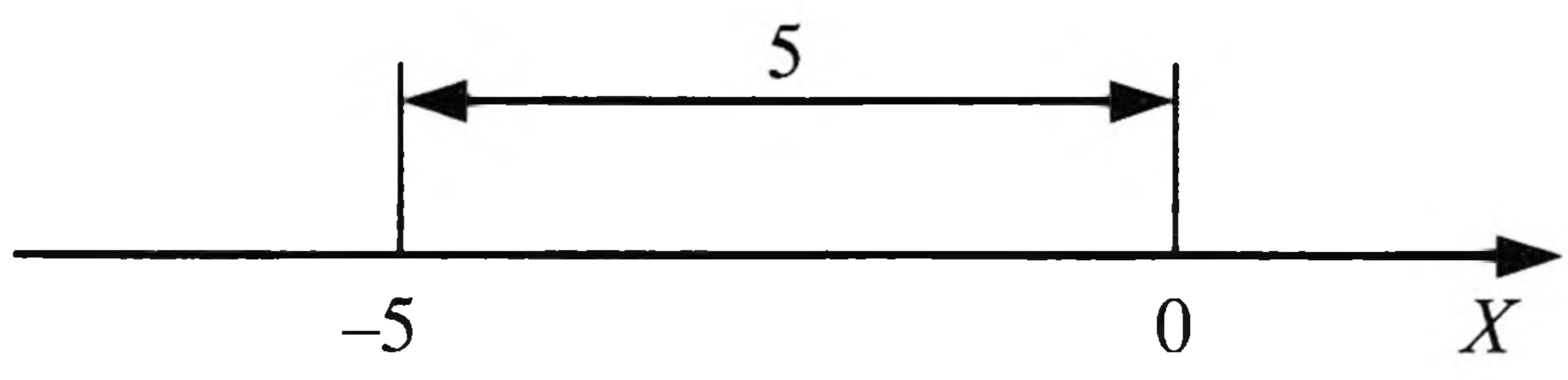
$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, \text{ если } 2x-5 \geq 0, \\ 5-2x, \text{ если } 2x-5 < 0. \end{cases}$$

В некоторых случаях модуль раскрывается однозначно. Например, $|x^2+y^2| = x^2+y^2$, так как выражение под знаком модуля неотрицательно при любых x и y. Или: $|-z^2-1| = z^2+1$, так как выражение под модулем отрицательно при любых z.

Геометрическая интерпретация модуля

Нарисуем числовую прямую. **Модуль числа** — *это расстояние от нуля до данного числа.*

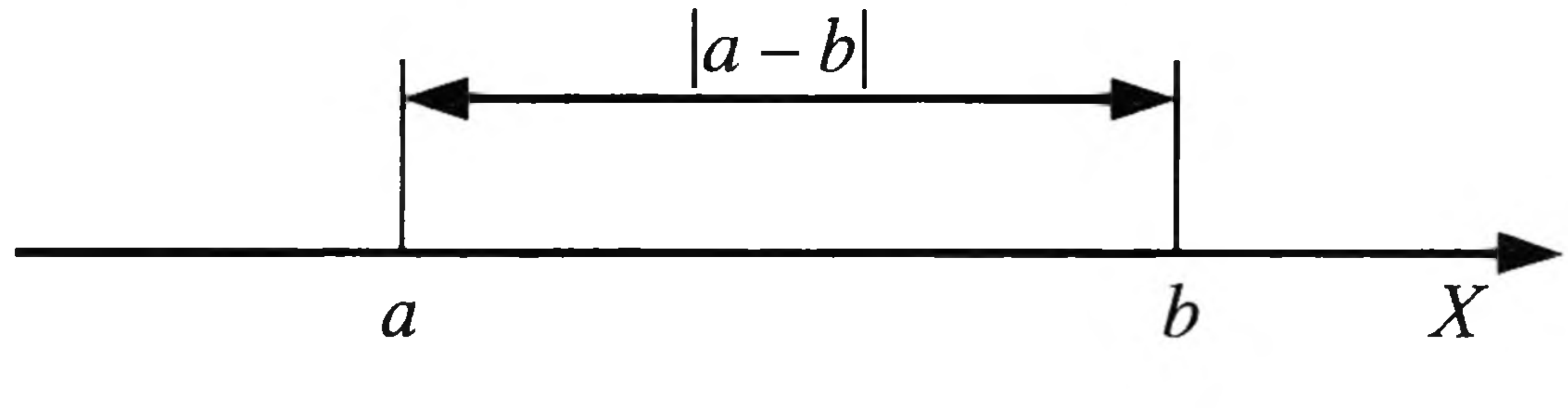
Например, $|-5| = 5$. То есть расстояние от точки -5 до нуля равно 5.



Эта геометрическая интерпретация очень полезна для решения уравнений и неравенств с модулем.

Рассмотрим простейшее уравнение $|x| = 3$. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трем. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения $|x| = 3$ есть два решения: $x = 3$ и $x = -3$.

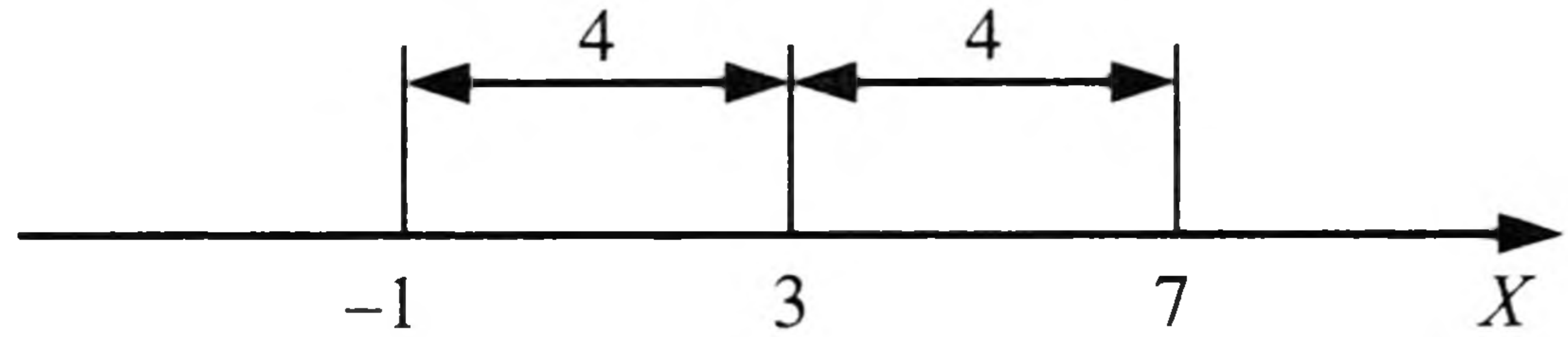
Вообще, если имеются два числа a и b, то $|a-b|$ равно расстоянию между ними на числовой прямой.



Мы уже встречали такое обозначение. Вспомните: $|AB|$ — это длина отрезка AB, то есть расстояние от точки A до точки B.

Ясно, что $|a - b| = |b - a|$ (расстояние от точки a до точки b равно расстоянию от точки b до точки a).

Решим уравнение $|x - 3| = 4$. Эту запись можно прочитать так: расстояние от точки x до точки 3 равно 4. Отметим на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.

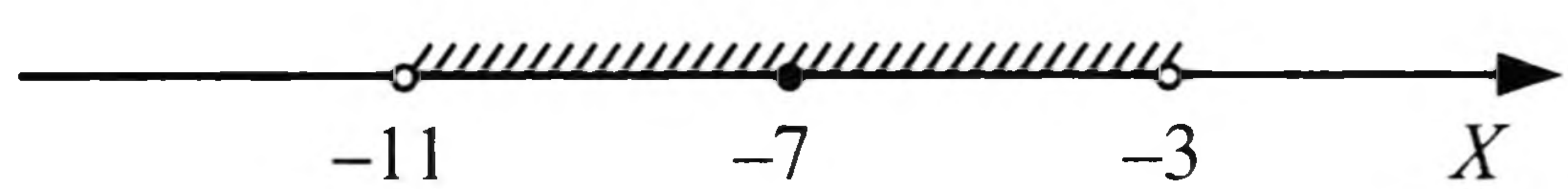


Мы видим, что наше уравнение имеет два решения: –1 и 7. Мы решили его самым простым способом — без использования определения модуля.

Перейдем к неравенствам. Решим неравенство $|x + 7| < 4$.

Эту запись можно прочитать так: «расстояние от точки x до точки –7 меньше четырех».

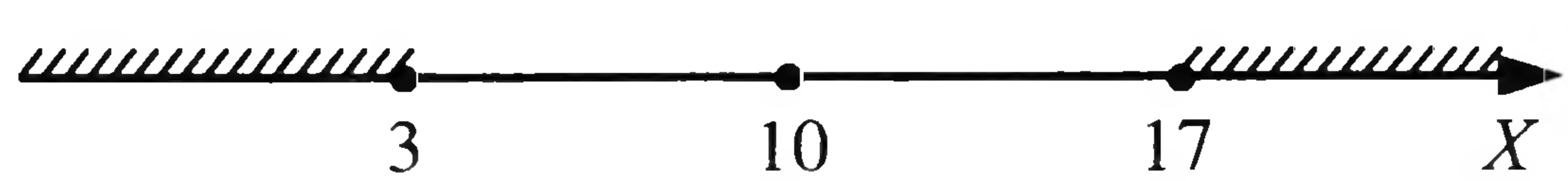
Отмечаем на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.



Ответ: (–11; –3).

Другой пример. Решим неравенство $|10 - x| \geq 7$.

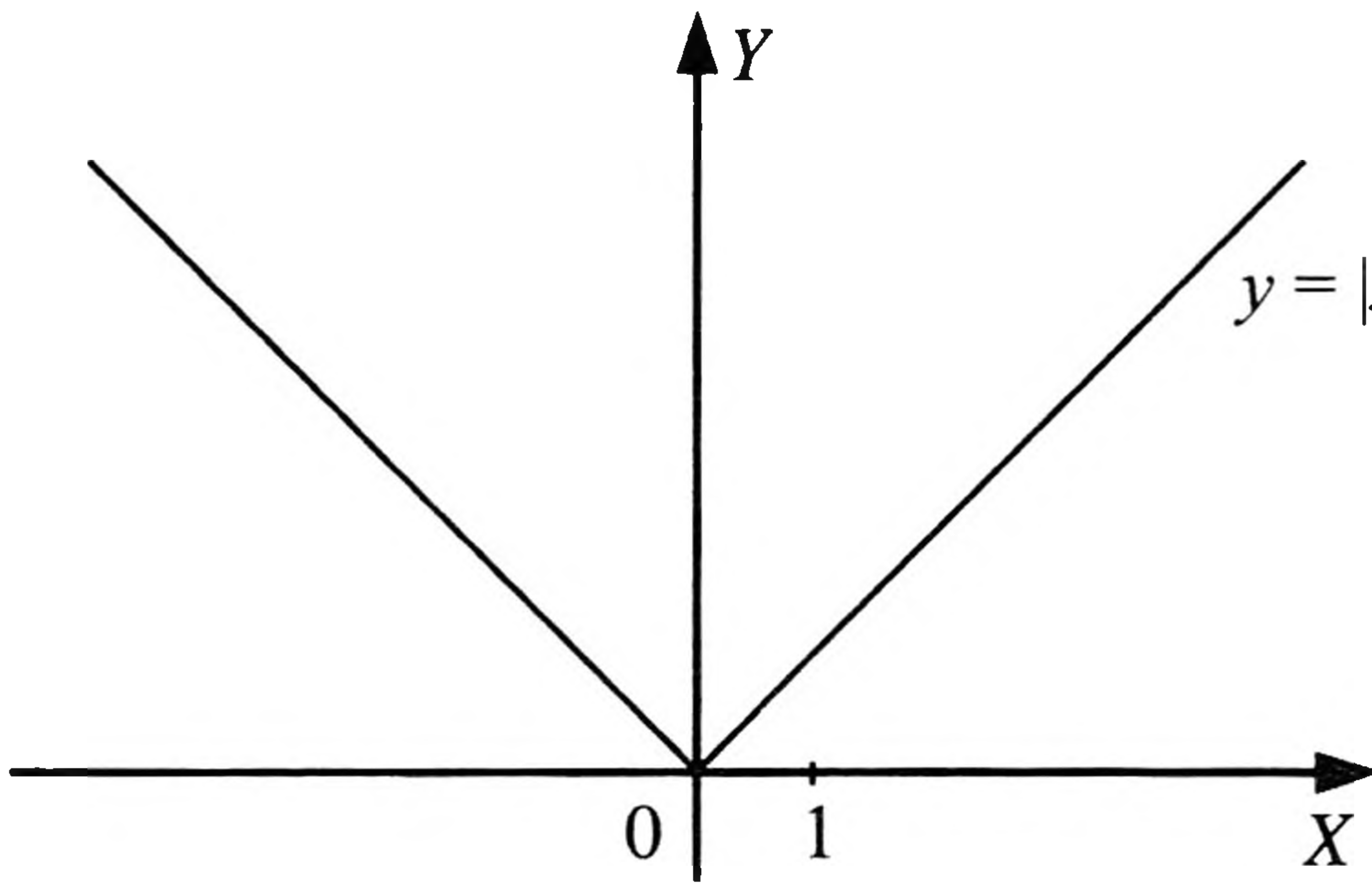
Расстояние от точки 10 до точки x больше или равно семи. Отметим эти точки на числовой прямой.



Ответ: $(-\infty; 3] \cup [17, +\infty)$.

График функции $y = |x|$

Этот график надо знать обязательно. Для $x \geq 0$ имеем $y = x$. Для $x < 0$ имеем $y = -x$. В результате получаем:



С помощью этого графика также можно решать уравнения и неравенства.

Корень из квадрата

Нередко в задачах ЕГЭ требуется вычислить $\sqrt{a^2}$, где a — некоторое число или выражение.

Вспомните, мы об этом уже говорили.

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

Действительно, по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a^2. Оно равно a при $a \geq 0$ и $-a$ при $a < 0$, т. е. как раз $|a|$.

Уравнения и неравенства с модулем

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым

Если на экзамене вам попадется уравнение или неравенство с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного экзаменационного времени.

Поэтому мы и хотим рассказать вам о приемах, упрощающих решение таких задач. Прежде всего вспомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим различные типы уравнений с модулем. К неравенствам перейдем позже.

Слева модуль, справа число

Это самый простой случай.

1. Решим уравнение $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

Есть только два числа, модули которых равны четырем. Это 4 и –4. Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \text{ или } x^2 - 5x + 4 = -4.$$

Второе уравнение не имеет решений. Решения первого: $x = 0$ и $x = 5$.

Ответ: 0; 5.

Слева функция под модулем, справа функция без модуля

Здесь приходится раскрывать модуль по определению... или соображать!

2. $|2 - x| = 5 - 4x$.

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем.

Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ 2 - x = 5 - 4x; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы: $x = 1$. У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

3. $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

Первый случай: $x \geq 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(x-3) - 7x + 11 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

Число x_2, будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x \ge 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли условию $x \ge 3$ число x_1. Для этого составим разность и определим ее знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит, x_1 больше трех и потому является корнем исходного уравнения.

Второй случай: $x < 3$. Снимаем модуль:

$$x^2 + 4(3-x) - 7x + 11 = 0,$$

$$x^2 - 11x + 23 = 0,$$

$$x_3 = \frac{11+\sqrt{29}}{2},\ x_4 = \frac{11-\sqrt{29}}{2}.$$

Число x_3 больше, чем $\frac{11}{2}$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4:

$$x_4 - 3 = \frac{11-\sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

4. $|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1$.

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не точный квадрат. Давайте лучше воспользуемся следующим соображением: уравнение вида $|A| = B$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = B, \\ B \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} A = -B, \\ B \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

То же самое, но немного по-другому:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B; \end{array}\right. \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geq 0$.

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:

$$2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1,$$

$$2x^2 - 9x - 3 = 0,$$

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{4},\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}.$$

Затем решаем второе уравнение:

$$2x^2 - 3x - 4 = 1 - 6x,$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

$$x_3 = 1,\ x_4 = -\frac{5}{2}.$$

Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

$$6x_1 - 1 = 6 \cdot \frac{9 + \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 + 6\sqrt{105}}{4} > 0;$$

$$6x_2 - 1 = 6 \cdot \frac{9 - \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 - 6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500} - \sqrt{3780}}{4} < 0;$$

$$6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0;$$

$$6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0.$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3.

Ответ: 1; $\frac{9 + \sqrt{105}}{4}$.

Квадратные уравнения с заменой $|x| = t$

Решим уравнение: $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

Поскольку $x^2 = |x|^2$, удобно сделать замену $|x| = t$. Получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 1, \\ |x| = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ \text{решений нет.} \end{array}\right.$$

Ответ: ± 1.

«Слева модуль, справа модуль»

Речь идет об уравнениях вида $|A| = |B|$. Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Все просто:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B. \end{array}\right.$$

Например, рассмотрим уравнение: $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$. Оно равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{array}\right.$$

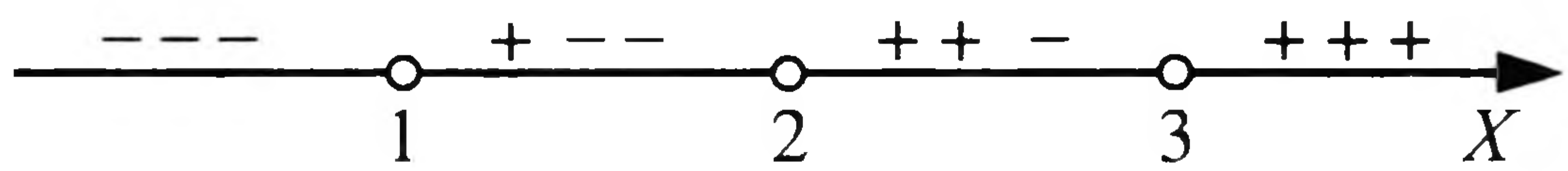
Остается решить каждое из уравнений совокупности и записать ответ.

Два или несколько модулей в уравнении. Метод интервалов для модулей

Решим уравнение: $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — **метод интервалов для модулей.**

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1, x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Сразу уточним, что точки, являющиеся границами интервалов, можно «приклеивать» либо к одному, либо к другому интервалу. Можно и к обоим сразу.

Случай 1.

$x \geq 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) = 4,$$
$$x = 5.$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2.

$2 \leq x < 3$. Последний модуль теперь раскрываем «с минусом»:

$$x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 2.$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3:

$1 \leq x < 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$4 = 4.$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Из предыдущего пункта мы узнали, что $x = 2$ — тоже решение. Значит, все числа из промежутка $[1; 2]$ — решения данного уравнения.

Случай 4.

$x < 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4,$$
$$x = 1.$$

Точка $x = 1$ не входит в этот промежуток. Зато она входит в предыдущий, значит, $x = 1$ является решением.

Ответ: $[1; 2] \cup \{5\}$.

«Модуль в модуле»

5. Решим уравнение: $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$.

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x < 3$. Получаем:

$$|3 - x - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|4 - 3x| = 4x - 10.$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому, чтобы раскрыть еще один модуль, приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} < x < 3$. Получаем в этом случае:

$$3x - 4 = 4x - 10,$$
$$x = 6.$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \le \frac{4}{3}$. Тогда:

$$4 - 3x = 4x - 10,$$
$$x = 2.$$

Это значение x также не годится.

Итак, при $x < 3$ решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) $x \ge 3$. Имеем:

$$|x - 3 - 2x + 1| = 4x - 10,$$
$$|x + 2| = 4x - 10.$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно в рассматриваемом промежутке, то есть при $x \ge 3$! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$x + 2 = 4x - 10,$$
$$x = 4.$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

Неравенства с модулем

Никаких принципиально новых идей здесь не возникает. Всеми необходимыми знаниями вы уже владеете. Поэтому мы разберем лишь две задачи.

6. $2|x-4|+|3x+5|\geq 16$.

1) $x>4$. Имеем:

$$2(x-4)+3x+5\geq 16,$$

$$x\geq \frac{19}{5}.$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x>4$. Иными словами, все числа из промежутка $(4;+\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3}\leq x\leq 4$. Имеем в данном случае:

$$2(4-x)+3x+5\geq 16,$$

$$x\geq 3.$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3;4]$.

3) $x<-\frac{5}{3}$. Имеем:

$$2(4-x)-3x-5\geq 16,$$

$$x\leq -\frac{13}{5}.$$

Так как $-\frac{13}{5}<-\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right]$ служат решениями исходного неравенства.

Остается объединить множества решений, полученные в трех рассмотренных случаях.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right]\cup[3;+\infty)$.

7. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

В этой задаче корни квадратного трехчлена под модулем — целые числа. Значит, раскрыть модуль по определению будет легко. А что будет в случае, если дискриминант не является точным квадратом?

Замените, например, под модулем –3 на –5. Объем вычислительной работы существенно возрастет!

Покажем другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид $|A| < B$. Очевидны следующие утверждения.

- Если $B \le 0$, то неравенство не имеет решений.
- Если $B > 0$, то неравенство равносильно двойному неравенству $-B < A < B$ или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases}$$

Иными словами, мы берем пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства $B > 0$, то есть решаем систему

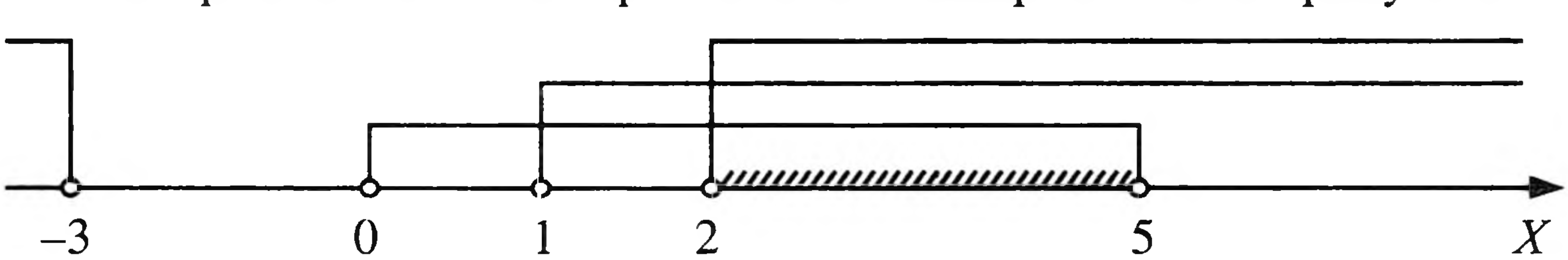
$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B, \\ B > 0. \end{cases}$$

В нашей задаче получаем:

$$\left|x^2-2x-3\right| < 3x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 < 3x-3, \\ x^2-2x-3 > -(3x-3), \\ 3x-3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x < 0, \\ x^2+x-6 > 0, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -3, \end{array}\right. \\ x > 1. \end{cases}$$

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют все три линии. Оно заштриховано.

Ответ: (2; 5).

Показательные уравнения

Вернемся к показательным уравнениям, причем на новом уровне. Покажем основные идеи их решения.

1. $33 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 29$.

Лучше всего вынести за скобку двойку в наименьшей степени:

$$2^{x-1}(33 - 2^2) = 29,$$
$$2^{x-1} \cdot 29 = 29,$$
$$2^{x-1} = 1,$$
$$x - 1 = 0,$$
$$x = 1.$$

2. $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$.

Делаем замену $t = 2^x$.

Тогда $4^x = 2^{2x} = t^2$, и относительно t мы получаем квадратное уравнение:

$$t^2 - 5t - 24 = 0.$$

Его корни: $t_1 = 8$ и $t_2 = -3$.

В первом случае имеем: $2^x = 8$, откуда $x = 3$.

Во втором случае: $2^x = -3$, решений нет.

Ответ: 3.

3. $3 \cdot 16^x + 36^x - 2 \cdot 81^x = 0$.

Замечаем, что $16 = 4^2$, $81 = 9^2$, а $36 = 4 \cdot 9$:

$$3 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 9^x - 2 \cdot 9^{2x} = 0.$$

Делим обе части на положительную величину 9^{2x}:

Делаем замену: $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$.

Очевидно, $t > 0$, так как показательная функция принимает только положительные значения.

$$3t^2 + t - 2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{2}{3}$.

В случае $t_1 = -1$ решений нет.

В случае $t_2 = \frac{2}{3}$ имеем единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Вообще, показательные уравнения вида

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C \cdot b^{2x} = 0$$

называются *однородными*. Для них существует стандартный прием решения — деление обеих частей на b^{2x} (эта величина не равна нулю, так как показательная функция может принимать только положительные значения). Именно этим приемом мы в данной задаче и воспользовались.

С однородными уравнениями мы еще встретимся — в тригонометрии. Там это будут уравнения вида

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0.$$

К ним мы применим похожий прием — деление на $\cos^2 x$.

Тригонометрические уравнения

Глава написана в соавторстве с И. В. Яковлевым

Эта тема — одна из самых сложных для абитуриентов. Тригонометрические уравнения встречаются в части 2 вариантов ЕГЭ, а также в заданиях вступительных экзаменов в вузы.

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии. О них, как правило, рассказывает абитуриенту репетитор.

Любой метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, чтобы привести их к простейшим, то есть к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения мы уже умеем решать.

Теперь — сами методы.

Замена переменной и сведение к квадратному уравнению

Это универсальный способ. Применяется в любых уравнениях — степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических, каких угодно. Замена не всегда видна сразу, и уравнение нужно сначала преобразовать.

1. Рассмотрим уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x = 5.$$

Преобразуем его, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 5,$$
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0.$$

Заменяя $\sin x$ на t, приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая его, получим:

$$t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что мы обозначили за t.

Первый корень приводит нас к уравнению $\sin x = \frac{3}{2}$.

Оно не имеет решений, поскольку $-1 \le \sin x \le 1$.

Второй корень дает простейшее уравнение $\sin x = 1$.

Решаем его: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Это и есть ответ.

2. Решить уравнение

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0.$$

Здесь нужно применить формулу косинуса двойного угла. Какую именно? Судя по уравнению — ясно, что ту, которая с косинусом!

$$3 + 2\cos^2 x - 1 + 3\sqrt{2}\cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0.$$

Теперь замена $t = \cos x$ и... дальше вы знаете.

3. Бывает, что оба рассмотренных выше метода нужно комбинировать. Например:

$$2\cos 2x - 3\cos^2 x - 2\sin x = 0.$$

Здесь все подчиняется синусу. Именно через него выражаем косинус двойного угла, а $\cos^2 x$ выражаем из основного тригонометрического тождества:

$$2(1 - 2\sin^2 x) - 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x = 0.$$

Дальше понятно: квадратное уравнение.

Разложение на множители

Очень хорошо, если уравнение удается представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль.

Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

4. Начнем с уравнения $\sin 2x = \cos x$.

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x \cos x = \cos x.$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что $\cos x$ обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим все в одну часть, и общий множитель — за скобки:

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0,$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$. Решаем каждое из них и берем объединение множества решений.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

5. Рассмотрим уравнение $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x$.

Применим формулу суммы синусов:

$$2\sin 5x \cos 2x = 2\sin 5x.$$

Дальше действуем так же, как и в предыдущей задаче:

$$2\sin 5x \cos 2x - 2\sin 5x = 0,$$
$$2\sin 5x (\cos 2x - 1) = 0.$$

Решаем уравнение $\sin 5x = 0$:

$$x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z. \qquad (1)$$

Решаем уравнение $\cos 2x - 1 = 0$:

$$x = \pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Ну что, перечисляем обе серии (1) и (2) в ответе через запятую? Нет! Серия (2) является в данном случае частью серии (1). Действительно, если в формуле (1) число n кратно 5, то мы получаем все решения серии (2).

Поэтому ответ: $x = \dfrac{\pi n}{5},\ n \in Z$.

Бывает, что перед разложением суммы или разности тригонометрических функций в произведение надо проделать обратную процедуру: превратить произведение в сумму (разность).

6. Решим уравнение: $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Домножаем обе части на 2, преобразуем левую часть в разность косинусов, а правую часть — в сумму косинусов:

$$2\sin 2x \sin 6x = 2\cos x \cos 3x,$$
$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x,$$
$$\cos 2x + \cos 8x = 0,$$
$$2\cos 5x \cos 3x = 0.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5};\ x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

7. Еще пример, где финальное разложение на множители поначалу замаскировано:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

Здесь используем формулу понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(которая является ничем иным, как переписанной в другом виде формулой косинуса двойного угла). Получаем:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1,$$

$$\cos 4x + \cos 6x = 0.$$

и дальше ясно.

8. Многие оказываются в ступоре при виде следующего уравнения:

$$\sin 3x = \cos 5x.$$

Переносим косинус влево и применяем формулу приведения $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\sin 3x - \cos 5x = 0,$$

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Дальше — дело техники.

9. А в этом примере нужны совсем другие манипуляции:

$$\sin 2x - \cos x + 2\sin x = 1.$$

Раскладываем синус двойного угла, все собираем в левой части и группируем:

$$2\sin x\cos x - \cos x + 2\sin x - 1 = 0,$$

$$\cos x\,(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1) = 0,$$

$$(2\sin x - 1)\,(\cos x + 1) = 0.$$

Цель достигнута.

Однородные уравнения

10. Рассмотрим уравнение: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Степень каждого слагаемого в левой части равна двум. Точно так же, как в обычном многочлене $a^2 + 2ab - 3b^2$ степень каждого слагаемого равна двум (степень одночлена — это сумма степеней входящих в него сомножителей).

Поскольку степени всех слагаемых одинаковы, такое уравнение называют *однородным*. Для однородных уравнений существует стандартный прием решения — деление обеих его частей на $\cos^2 x$. Возможность этого деления, однако, должна быть обоснована: а что, если косинус равен нулю?

Следующий абзац предлагаем выучить наизусть и всегда прописывать его при решении однородных уравнений.

Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда в силу уравнения и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$, и мы можем поделить обе его части на $\cos^2 x$.

В результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

и дальнейший ход решения трудностей не представляет.

11. Рассмотрим уравнение

$$10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3.$$

Если бы в правой части стоял ноль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приемом: заменим число 3 на выражение $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$7 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0,$$

и дело сделано.

12. Неожиданным образом сводится к однородному следующее уравнение:

$$3 \cos x + 2 \sin x = 1.$$

Казалось бы, где тут однородность? Переходим к половинному углу:

$$3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2},$$

$$4\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x=2\ \operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\in Z. \qquad (3)$$

Мы не случайно довели это уравнение до ответа. В следующем разделе оно будет решено другим методом, и ответ окажется внешне не похожим на этот.

Введение дополнительного угла

Этот метод применяется для уравнений вида $a\cos x+b\sin x=c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в 30°, 45° или 60°.

На ЕГЭ метод введения дополнительного угла может встретиться вам в задаче с параметрами.

13. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2.$$

Делим обе части на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1.$$

Замечаем, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=1.$$

В левой части получили синус суммы:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1,$$

откуда

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

14. Другой пример:

$$\cos x+\sin x=1.$$

Делим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сделаем теперь для разнообразия в левой части косинус разности:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Рассмотрим теперь общий случай — уравнение

$$a\cos x+b\sin x=c.$$

Делим обе части на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

Для чего мы выполнили это деление? Все дело в получившихся коэффициентах при косинусе и синусе. Легко видеть, что сумма их квадратов равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1.$$

При этом $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$.

Это означает, что данные коэффициенты сами являются косинусом и синусом некоторого угла φ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Соотношение (4) тогда приобретает вид:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Исходное уравнение сведено к простейшему. Теперь понятно, почему рассматриваемый метод называется *введением дополнительного угла*. Этим дополнительным углом как раз и является угол φ.

15. Снова решим уравнение

$$3\cos x + 2\sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{3^2+2^2}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Существует такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Например,

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Получаем:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$\cos(x-\varphi)=\frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,$$

$$x=\varphi\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,$$

$$x=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2\pi n,\ n\in Z.$$

В предыдущем разделе мы решили это уравнение, сведя его к однородному, и получили в качестве ответа выражение (3). Сравните с полученным только что выражением. А ведь это одно и то же множество решений!

Универсальная подстановка

Мы даем этот метод, поскольку он может быть полезен в решении задач с параметрами, а также в решении задач по геометрии.

Запомним две важные формулы:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Их ценность в том, что они позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла. Именно поэтому они получили название **универсальной подстановки**.

Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

16. Рассмотрим уравнение

$$6+6\cos x+5\sin x\cos x=0.$$

Обратите внимание — здесь использование универсальной подстановки сужает ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставляем $x = \pi + 2\pi n$ в уравнение и убеждаемся, что это — решение. Теперь обозначаем и применяем универсальную подстановку:

$$6+6\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{10t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=0.$$

После простых алгебраических преобразований приходим к уравнению:

$$5t^3-6t^2-5t-6=0,$$
$$(t-2)(5t^2+4t+3)=0,\ t=2.$$

Следовательно, .

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = 2\mathrm{arctg}2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Метод оценки в тригонометрических уравнениях

В некоторых уравнениях на помощь приходят оценки $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.

17. Рассмотрим уравнение

$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$

Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:

$$\begin{cases}\sin 5x = 1,\\ \sin 9x = 1.\end{cases}$$

Таким образом, должны одновременно выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases}5x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ 9x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5},\\ 9x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi k}{9},\ n,k\in Z.\end{cases}$$

Обратите внимание, что сейчас речь идет о *пересечении* множества решений (а не об их объединении, как это было в случае разложения на множители). Нам еще предстоит понять, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Имеем:

$$\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}.$$

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π:

$$9 + 36n = 5 + 20k,$$
$$20k = 36n + 4,$$
$$5k = 9n + 1.$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m$, $5m + 1,5m + 2,5m + 3$ и $5m + 4$, где $m \in Z$. Для того чтобы $9n + 1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m + 1$.

Искать k, в принципе, уже не нужно. Сразу находим x:

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi(5m+1)}{5}=\frac{\pi}{2}+2\pi m.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z.$

Учет тригонометрических неравенств

18. Рассмотрим уравнение:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0.$$

Перепишем его в виде, пригодном для возведения в квадрат:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x.$$

Тогда наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x,\\ \sin x\le 0.\end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$5\cos x-(2\cos^2 x-1)=4(1-\cos^2 x),$$
$$2\cos^2 x+5\cos x-3=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2},\\ \cos x = -3.\end{array}\right.$$

Второе уравнение данной совокупности не имеет решений, а первое дает две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь нужно произвести отбор решений в соответствии с неравенством $\sin x \le 0$. Серия x_1 не удовлетворяет этому неравенству, а серия x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, решением исходного уравнения служит только серия x_2.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Мы рассмотрели основные методы решения тригонометрических уравнений. Знать их нужно обязательно, это — необходимая база.

В более сложных и нестандартных задачах нужно еще догадаться, как использовать те или иные методы. Это приходит только с опытом.

Неравенства на ЕГЭ по математике. Часть 2

Иррациональные неравенства

Продолжаем тему решения неравенств. Мы уже знаем, как решать квадратичные и дробно-рациональные неравенства. Умеем применять метод интервалов. Недавно познакомились с методами решения задач с модулем. Какие же еще темы традиционно вызывают сложности у школьников? — Конечно, это иррациональные неравенства!

В задачах ЕГЭ вы вряд ли увидите их в чистом виде. Скорее всего, они окажутся ключевым элементом более сложной задачи.

1. $\sqrt{x-1} < 3-x.$

Вспомним определение и свойства арифметического квадратного корня, о которых много раз говорили в этой книге.

Арифметический квадратный корень из числа *a* — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$

$$\sqrt{a} \ge 0,\ a \ge 0.$$

Это означает, что выражение под корнем должно быть неотрицательно. Сам корень — тоже величина неотрицательная. Получается, что правая часть данного неравенства больше, чем неотрицательное выражение, и потому она положительна. Эти два условия задают область допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 3-x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 1, \\ x < 3. \end{cases}$

Хорошо, вернемся к самому неравенству. Когда-то мы уже говорили, что выражение «избавиться от корня» некорректно. Более правильно сказать — «возведем в квадрат обе части неравенства». Конечно, мы делаем это с учетом ОДЗ.

Обратите внимание на важное правило.

Возводить обе части неравенства в квадрат можно только в случае, если они неотрицательны.

У нас это правило выполняется. Возведем в квадрат обе части:

$$x - 1 < 9 - 6x + x^2$$
$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

Вы уже знаете, как решать квадратное неравенство. Находим нули квадратичной функции, рисуем параболу, отмечаем промежутки, на которых данная квадратичная функция положительная.

$$\left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5. \end{array}\right.$$

И с учетом ОДЗ получаем ответ: [1; 2).

2. $\sqrt{7+x} \ge 7 - 2x$.

Как вам кажется — похожа ли эта задача на предыдущую? Надо написать ОДЗ, возвести в квадрат обе части… Но подождите, мы только что сказали, что возводить в квадрат обе части неравенства можно только в случае, если они неотрицательны. А здесь выражение $7 - 2x$ может быть любым — ведь, в отличие от предыдущей задачи, никаких ограничений для него нет.

Получается, в этой задаче надо рассмотреть два случая.

Первый случай. Если выражение $7 - 2x$ неотрицательно, значит, обе части неравенства возводим в квадрат. Учитываем при этом, что выражение под корнем $7 + x$ неотрицательно.

Получаем систему условий:

$$\begin{cases} 7 + x \ge 0, \\ 7 - 2x \ge 0, \\ 7 + x \ge 49 - 28x + 4x^2. \end{cases}$$

Заметим, что первое неравенство в этой системе автоматически следует из третьего. В самом деле, $7 + x$ не меньше, чем $(7 - 2x)^2$, и значит, оно точно неотрицательно.

Второй случай. Правая часть отрицательна, то есть $7 - 2x < 0$. Конечно же, в квадрат возводить нельзя. Но это и не нужно! В левой части неравенства — корень квадратный, величина неотрицательная. В правой — выражение $7 - 2x$, которое меньше нуля. Неравенство выполняется! В этом случае мы получаем:

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases}$$

Итак, исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 7 + x \geq 49 - 28x + 4x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем каждую из систем отдельно.

1-я система

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 7 + x \geq 49 - 28x + 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x \leq 3{,}5, \\ 4x^2 - 29x + 42 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x \leq 3{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq 5{,}25. \end{array}\right. \end{cases}$$

$x \in [2; 3{,}5]$

или

2-я система

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ x > 3{,}5. \end{cases}$$

$x \in (3{,}5; +\infty)$

Объединим решения.

Ответ: $[2; \infty)$.

3. Следующее неравенство. Задачи такого типа дают на первом, самом легком, пробном ЕГЭ, который официально проводят в сентябре.

$$\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0.$$

Внимательно смотрим на это неравенство. Выражение под корнем должно быть неотрицательно. Более того — оно должно быть положительно, поскольку, если оно равно нулю, мы получим ложное неравенство $0>0$.

В левой части неравенства — дробь, в правой ноль. Дробь положительна тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Числитель положителен — как квадратный корень из положительного числа. Тогда и знаменатель должен быть положителен! Получим:

$$\begin{cases} 3+2x>0, \\ 2x^2-x-1>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1,5; \\ \left[\begin{array}{l} x<-0,5, \\ x>1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $(-1,5 : -0,5)\cup(1 : +\infty)$.

Хотите еще иррациональных неравенств? Пожалуйста!

4. Решите неравенство $\dfrac{1}{6x^2-5x}\geq\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Сделаем замену переменной.

Пусть $t=\sqrt{6x^2-5x+1}$. Конечно же, $t\geq 0$.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t^2-1}\geq\dfrac{1}{t-1}, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{t^2-1}\geq 0, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq t<1.$$

Вернемся к переменной x и получим ответ.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{1};\dfrac{5}{6}\right)$.

Вот еще прекрасная задача.

5. Решите неравенство $\sqrt{5-x} < \dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Первым делом, конечно, хорошо бы записать ОДЗ. Все подкоренные выражения должны быть неотрицательны, а $x-1$ к тому же и не равно нулю.

$$5-x \geq 0,$$
$$x-1>0,$$
$$x^3-7x^2+14x-5 \geq 0.$$

Поскольку и левая и правая часть неотрицательны, возведем неравенство в квадрат и решим. Но что делать с неравенством $x^3-7x^2+14x-5 \geq 0$? Как разложить это выражение на множители? Ведь оно третьей степени. Даже если вы учитесь в матшколе и знакомы со схемой Горнера — попробуйте подобрать корни! Через полчаса или час вы поймете, что корни уравнения $x^3-7x^2+14x-5=0$ подобрать не удастся.

Так что же делать?

Давайте запишем первые шаги решения как цепочку равносильных преобразований:

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-1>0, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geq 0, \\ 5-x < \dfrac{x^3-7x^2+14x-5}{x-1}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-1>0, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geq 0, \\ (5-x)(x-1) < (x^3-7x^2+14x-5). \end{cases}$$

В последнем неравенстве мы домножили обе части на $x-1$, поскольку это выражение положительно.

Сейчас мы расскажем вам еще об одном полезном методе. Это метод пристального взгляда. Если ничего не помогает, а задачу решить надо, смотрим на нее, анализируем, что мы видим, и перебираем всевозможные «отмычки». Или изобретаем новую.

Рассмотрим последнее неравенство системы. Из условий $5 - x \geq 0$ и $x - 1 > 0$ следует, что их произведение неотрицательно. Тогда выражение $x^3 - 7x^2 + 14x - 5$ оказывается больше, чем неотрицательное число, а это значит, что

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 5 > 0.$$

Отлично! Мы обошли самое сложное неравенство системы, доказав, что при выполнении остальных условий оно автоматически окажется верным.

Итак,

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)\cdot(x-4) > 0, \\ 1 < x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ 4 < x \leq 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (4; 5]$.

Показательные и логарифмические неравенства

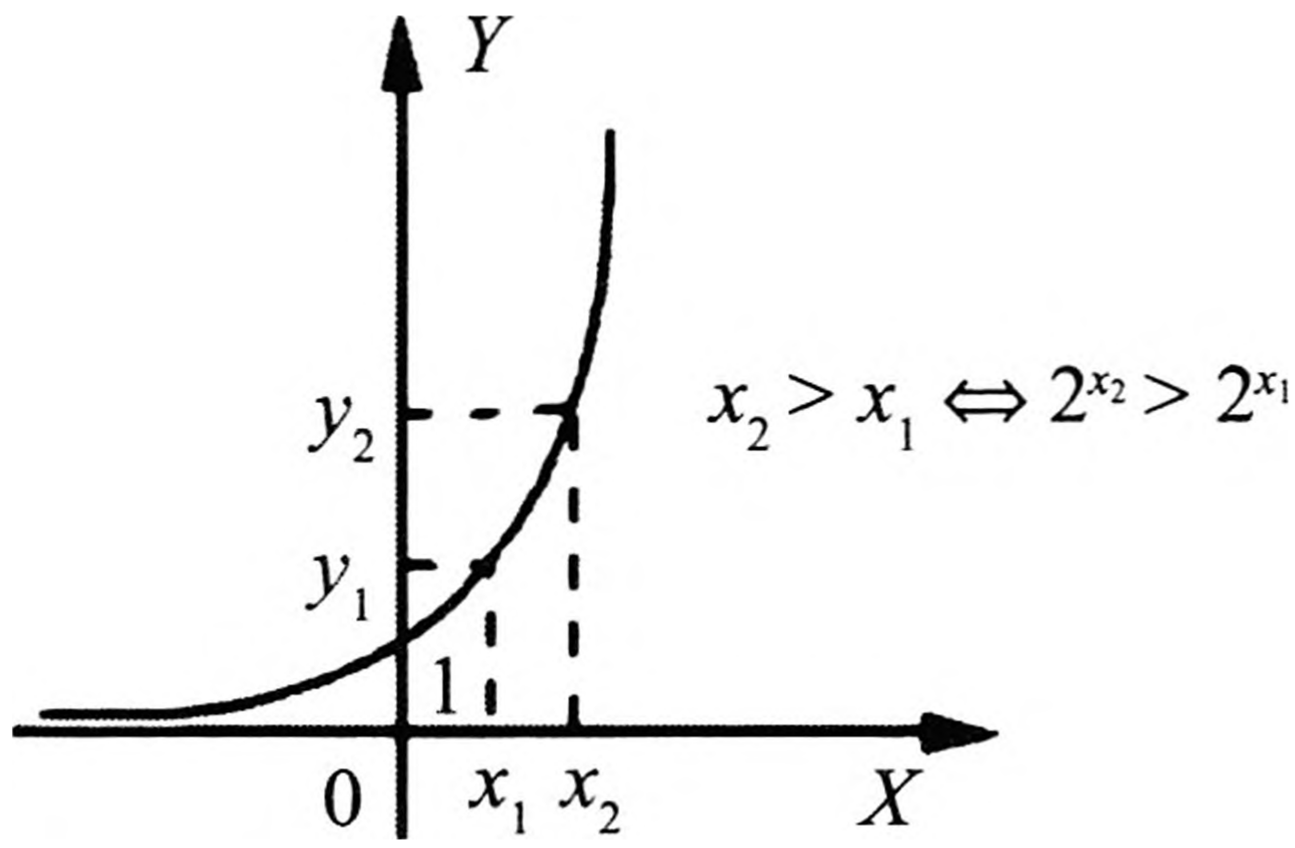
Знакомство с этой темой мы начнем с самых простых неравенств. Расскажем, что на самом деле стоит за выражением «отбросим логарифмы» и зачем нужна область допустимых значений.

1. $2^x > 8$.

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, представим правую часть в виде степени числа 2:

$$2^x > 2^3.$$

Когда мы спрашиваем школьников, что делать дальше, они обычно отвечают: «отбросим основания!» Мы не против такой формулировки, просто надо четко представлять себе, почему мы так делаем. А для этого — вспомним, как выглядит график показательной функции $y = 2^x$.



Видим, что эта функция монотонно возрастает, то есть большему значению x отвечает большее значение y. И наоборот, если $2^{x_2} > 2^{x_1}$, то $x_2 > x_1$.

Итак, от неравенства $2^x > 2^3$ можно перейти к алгебраическому неравенству $x > 3$.

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

2. Следующее неравенство: $2^x > 7$.

Так же, как и в предыдущем примере, представим правую часть в виде значения показательной функции. Как это сделать? С помощью логарифма, конечно:

$$7 = 2^{\log_2 7}.$$

Получаем:

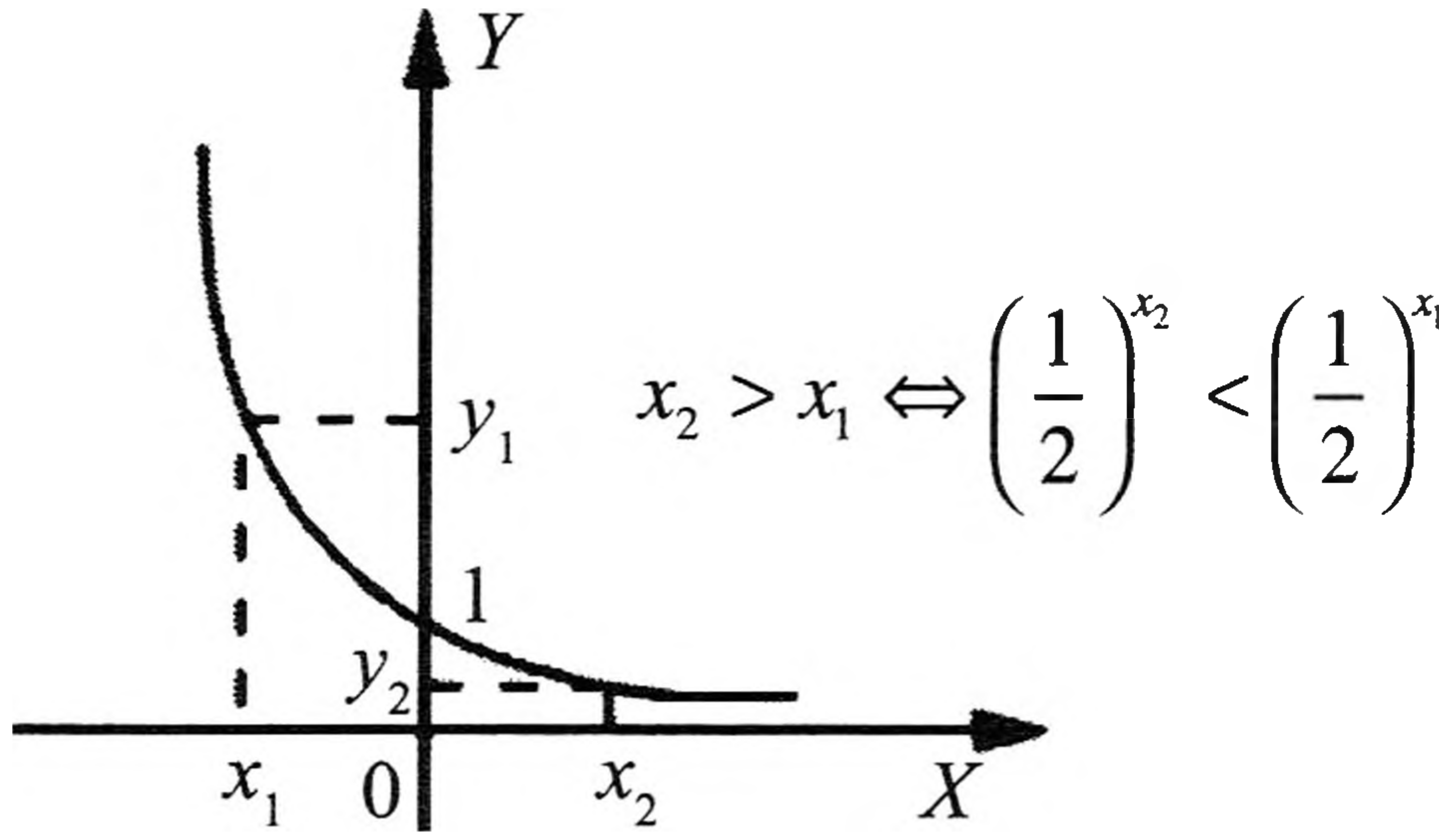
$$2^x > 2^{\log_2 7};$$
$$x > \log_2 7.$$

3. Еще одно неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$.

Здесь правую часть удобно представить как $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Вспомним, как выглядит график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Эта функция монотонно убывает (так как основание степени меньше единицы), поэтому большее значение функции соответствует меньшему значению аргумента. То есть из неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$ следует, что $x < 4$. Знак неравенства меняется!

Похожая ситуация возникает и при решении логарифмических неравенств.

4. Рассмотрим неравенство $\log_3 x > \log_3 5$.

Поскольку логарифмы определены только для положительных чисел, необходимо, чтобы x был положительным. Условие $x > 0$ называется областью допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства. Только при таких x неравенство имеет смысл.

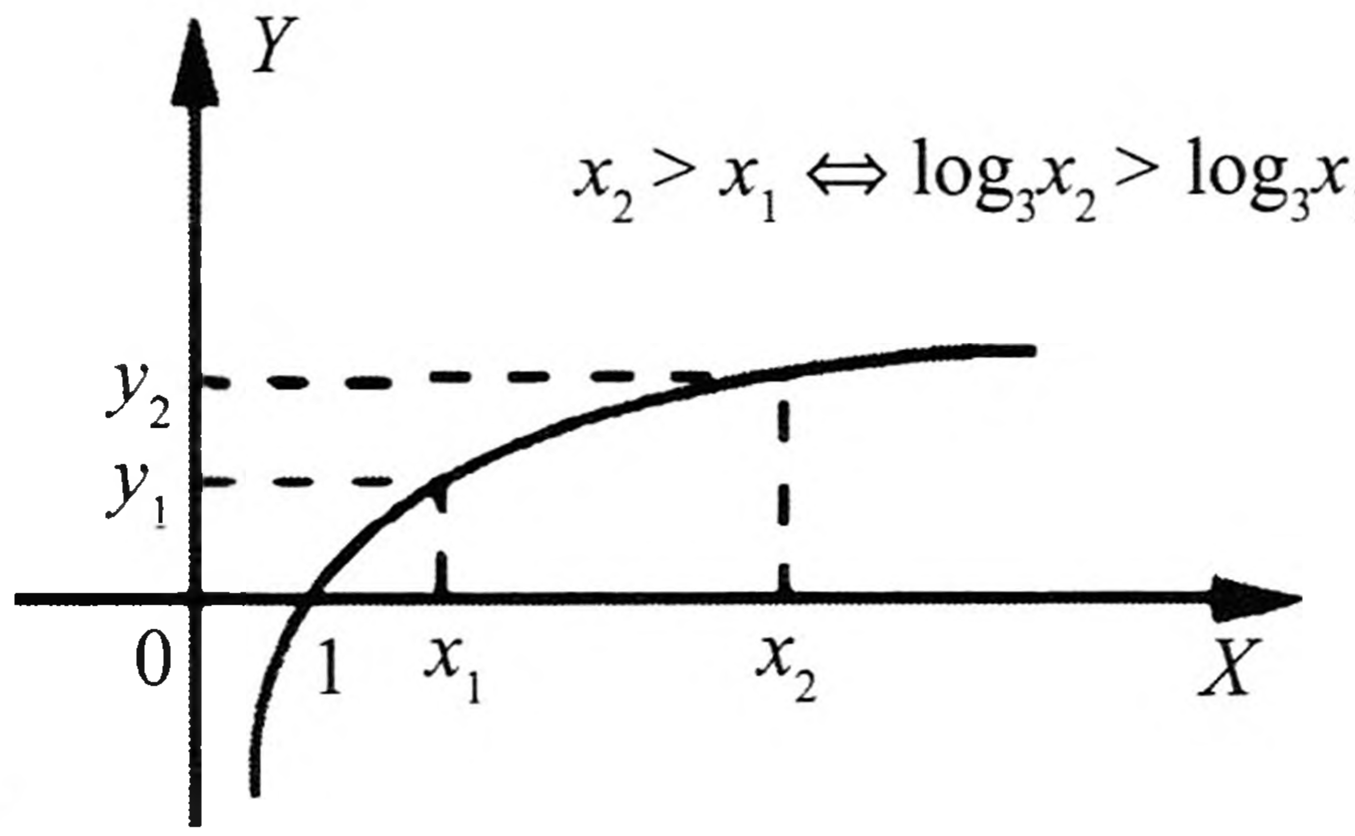
Что делать дальше? Стандартный ответ, который дают школьники, — «Отбросить логарифмы!»

Что ж, эта формулировка лихо звучит и легко запоминается. Но почему мы все-таки можем это сделать?

Мы люди, мы обладаем интеллектом. Наш разум устроен так, что все логичное, понятное, имеющее внутреннюю структуру запоминается и применяется намного лучше, чем случайные и не связанные между собой факты. Вот почему важно не механически вызубрить правила, как дрессированная собака-математик, а действовать осознанно.

Так почему же мы все-таки «отбрасываем логарифмы»?

Ответ простой: если основание больше единицы (как в нашем случае), логарифмическая функция монотонно возрастает, значит, большему значению x соответствует большее значение y и из неравенства $\log_3 x_2 > \log_3 x_1$ следует, что $x_2 > x_1$.



Обратите внимание, мы перешли к алгебраическому неравенству, и знак неравенства при этом — сохраняется.

Ответ: $x > 5$.

Следующее логарифмическое неравенство тоже простое.

5. $\log_5 (15 + 3x) > \log_5 2x$.

Начнем с области допустимых значений. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому

$$\begin{cases} 15 + 3x > 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 0$.

Теперь от логарифмического неравенства перейдем к алгебраическому — «отбросим» логарифмы. Поскольку основание логарифма больше единицы, знак неравенства при этом сохраняется.

$$15 + 3x > 2x.$$

Получаем: $x > -15$.

Итак,

$$\begin{cases} x > 0; \\ x > -15. \end{cases}$$

Ответ: $x > 0$.

А что же будет, если основание логарифма меньше единицы? Легко догадаться, что в этом случае при переходе к алгебраическому неравенству знак неравенства будет меняться.

Приведем пример.

6. $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$.

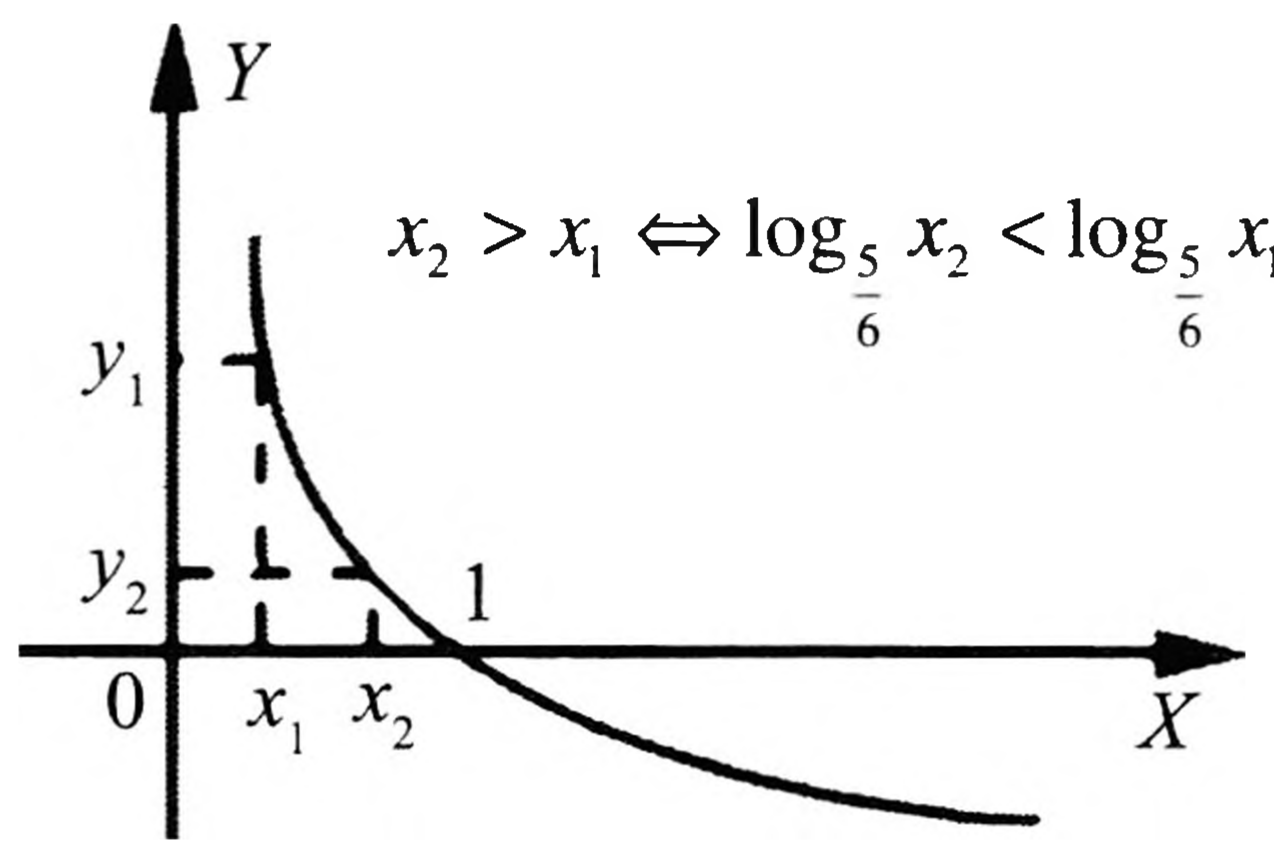
Запишем ОДЗ. Выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны, то есть

$$\begin{cases} 2x-9>0; \\ x>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 4{,}5$.

Поскольку $\frac{5}{6}<1$, логарифмическая функция с основанием $\frac{5}{6}$ монотонно убывает.

А это значит, что большему значению функции отвечает меньшее значение аргумента.



И если $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$, то

$$2x-9 \leq x.$$

Получим, что $x \leq 9$.

Учитывая, что $x > 4{,}5$, запишем ответ: $x \in (4{,}5; 9]$.

В следующей задаче показательное неравенство сводится к квадратному. Так что тему «Квадратные неравенства» рекомендуем повторить.

7. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Заметим, что $4^x = 2^{2x}$, $10^x = 5^x \cdot 2^x$, и запишем неравенство в виде:

$$2^{2x} - 5^x \cdot 2^x - 2 \cdot 5^{2x} > 0.$$

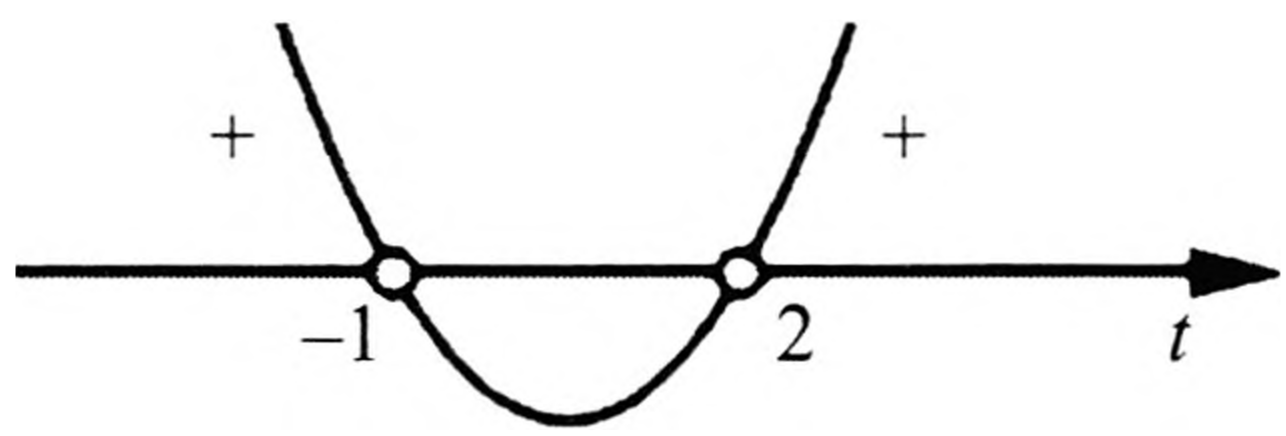
Разделим обе части на положительную величину 5^{2x} и обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$.

Получим квадратное неравенство:

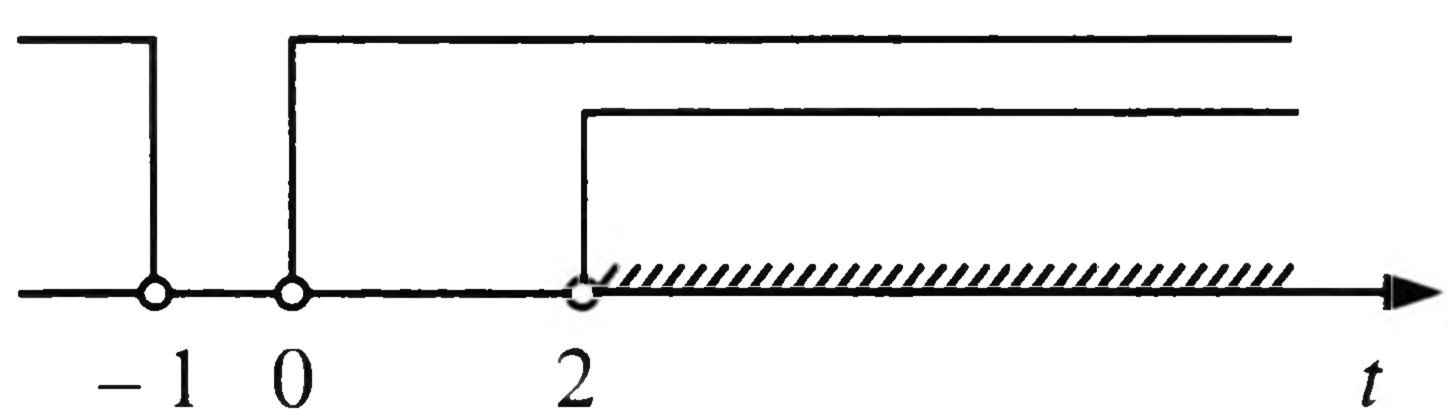
$$t^2 - t - 2 > 0.$$

Кроме того, $t > 0$.

Графиком функции $y = t^2 - t - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, получим $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. В этих точках наша парабола пересекает ось t.



Отметим на числовой прямой промежутки, являющиеся решениями неравенств $t^2 - t - 2 > 0$ и $t > 0$.



Видим, что обоим неравенствам удовлетворяют значения $t > 2$.

Но решение еще не закончено! Нам нужно вернуться к переменной x. Вспомним, что

$$t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

и получим: $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$.

Представим 2 в виде степени с основанием $\frac{2}{5}$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}.$$

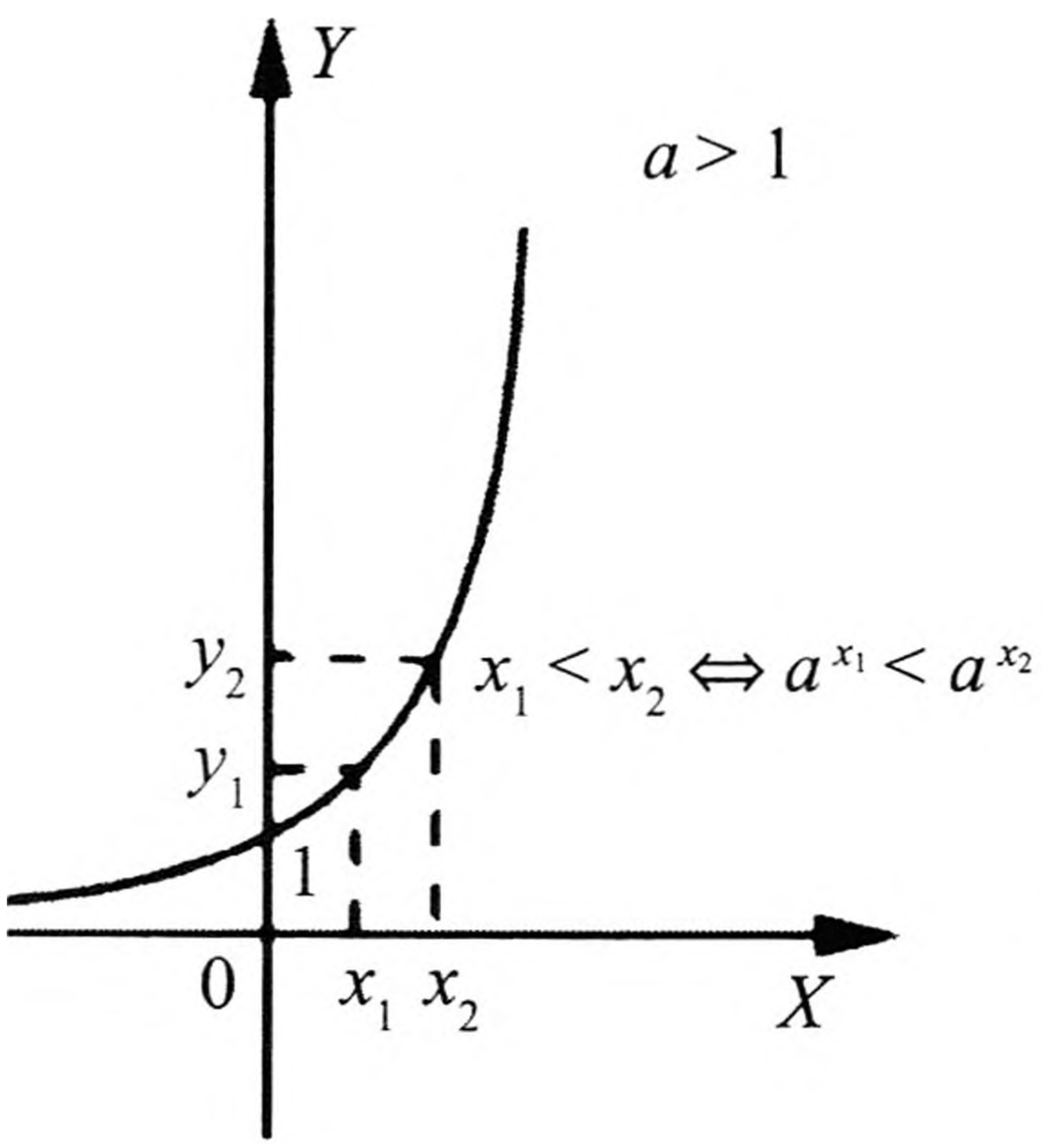
Получим:

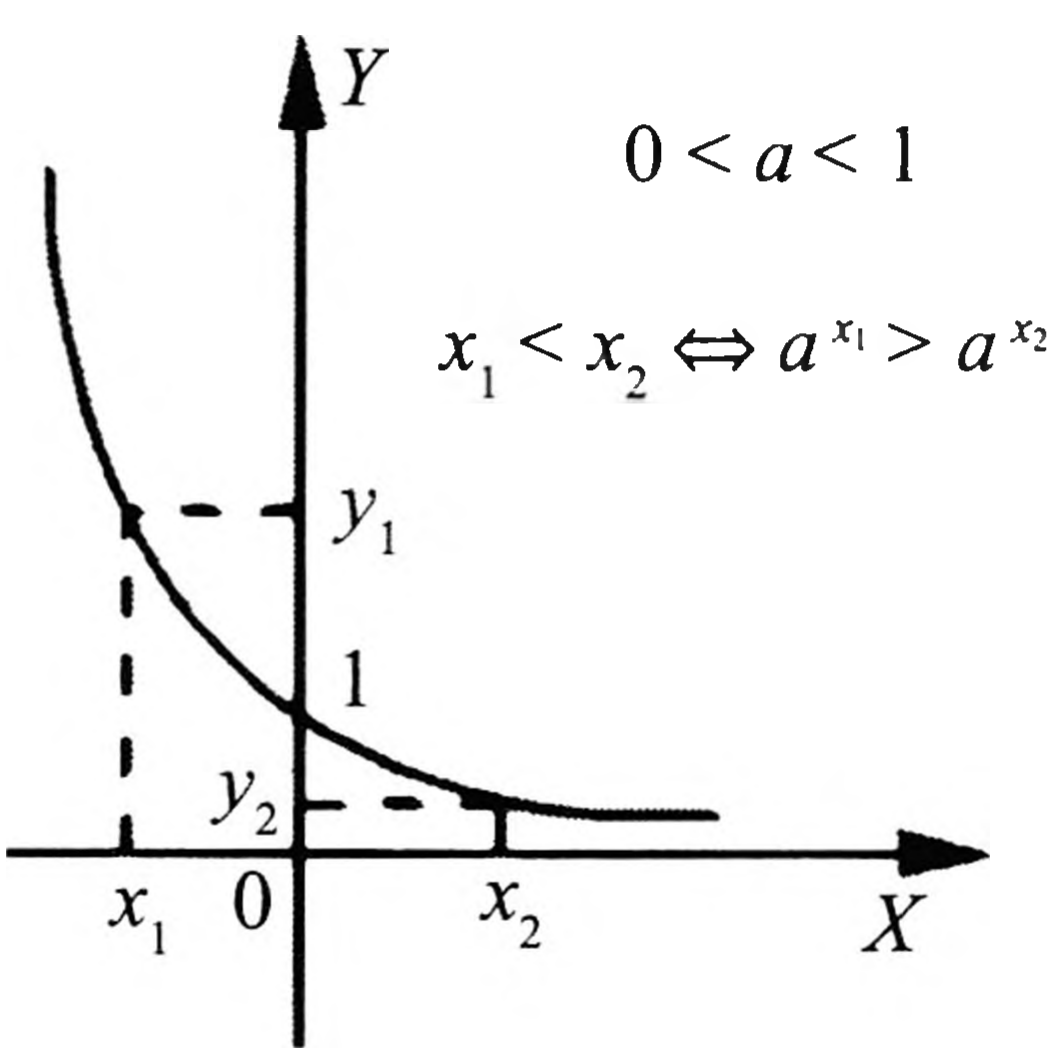
$$x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Ответ: $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

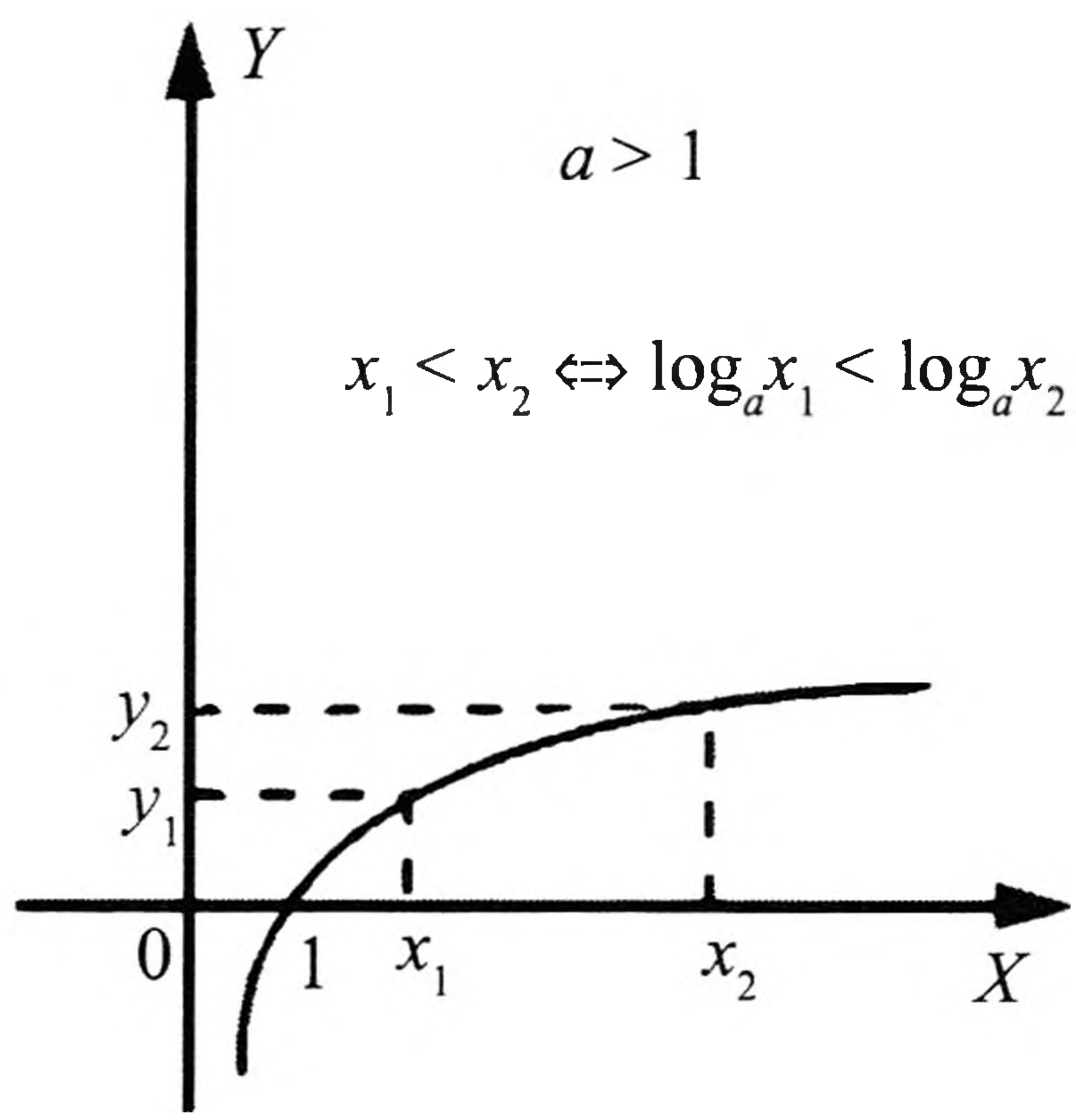
Подведем итоги. И показательные, и логарифмические неравенства решаются практически одинаково. В первом случае — «отбрасываем основания». Во втором — «отбрасываем логарифмы». При этом, если основание больше единицы, знак неравенства сохраняется. Если основание меньше единицы — знак неравенства меняется на противоположный.

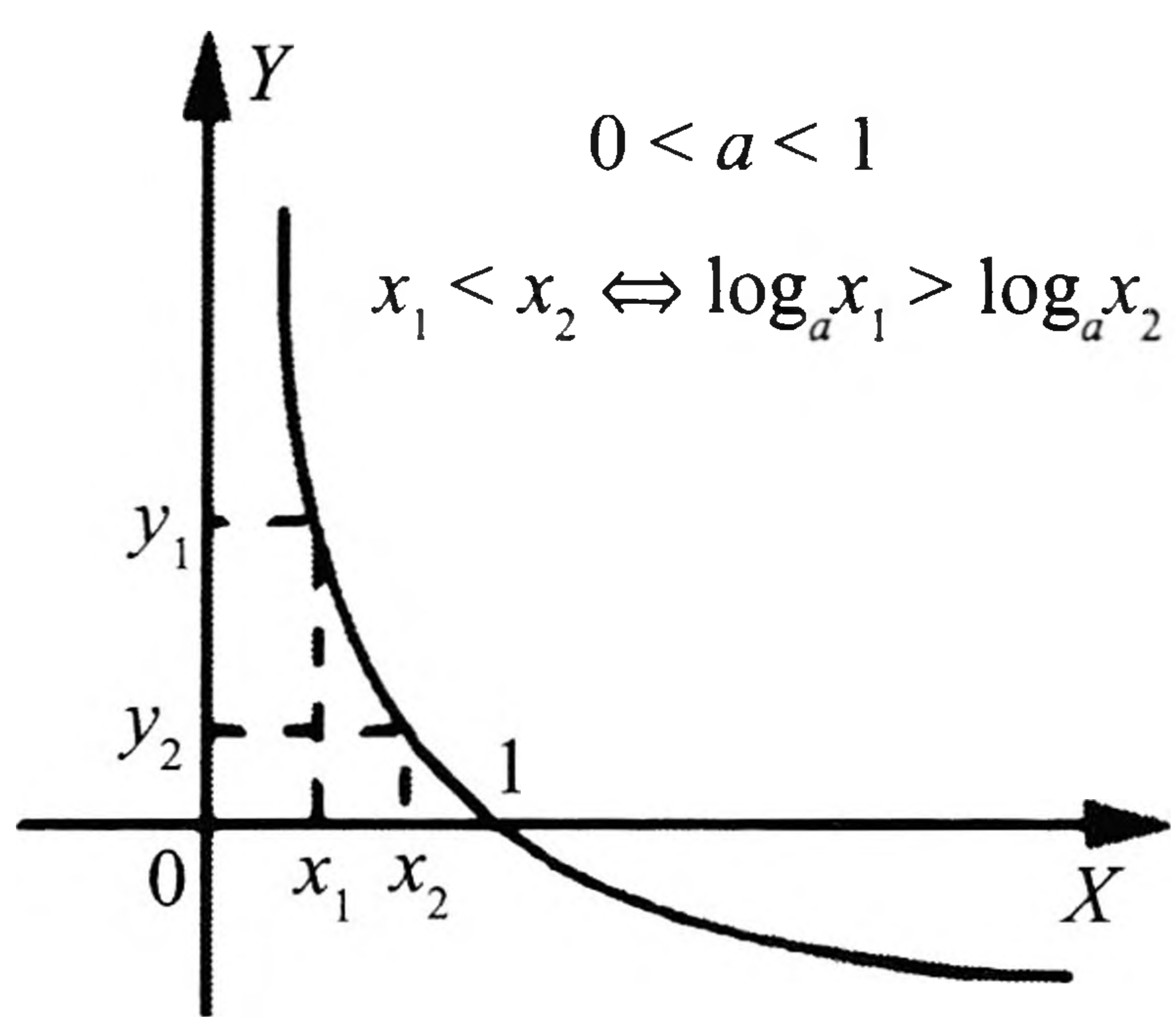
Показательные неравенства





Логарифмические неравенства





Метод рационализации

Продолжим рассказ о решении показательных и логарифмических неравенств. Разберем сложные задачи второй части ЕГЭ и расскажем о специальных приемах, упрощающих решение. Например, во многих задачах не обойтись без **метода замены множителя**. По-другому его называют **метод рационализации неравенства.**

Начнем с задач, где нет никаких хитростей. Достаточно помнить свойства логарифмов, не забывать об ОДЗ и знать универсальные приемы — такие, как замена переменной и метод интервалов.

1. $4\log_x 4 + 3\log_{\frac{4}{x}} 4 + 4\log_{16x} 4 \le 0.$

Запомним правило: **если в уравнении или неравенстве присутствуют корни, дроби или логарифмы — решение надо начинать с области допустимых значений.**

Поскольку основание логарифма должно быть положительно и не равно единице, получим систему условий:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \dfrac{4}{x} \ne 1; \\ x \ne 1; \\ 16x \ne 1. \end{cases}$$

Упростим эту систему:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \ne 4; \\ x \ne 1; \\ x \ne \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Это область допустимых значений неравенства.

Мы видим, что переменная содержится в основании логарифма. Перейдем к постоянному основанию. Напомним, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

В данном случае удобно перейти к основанию 4.

$$\frac{4}{\log_4 x}+\frac{3}{\log_4 \frac{4}{x}}+\frac{4}{\log_4 16x}\le 0;$$

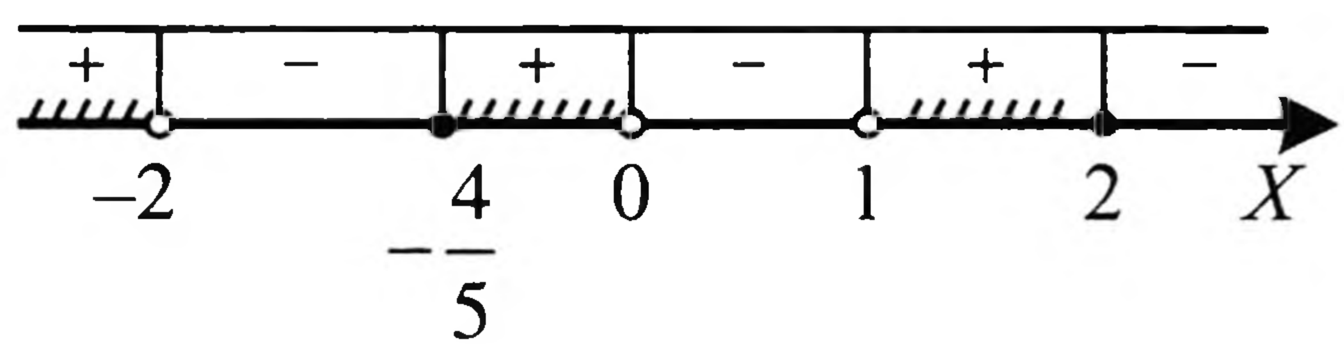
$$\frac{4}{\log_4 x}+\frac{3}{1-\log_4 x}+\frac{4}{2+\log_4 x}\le 0.$$

Сделаем замену $\log_4 x = t$:

$$\frac{4}{t}+\frac{3}{1-t}+\frac{4}{2+t}\le 0.$$

Упростим неравенство и решим его методом интервалов:

$$\frac{(t-2)\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t(1-t)(2+t)}\ge 0.$$



Итак,

$$t\in(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{4}{5};0\right)\cup(1;2].$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x<-2,\\ -\frac{4}{5}\le\log_4 x<0,\\ 1\le\log_4 x<2.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le\frac{1}{16},\\ 4^{-\frac{4}{5}}\le x<1,\\ 4<x\le 16.\end{array}\right.$$

Мы добавили условие $x > 0$ (из ОДЗ).

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup\left[4^{-\frac{4}{5}};1\right)\cup(4;16]$.

2. Следующая задача тоже решается с помощью метода интервалов.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\ge -1.$$

Как всегда, решение логарифмического неравенства начинаем с области допустимых значений. В данном случае

$$\frac{2-3x}{x}>0.$$

Это условие обязательно должно выполняться, и к нему мы вернемся. Рассмотрим пока само неравенство. Запишем левую часть как логарифм по основанию 3:

$$\log_3\frac{x}{2-3x}\geq -1.$$

Правую часть тоже можно записать как логарифм по основанию 3, а затем перейти к алгебраическому неравенству:

$$\log_3\frac{x}{2-3x}\geq \log_3\frac{1}{3};$$

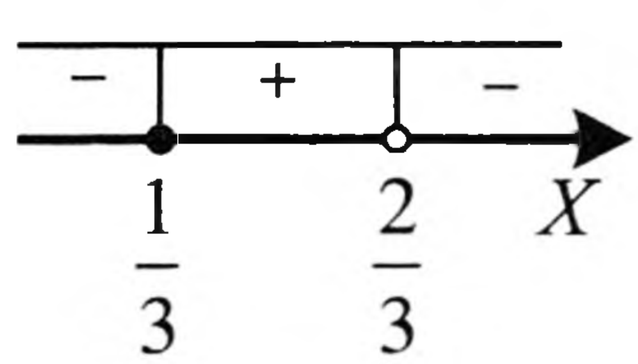
$$\frac{x}{2-3x}\geq\frac{1}{3}.$$

Видим, что условие $\frac{2-3x}{x}>0$ (то есть ОДЗ) теперь выполняется автоматически. Что ж, это упрощает решение неравенства.

$$\frac{x}{2-3x}-\frac{1}{3}\geq 0;$$

$$\frac{3x-1}{2-3x}\geq 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

3. Следующая задача была предложена на ЕГЭ несколько лет назад. Вид у нее устрашающий, однако решается она довольно быстро.

$$\log_2\left(\left(5^{-x^2}-3\right)\left(5^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log\frac{5^{-x^2}-3}{5^{-x^2+9}-1}>\log_2\left(5^{4-x^2}-2\right)^2.$$

Выражение 5^{-x^2} навязчиво повторяется в условии задачи. А это значит, что можно сделать замену:

$$5^{-x^2}=t.$$

Поскольку показательная функция принимает только положительные значения, $t>0$. Тогда

$$5^{-x^2+9}=5^9\cdot t;$$

$$5^{4-x^2}=5^4\cdot t=625t.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2\left((t-3)\left(5^9\cdot t-1\right)\right)+\log\frac{t-3}{5^9\cdot t-1}>\log_2\left(625t-2\right)^2.$$

Уже лучше. Найдем область допустимых значений неравенства. Мы уже сказали, что $t>0$. Кроме того, $(t-3)\,(5^9\cdot t-1)>0$.

Если это условие выполнено, то и частное $\dfrac{t-3}{5^9\cdot t-1}$ будет положительным.

А еще выражение под логарифмом в правой части неравенства должно быть положительно, то есть $(625t-2)^2>0$.

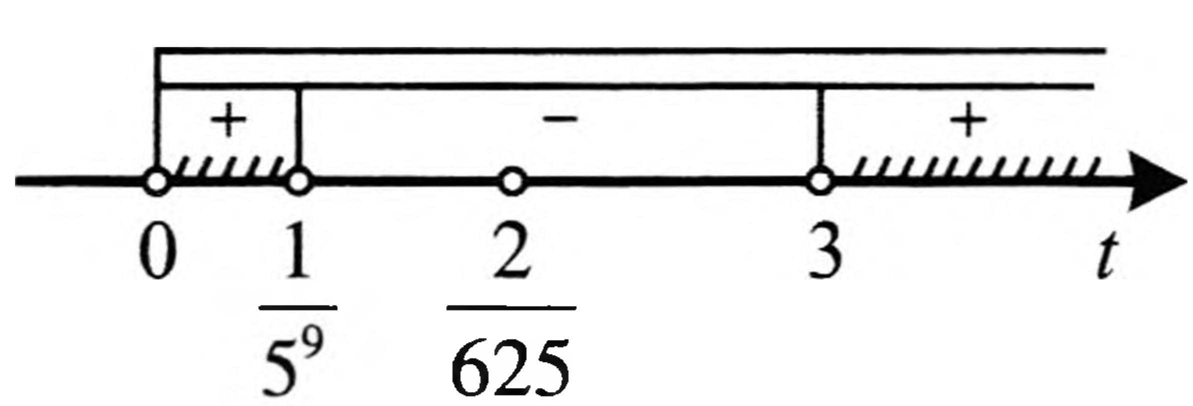
Это означает, что

$$625t-2\neq 0,\ \text{то есть } t\neq\frac{2}{625}.$$

Аккуратно запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} t>0; \\ \dfrac{t-3}{5^9\cdot t-1}>0; \\ 625t-2\neq 0. \end{cases}$$

и решим получившуюся систему, применяя метод интервалов.



Итак, $t\in\left(0;\dfrac{1}{5^9}\right)\cup(3;+\infty)$.

Ну что ж, полдела сделано — разобрались с ОДЗ. Решаем само неравенство.

Сумму логарифмов в левой части представим как логарифм произведения:

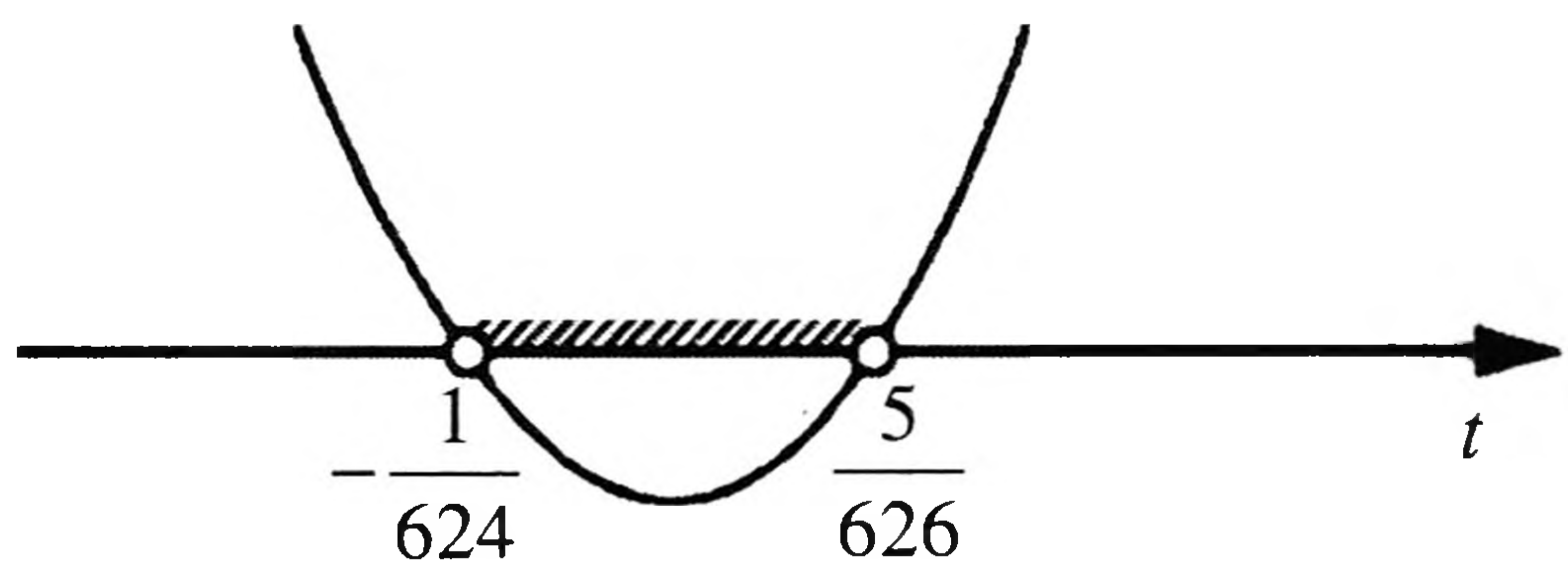
$$\log_2 \frac{(t-3)\cancel{(5^9\cdot t-1)}(t-3)}{\cancel{(5^9\cdot t-1)}} > \log_2(625t-2)^2.$$

«Отбросим» логарифмы. Знак неравенства сохраняется, поскольку основание логарифмов больше единицы.

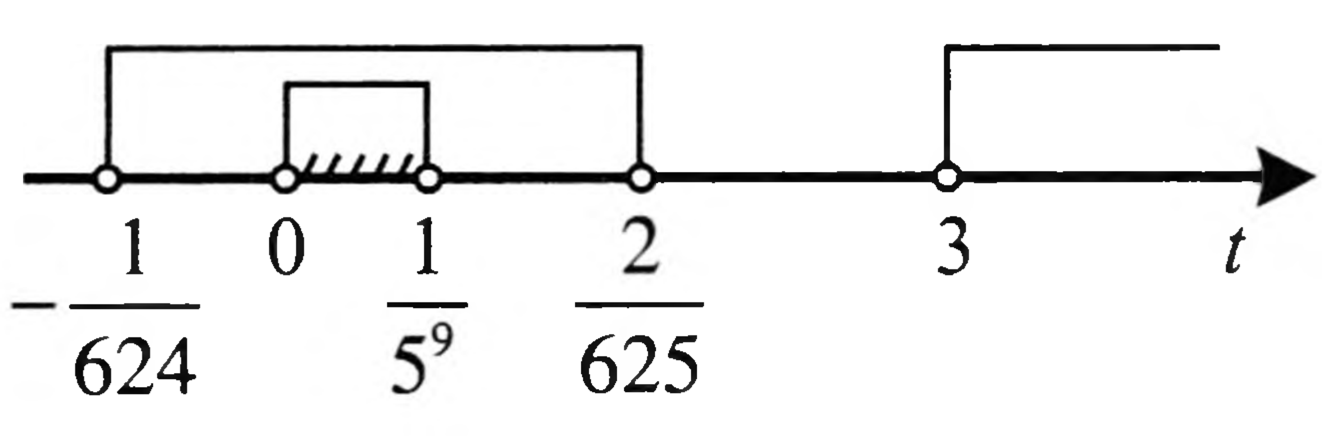
$$(t-3)^2 > (625t-2)^2.$$

Перенесем все в левую часть и разложим по известной формуле разности квадратов:

$$(t-3)^2-(625t-2)^2>0;$$
$$(t-3-625t+2)(t-3+625t-2)>0;$$
$$(-1-624t)(-5+626t)>0;$$



Вспомним, что $t \in \left(0;\dfrac{1}{5^9}\right) \cup (3;+\infty)$ (это ОДЗ неравенства) и найдем пересечение полученных промежутков.



Получим, что $t < \dfrac{1}{5^9}$.

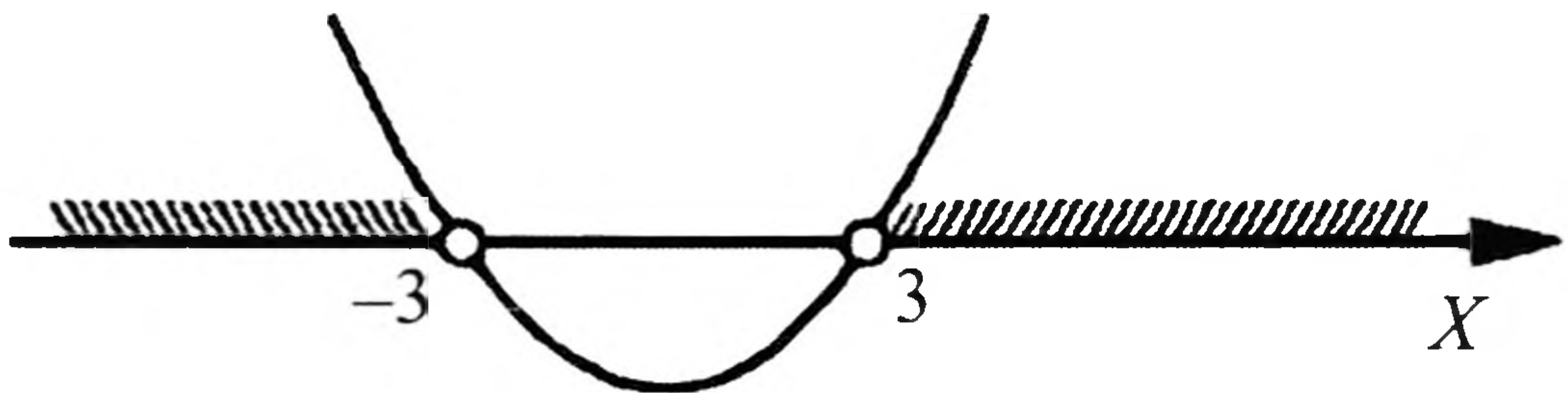
Вернемся к переменной x.

Поскольку $t = 5^{-x^2}$,

$$5^{-x^2} < 5^{-9};$$
$$-x^2 < -9;$$

$$x^2 > 9;$$

$$(x-3)(x+3) > 0.$$



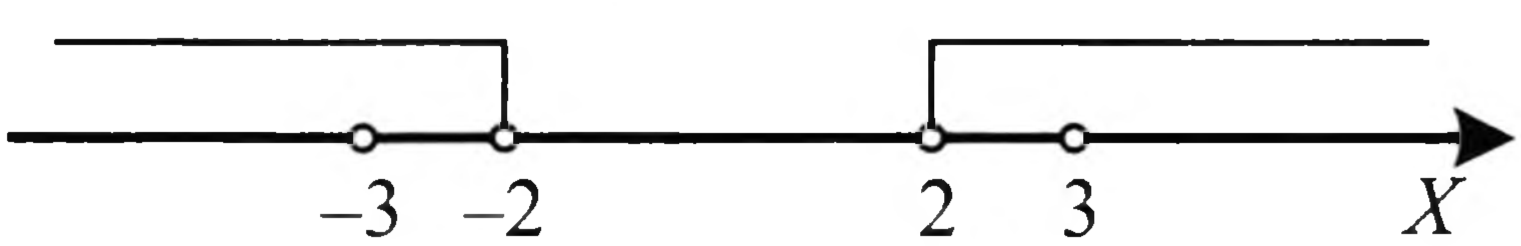
Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

4. Еще один прием, упрощающий решение логарифмических неравенств, — переход к постоянному основанию. Покажем, как использовать переход к другому основанию и обобщенный метод интервалов.

$$\log_{|x|-2}|x-3| \le 0.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} |x|-2 > 0; \\ |x|-2 \ne 1; \\ |x-3| \ne 0. \end{cases}$$



Воспользуемся формулой $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и перейдем к основанию 10:

$$\frac{\lg|x-3|}{\lg(|x|-2)} \le 0.$$

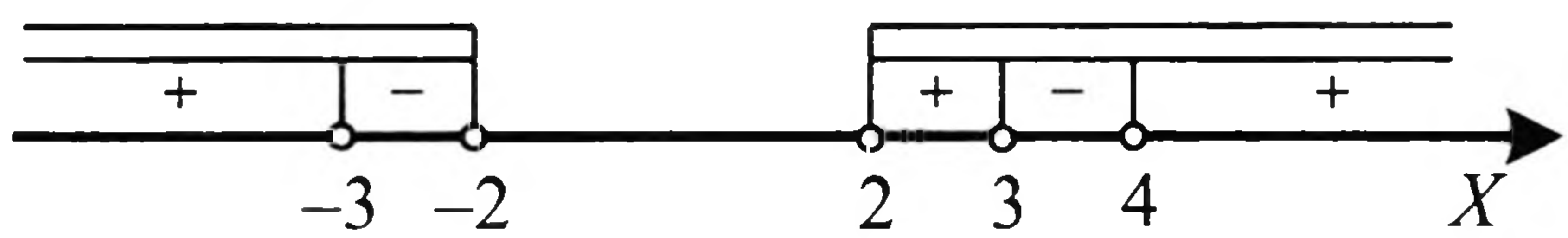
Применим обобщенный метод интервалов. Выражение в левой части неравенства можно записать как функцию

$$g(x) = \frac{\lg|x-3|}{\lg(|x|-2)}.$$

Эта функция может менять знак в точках, где она равна нулю или не существует.

Выражение $\lg|x-3|$ равно нулю, если $|x-3|=1$, то есть $x=4$ или $x=2$. Выражение $\lg(|x|-2)$ равно нулю, если $|x|=3$, т. е. в точках 3 и –3.

Отметим эти точки на числовой прямой, с учетом ОДЗ неравенства.



Найдем знак функции $g(x)$ на каждом из промежутков, на которые эти точки разбивают область допустимых значений. Точно так же мы решали методом интервалов обычные рациональные неравенства.

Ответ: $x \in (-3; -2) \cup (3; 4]$.

Полезный прием для решения сложных задач — **метод рационализации неравенства.** Другое название — **метод замены множителя**. Это как раз из тех секретов, о которых ученику рассказывает репетитор.

Суть метода в том, чтобы от неравенства, содержащего в качестве множителей сложные показательные или логарифмические выражения, перейти к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

Давайте для начала вспомним, что такое равносильные уравнения (или неравенства) В школьной программе этот важный вопрос почти не обсуждается. Поэтому еще раз запишем определение.

Равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают.

Заметим, что внешне уравнения могут быть и не похожи друг на друга.

Например, уравнения $(x-3)^2=0$ и $x-3=0$ равносильны. Число 3 является единственным решением и того, и другого.

Уравнения $x^2=-1$ и $\sqrt{x}=-2$ также равносильны. Оба они не имеют решений.

Другими словами, множество решений каждого из них — пусто.

Уравнения $\sqrt{2x-1}=x-2$ и $2x-1=(x-2)^2$ не являются равносильными.

Решением первого уравнения является только $x = 5$. Решения второго — два числа: $x = 5$ и $x = 1$. Получается, что возведение обеих частей уравнения в квадрат в общем случае приводит к уравнению, неравносильному исходному.

Аналогичное определение для неравенств.

Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадают.

Например, неравенства $(x-1)(x-3)>0$ и $\dfrac{x-1}{x-3}>0$ равносильны — ведь множества их решений совпадают. В этом легко убедиться с помощью метода интервалов.

Неравенства $\log_2 x > \log_2 5$ и $x > 5$ также равносильны при $x > 0$. Заметим, что внешне эти неравенства не похожи — одно из них логарифмическое, другое алгебраическое.

Другими словами, при $x > 0$ неравенства $\log_2 x - \log_2 5 > 0$ и $x - 5 > 0$ имеют одинаковые решения. Если какое-либо число $x > 0$ является решением одного из них, то оно будет и решением второго.

А это значит, что при любом $x > 0$ выражение $\log_2 x - \log_2 5$ будет иметь такой же знак, как и выражение $x - 5$. Следовательно, если в какое-либо сложное неравенство входит в качестве множителя выражение $\log_2 x - \log_2 5$, то при выполнении условия $x > 0$ его можно заменить на более простое $x - 5$ и получить неравенство, равносильное исходному.

Вот ключевой момент. На этом и основан метод рационализации — замены множителей, содержащих сложные логарифмические или показательные выражения, на более простые алгебраические множители.

Например, множитель вида $\log_a f - \log_a g$, где f и g — функции от x, a — число, можно заменить на более простой $(f-g)(a-1)$ — конечно, при условии, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Доказательство легко провести самостоятельно.

А сейчас главное: волшебная таблица, позволяющая заменять сложные логарифмические (или показательные) множители в неравенствах на более простые. Эта таблица является ключом ко многим задачам ЕГЭ.

Сложный множитель	На что заменить
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1)\cdot f$
$f^h - g^h$	$(f-g)\cdot h$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$f^2 - g^2$
f, g — функции от x. h — функция или число.	

Конечно же, все выражения, которые содержат логарифмы, существуют при f, g, $h > 0$ и $h \neq 1$.

Обратите внимание, что мы говорим о замене множителя в неравенствах вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$. Вместо знака $\vee$ в неравенстве может быть знак $<$, $>$, $\leq$ или $\geq$.

Правая часть обязательно должна быть равна нулю. Иначе ничего не получится.

Покажем, как применяется этот метод.

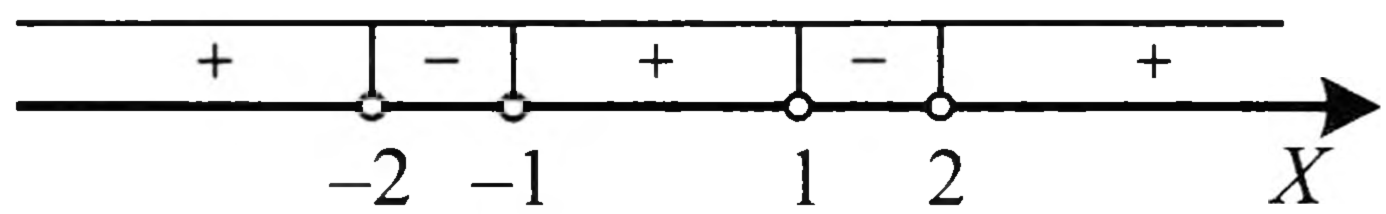
5. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0.$

ОДЗ неравенства: $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Применим метод рационализации. В соответствии с нашей таблицей, множитель $\log_{2-x}(x+2)$ заменим на $(2-x-1)(x+2-1)$. Множитель $\log_{x+3}(3-x)$ заменим на $(x+3-1)(3-x-1)$. Таким образом, от логарифмического неравенства мы перешли к рациональному:

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x)\leq 0.$$

Решим его методом интервалов:



Ответ: $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$.

6. $\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\le 0.$

ОДЗ неравенства $4^{x^2+2x+2}>3.$

Заметим, что $4^{x^2+2x+2}=4^{\left(x^2+2x+1\right)+1}=4^{(x+1)^2+1}=4\cdot 4^{(x+1)^2}\ge 4.$

Значит, ОДЗ — все действительные числа.

Применим метод замены множителя. При этом единицу в первой скобке представим как 4^0.

$$(4-1)(x^2-x-6)\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(4^{x^2+2x+2}-4\right)\le 0.$$

Еще раз применим метод замены множителя.

4^{x^2+2x+2} заменим на $(4-1)(x^2+2x+2-1)$.

Получим: $(x^2-x-6)(x^2+2x+1)\ge 0$.

$(x-3)(x+2)(x+1)^2\ge 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Разберем еще одну задачу, в которой спрятаны целых две ловушки для невнимательных абитуриентов.

7. $\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}\left(x-18\right)^2\ge 2.$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ 36+16x-x^2>0, \\ x\ne 18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x\ne -1, \\ x\in(-2;18). \end{cases}$$

Итак, $x\in(-2;-1)\cup(1;18)$. Это ОДЗ.

Обратите внимание, что $36+16x-x^2=-(x+2)(x-18)$. Это пригодится вам при решении неравенства.

Упростим исходное неравенство:

$$\log_{x+2}\left((18-x)(x+2)\right)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^2(x-18)^2\geq 2;$$

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^2(x-18)^2\geq 2.$$

Теперь главное — не спешить. Мы уже говорили, что задача непростая — в ней расставлены ловушки. В первую вы попадете, если напишете, что $\log_{x+2}(x-18)^2=2\log_{x+2}(x-18)$. Ведь выражение $\log_{x+2}(x-18)$ в данном случае не имеет смысла, поскольку $x<18$.

Как же быть? Вспомним, что $(x-18)^2=(18-x)^2$.

Тогда:

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log_{x+2}^2(18-x)^2\geq 2.$$

Вторая ловушка попроще. Запись означает, что сначала надо вычислить логарифм, а потом возвести полученное выражение в квадрат. Поэтому:

$$\log_{x+2}^2(18-x)^2=\left(\log_{x+2}(18-x)^2\right)^2=$$

$$=\left(2\log_{x+2}(18-x)\right)^2=4\log_{x+2}^2(18-x).$$

Дальше — все просто. Сделаем замену $\log_{x+2}(18-x)=t$.

$$t-\frac{1}{4}t^2\geq 1;$$

$$t^2-4t+4\leq 0;$$

$$(t-2)^2\leq 0.$$

Выражение в левой части этого неравенства не может быть отрицательным, поэтому $t=2$. Тогда:

$$\log_{x+2}(18-x)=2;$$

$$\log_{x+2}(18-x)=\log_{x+2}(x+2)^2;$$

$$18-x=x^2+4x+4;$$

$$x^2+5x-14=0;$$

$x_1=7$ — не удовлетворяет ОДЗ;

$x_2=2$.

Ответ: 2.

Стереометрия на ЕГЭ по математике. Часть 2

Считается, что стереометрическая задача на ЕГЭ по математике — только для отличников. Что для ее решения необходимы особые таланты и загадочное «пространственное мышление», которым обладают с рождения лишь редкие счастливцы.

Так ли это?

К счастью, все значительно проще. То, что так красиво называют «пространственным мышлением», чаще всего означает знание основ стереометрии и умение строить чертежи.

Во-первых, необходимо знание формул стереометрии. В главе «Стереометрия, часть 1» приведены все формулы, по которым вычисляются объемы и площади поверхности трехмерных тел.

Во-вторых — уверенное решение задач по геометрии, представленных в главе «Геометрия, часть 1».

И главное — знание аксиом и теорем стереометрии. Без них вы не решите ни одну задачу.

Выпишите в тетрадь определения и формулировки теорем, которые мы даем. Сделайте чертежи.

Внимание. Мы даем теоремы без доказательства! Доказывать их старайтесь самостоятельно. Вам поможет в этом учебник по геометрии для 10–11 класса (автор — А. В. Погорелов или Л. С. Атанасян).

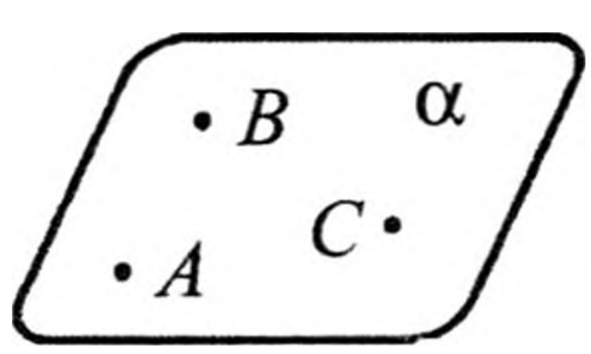
Обратите внимание на термины **«определение» и «признак».** Сформулируйте для себя, чем они отличаются. Есть, например, определение параллельности прямой и плоскости — и признак параллельности прямой и плоскости. В чем разница между ними?

Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей

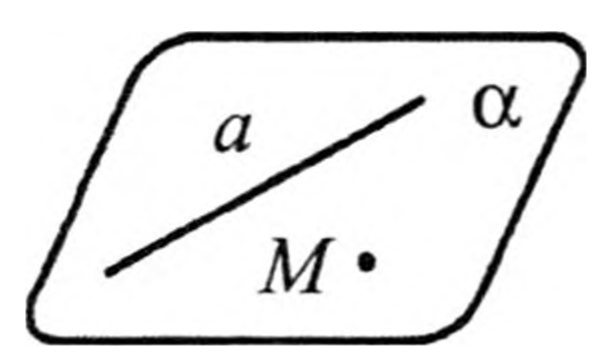
Плоскость, прямая, точка — основные понятия геометрии. Нам трудно дать им четкие определения, однако интуитивно мы понимаем, что это такое. Плоскость имеет только два измерения. У нее нет глубины. Прямая имеет лишь одно измерение, а у точки вообще нет размеров — ни длины, ни ширины, ни высоты.

Плоскость бесконечна. Поэтому в задачах мы рисуем только часть плоскости. Надо же как-то ее изобразить.

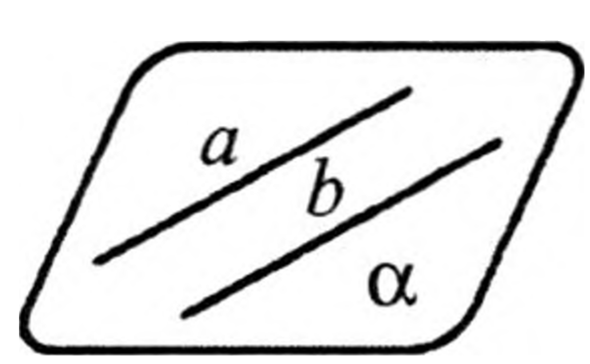
Плоскость в пространстве можно провести:



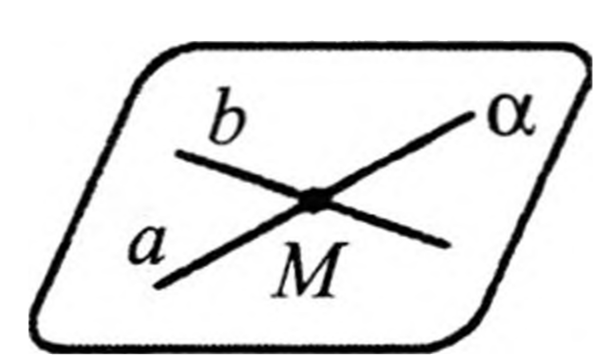
1) Через три точки, не лежащие на одной прямой.



2) Через прямую и не лежащую на ней точку.



3) Через две параллельные прямые.



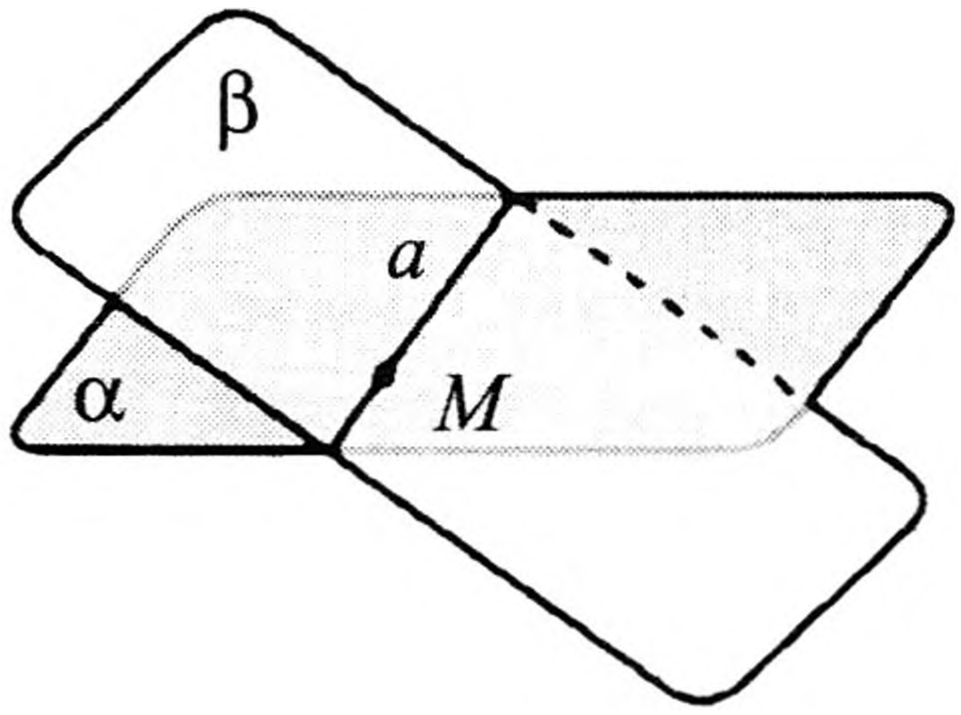
4) Через две пересекающиеся прямые.

А как все это выглядит в пространстве? Очень просто. Лист плотной бумаги послужит «моделью» плоскости. Карандаши вполне могут изобразить прямые. Все аксиомы и теоремы стереометрии можно показать «на пальцах», то есть с помощью подручных материалов. Читаете — и сразу стройте такую «модель».

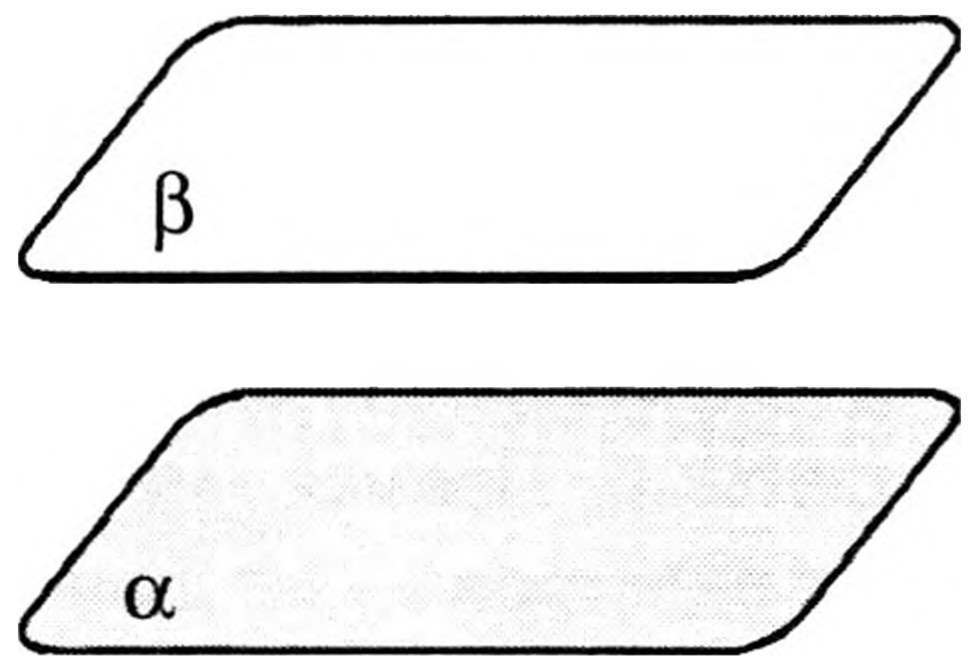
Две плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются. Примеры в окружающем пространстве найти легко.

Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Плоскости в пространстве



Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.



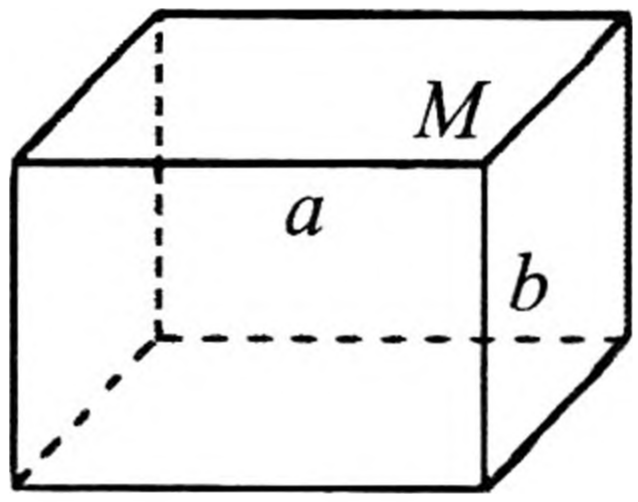
Если две плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу.

Мы не рассматриваем отдельно случай «плоскости совпадают». Раз совпадают — значит, это одна плоскость, а не две.

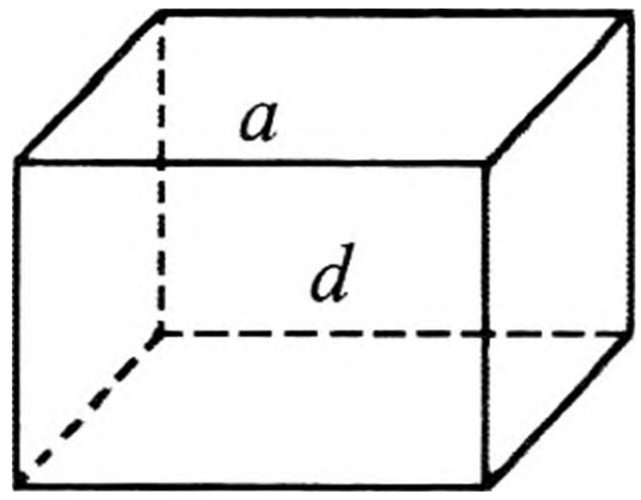
Прямые в пространстве. Пересекающиеся, параллельные, скрещивающиеся прямые

На плоскости две прямые или пересекаются, или параллельны друг другу. А в пространстве возможен еще один случай взаимного расположения прямых.

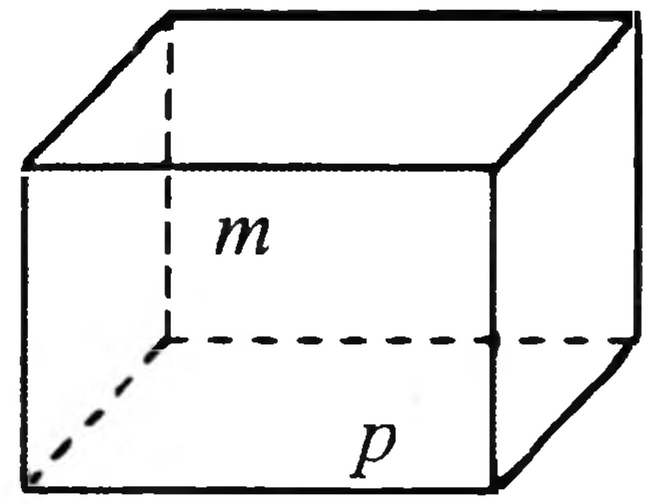
Расположение прямых в пространстве



Пересекаются
$a \cap b = M$



Параллельны
$a \parallel d$



Скрещиваются
$m \dot{-} p$

Две прямые в пространстве параллельны друг другу, пересекаются или скрещиваются.

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны друг другу. Через них невозможно провести плоскость. Скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.

Мы еще вернемся к теме «скрещивающиеся прямые» и расскажем, как найти угол и расстояние между ними.

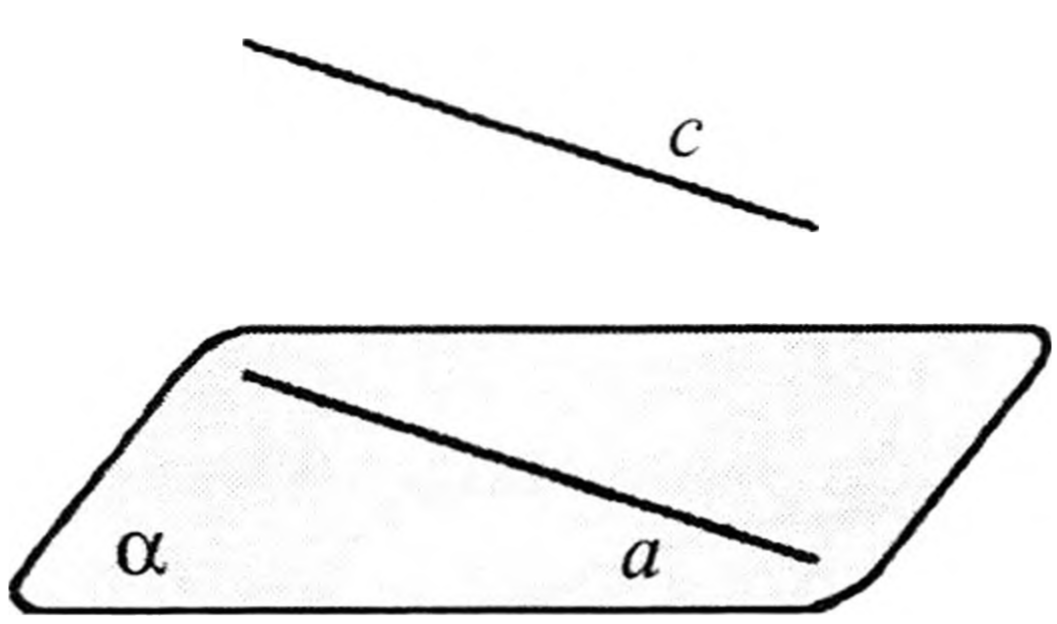
Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость могут пересекаться или быть параллельными друг другу. Еще один случай — прямая лежит в плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

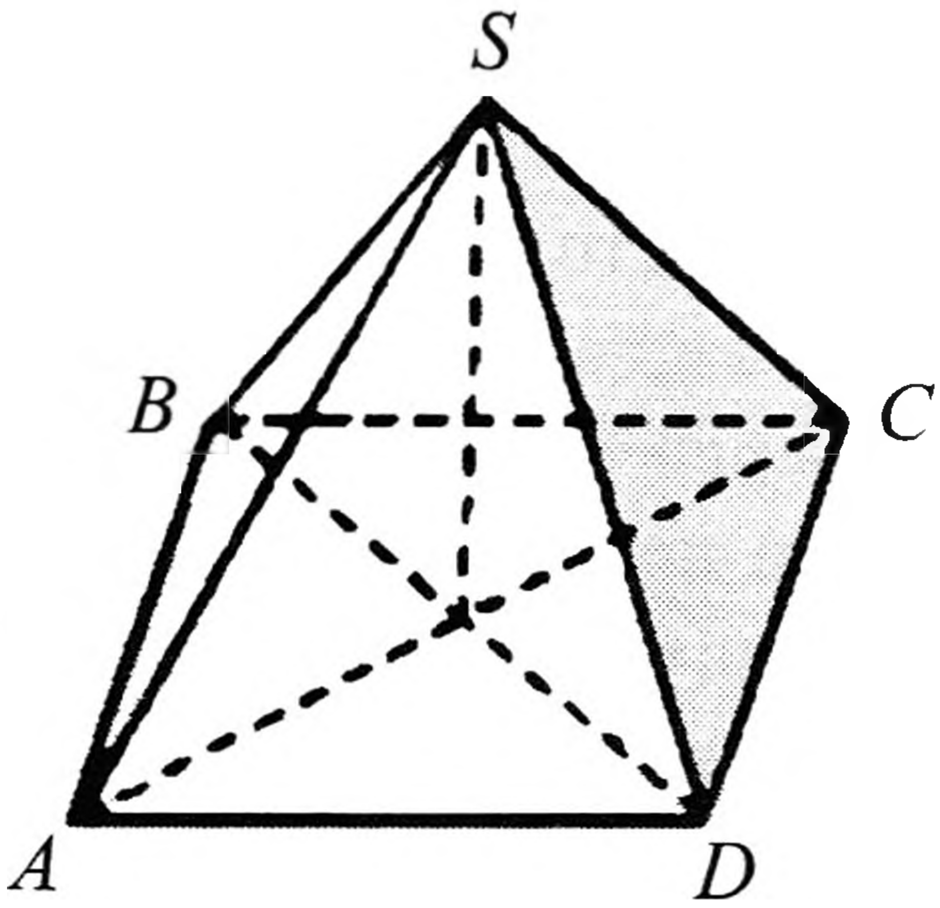
Это определение. Сложность только в одном — как на практике проверить, что бесконечная прямая нигде не пересечет бесконечную плоскость? Для практического применения используется **признак параллельности прямой и плоскости**.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.



$$\left.\begin{matrix} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$

Этот признак часто используется в решении задач по стереометрии. Например, в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ прямая AB параллельна прямой CD — значит, AB параллельна всей плоскости SCD.



$$\left.\begin{aligned} &AB \parallel CD; \\ &CD \in (SCD) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD).$$

Угол между прямой и плоскостью. Перпендикулярность прямой и плоскости

Если две прямые лежат в одной плоскости, угол между ними легко измерить — например, с помощью транспортира. А как измерить **угол между прямой и плоскостью**?

Пусть прямая пересекает плоскость, причем не под прямым, а под каким-то другим углом. Такая прямая называется **наклонной**.

Опустим перпендикуляр из какой-либо точки наклонной на нашу плоскость. Соединим основание перпендикуляра с точкой пересечения наклонной и плоскости. Мы получили **проекцию наклонной на плоскость**.

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Обратите внимание — в качестве угла между прямой и плоскостью мы выбираем острый угол.

Если прямая параллельна плоскости, значит, угол между прямой и плоскостью равен нулю.

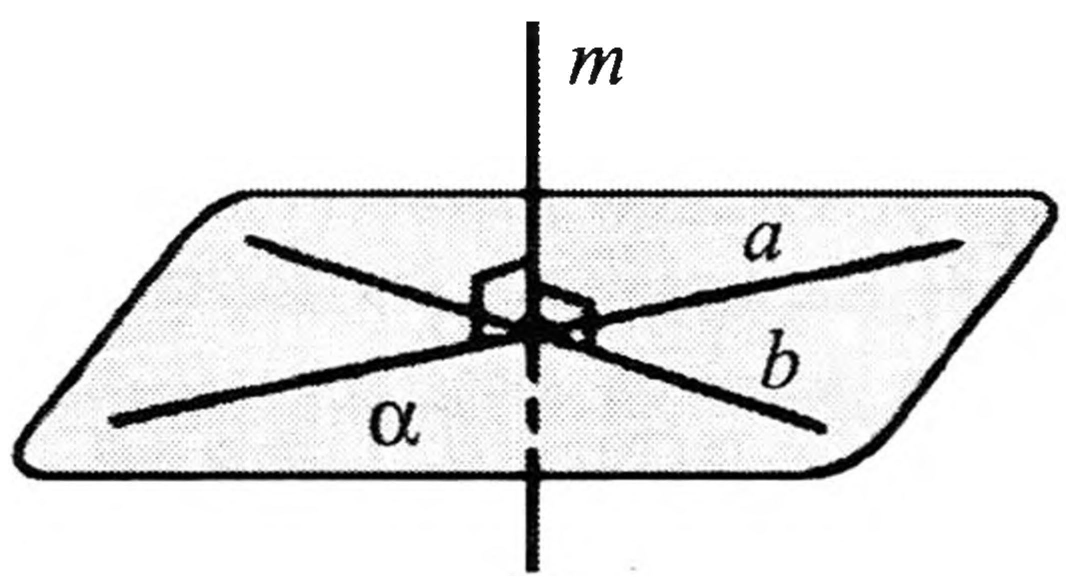
Если прямая перпендикулярна плоскости, ее проекцией на плоскость окажется точка. Очевидно, в этом случае угол между прямой и плоскостью равен 90°.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Это определение. Но как же с ним работать? Как проверить, что данная прямая перпендикулярна всем прямым, лежащим в плоскости? Ведь их там бесконечно много.

На практике применяется **признак перпендикулярности прямой и плоскости**.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.



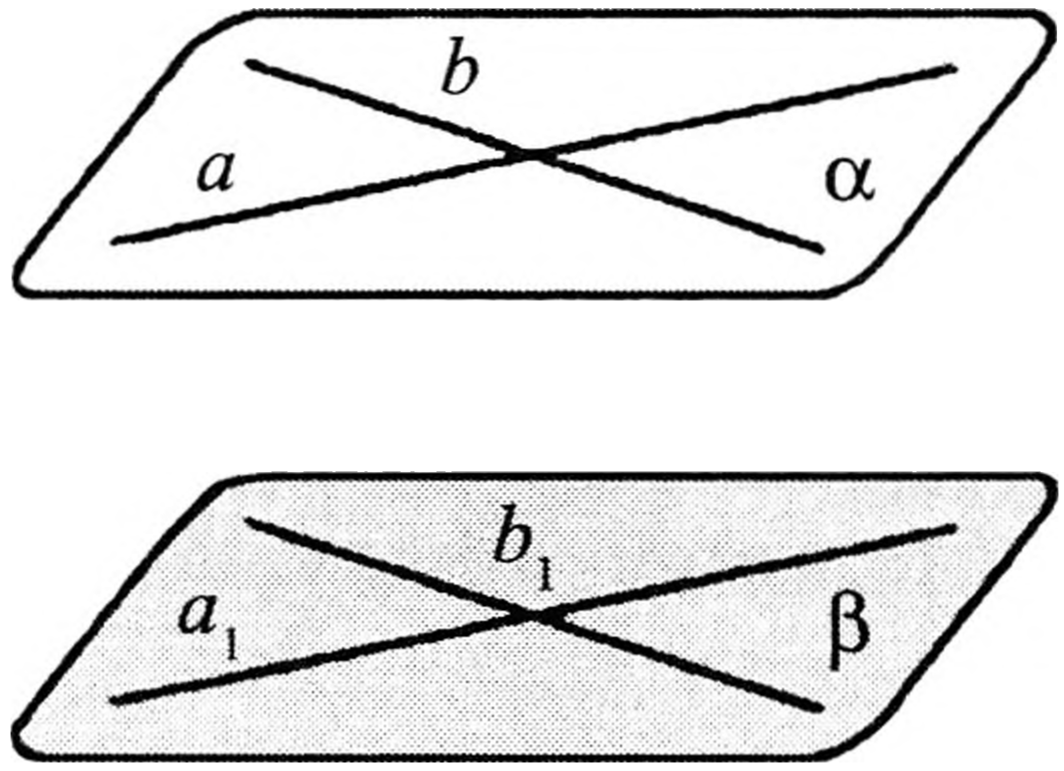
$$\left.\begin{array}{l} a \in \alpha,\ b \in \alpha, \\ m \perp a, \\ m \perp b; \end{array}\right\} \Rightarrow m \perp \alpha.$$

Параллельность плоскостей

Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

Это определение. Однако в практических целях чаще используется **признак параллельности плоскостей**.

Плоскости параллельны друг другу, если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

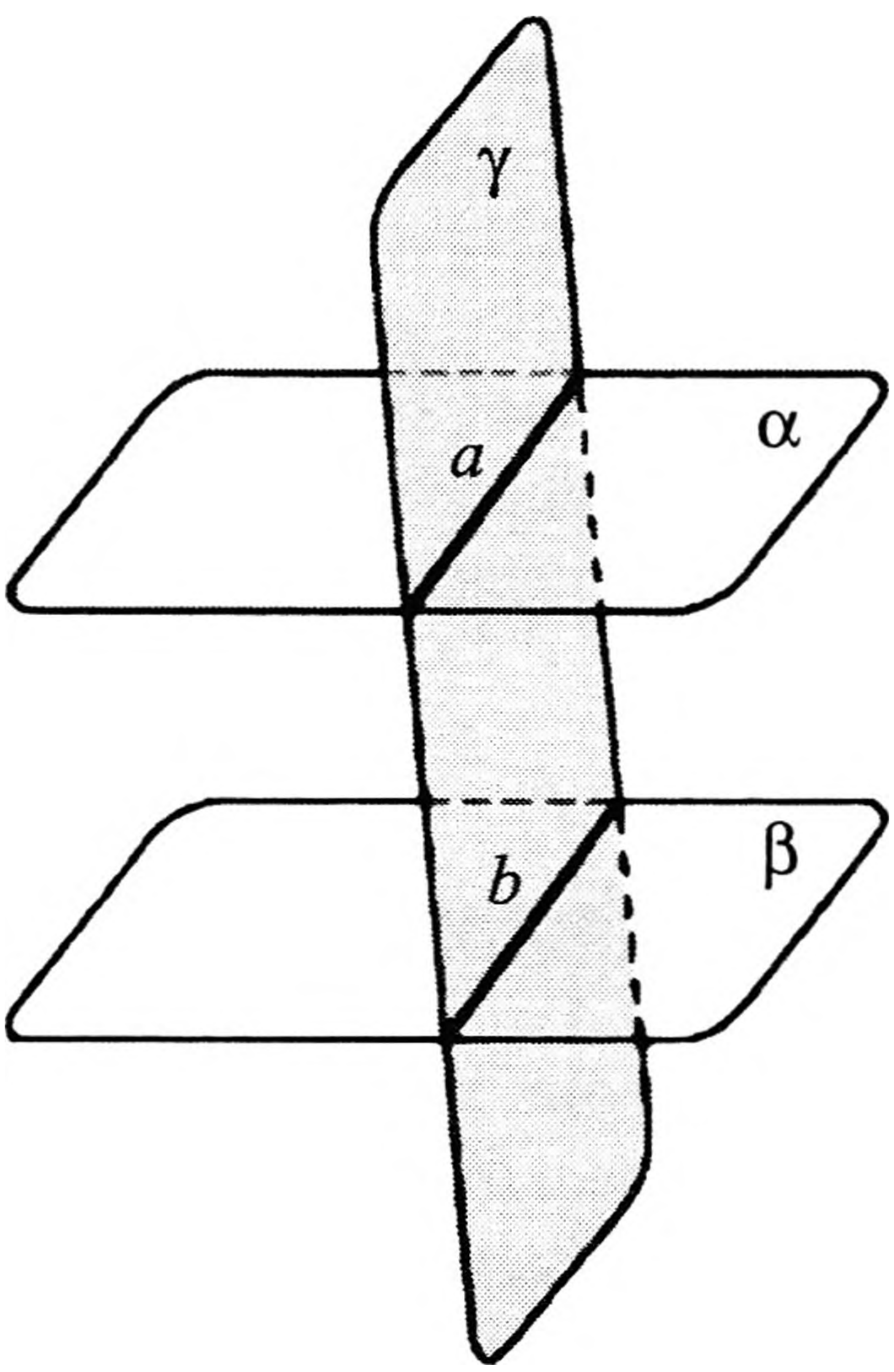


$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a_1 \\ b \parallel b_1 \\ a, b \in \alpha \\ a_1, b_1 \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Свойства параллельных плоскостей:

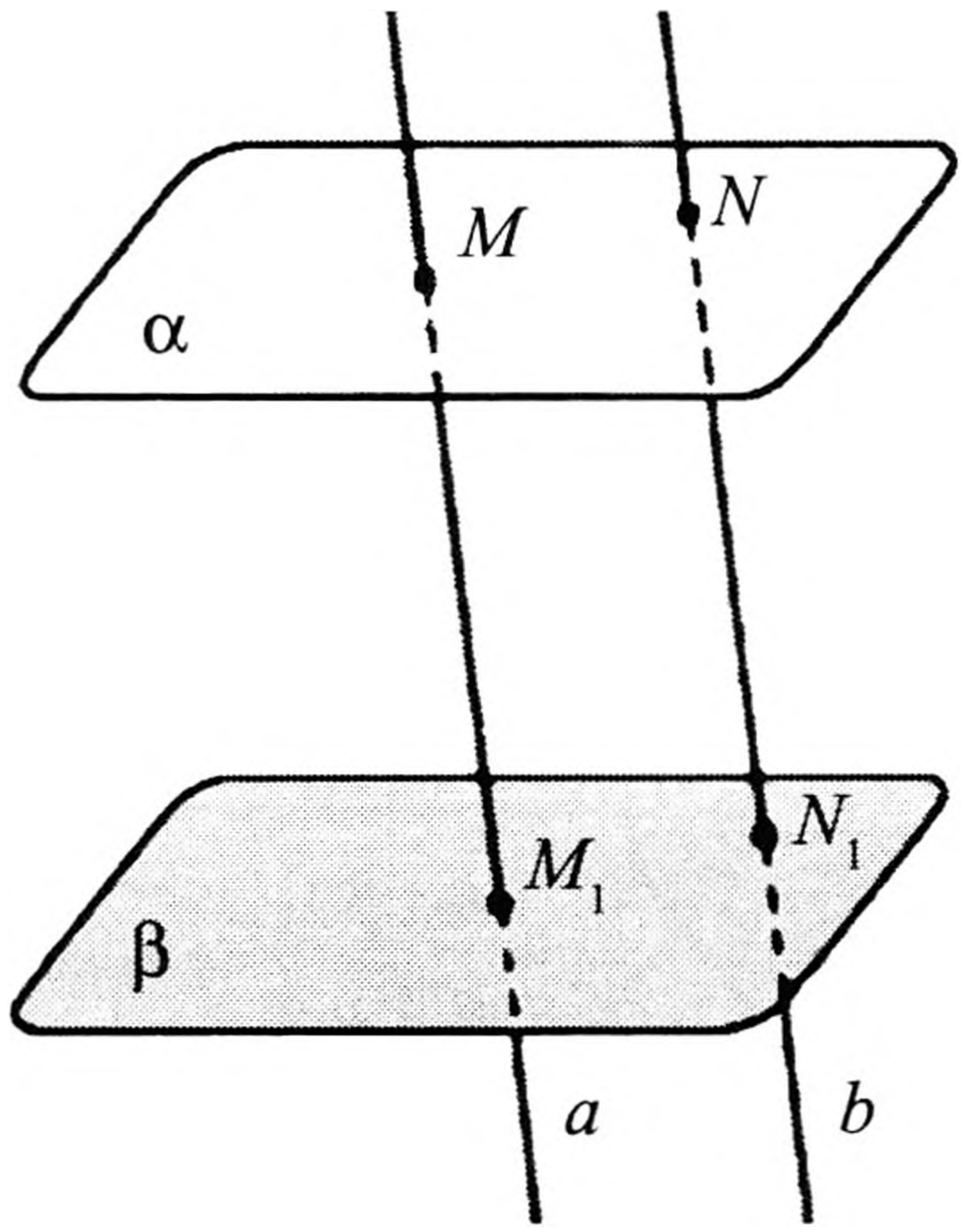
1. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

2. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.



$$\left.\begin{array}{l} \gamma \cap \alpha = a, \\ \gamma \cap \beta = b, \\ \alpha \parallel \beta; \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



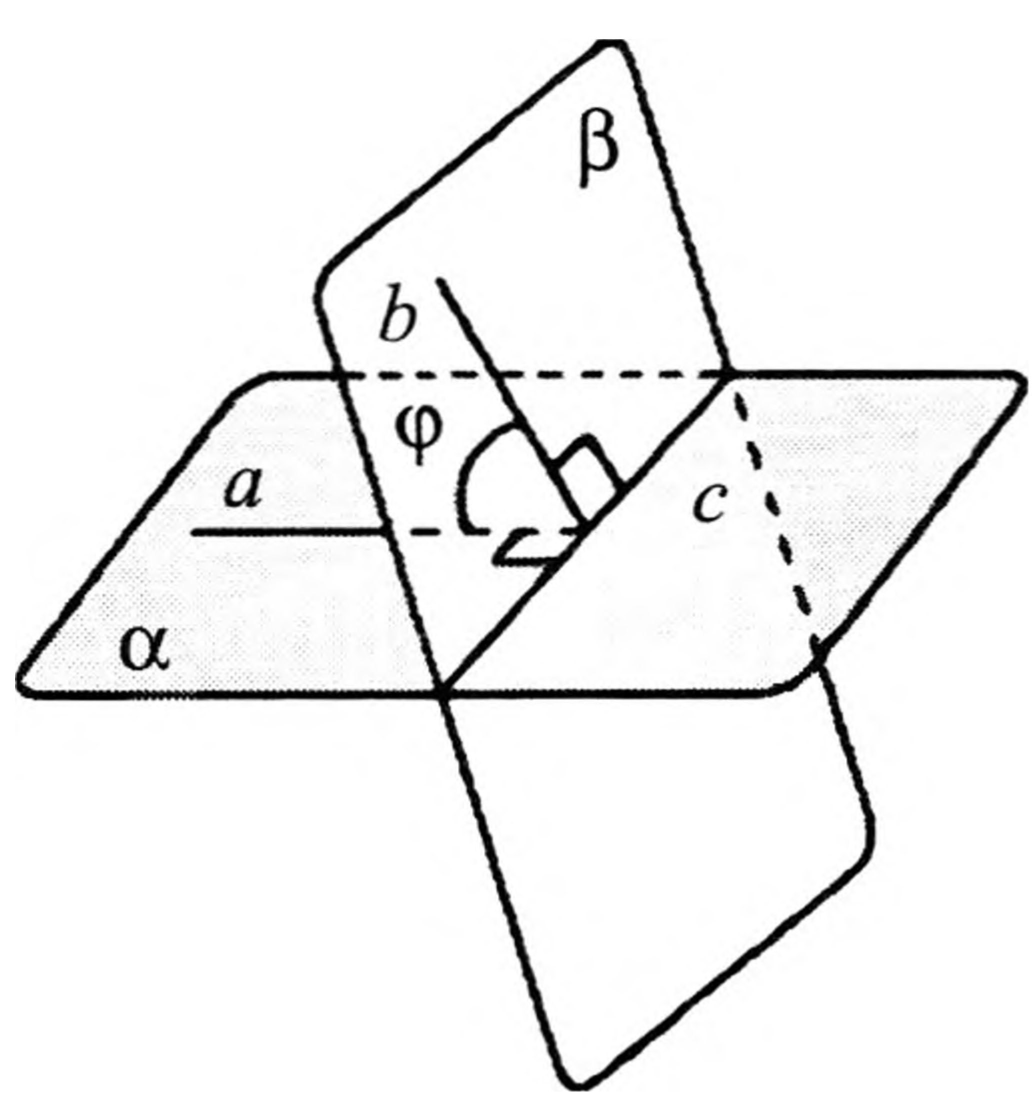
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta,\\ a \parallel b,\end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 \parallel NN_1.$$

Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c.

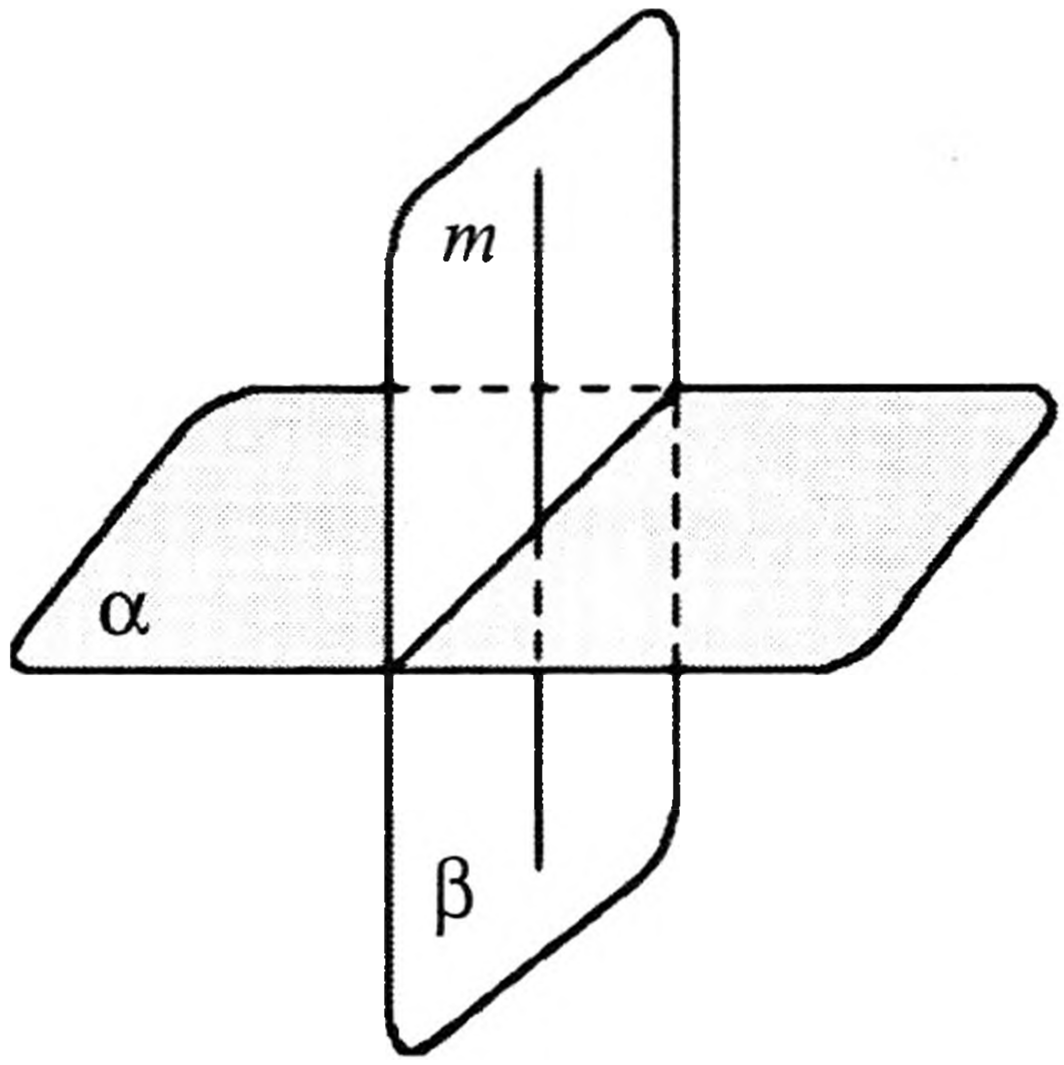
Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Другими словами, в плоскости α мы провели прямую a, перпендикулярную c. В плоскости β — прямую b, также перпендикулярную c. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.



Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла. Видите их на рисунке? В качестве угла между плоскостями мы берем **острый** угол.

Если угол между плоскостями равен 90 градусов, то плоскости **перпендикулярны.**



$$\left.\begin{array}{l} m \in \beta, \\ m \perp a, \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

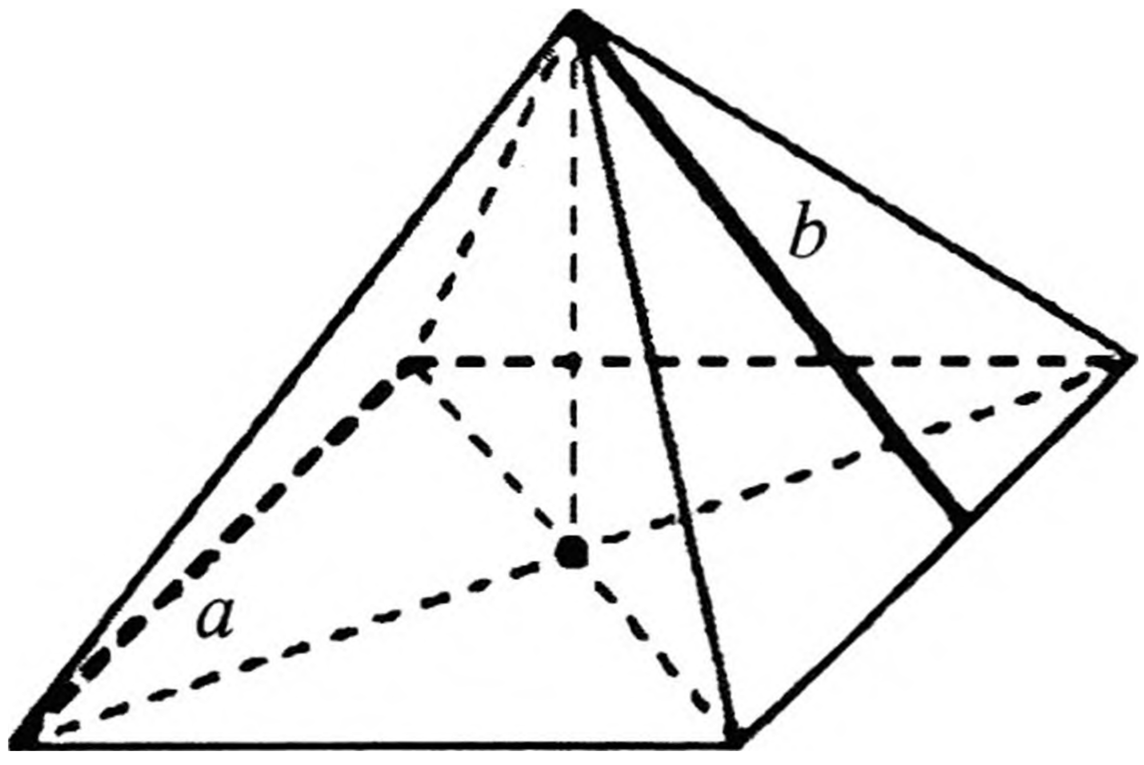
Это определение перпендикулярности плоскостей. Решая задачи по стереометрии, мы используем также **признак перпендикулярности плоскостей**.

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

Угол между скрещивающимися прямыми и расстояние между ними. Расстояние от точки до плоскости и от прямой до параллельной ей плоскости

Скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются. Они лежат в параллельных плоскостях, и поместить их в одну плоскость невозможно.

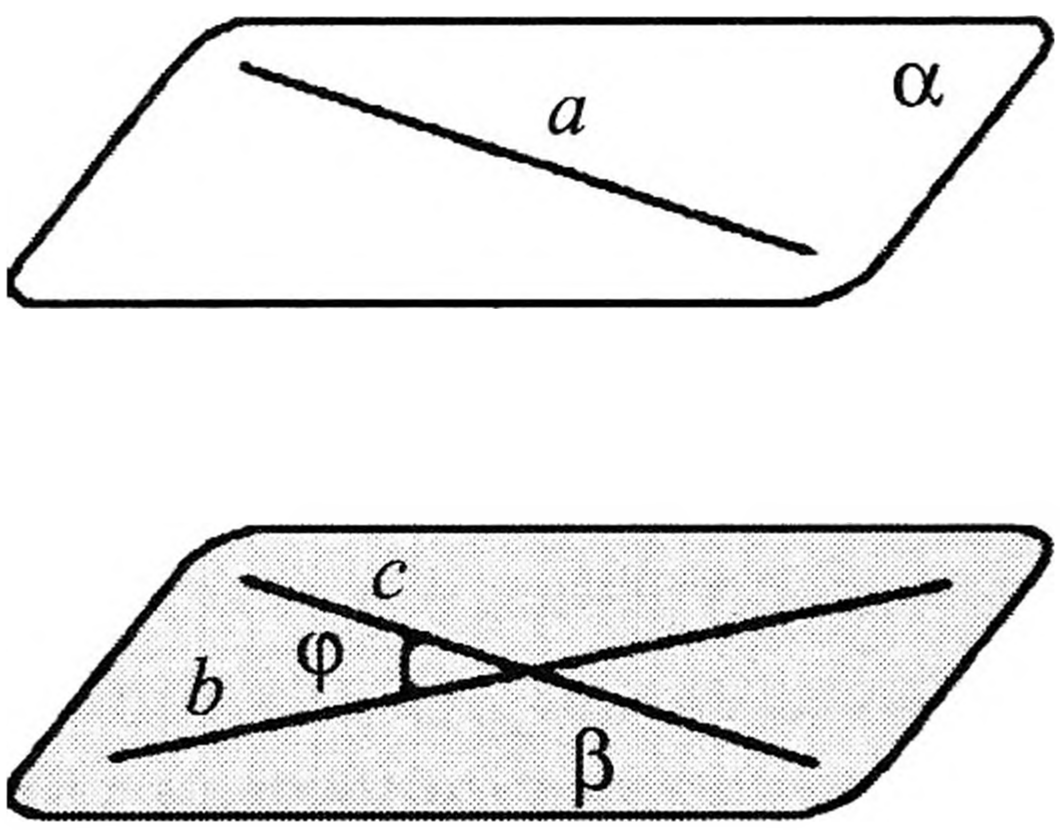
Например, такими будут прямые a и b на чертеже.



Часто в задачах требуется найти угол между скрещивающимися прямыми. Как это сделать?

Угол между прямыми, лежащими в одной плоскости, найти нетрудно. Можно измерить его транспортиром. Можно найти из какого-нибудь треугольника по теореме синусов или косинусов.

Пусть скрещивающиеся прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β. Проведем в плоскости β прямую c, параллельную прямой a. Угол между прямыми a и b равен углу между прямыми b и c.



a и b скрещиваются.

$a \in \alpha$,

$b \in \beta$,

$\alpha \parallel \beta$.

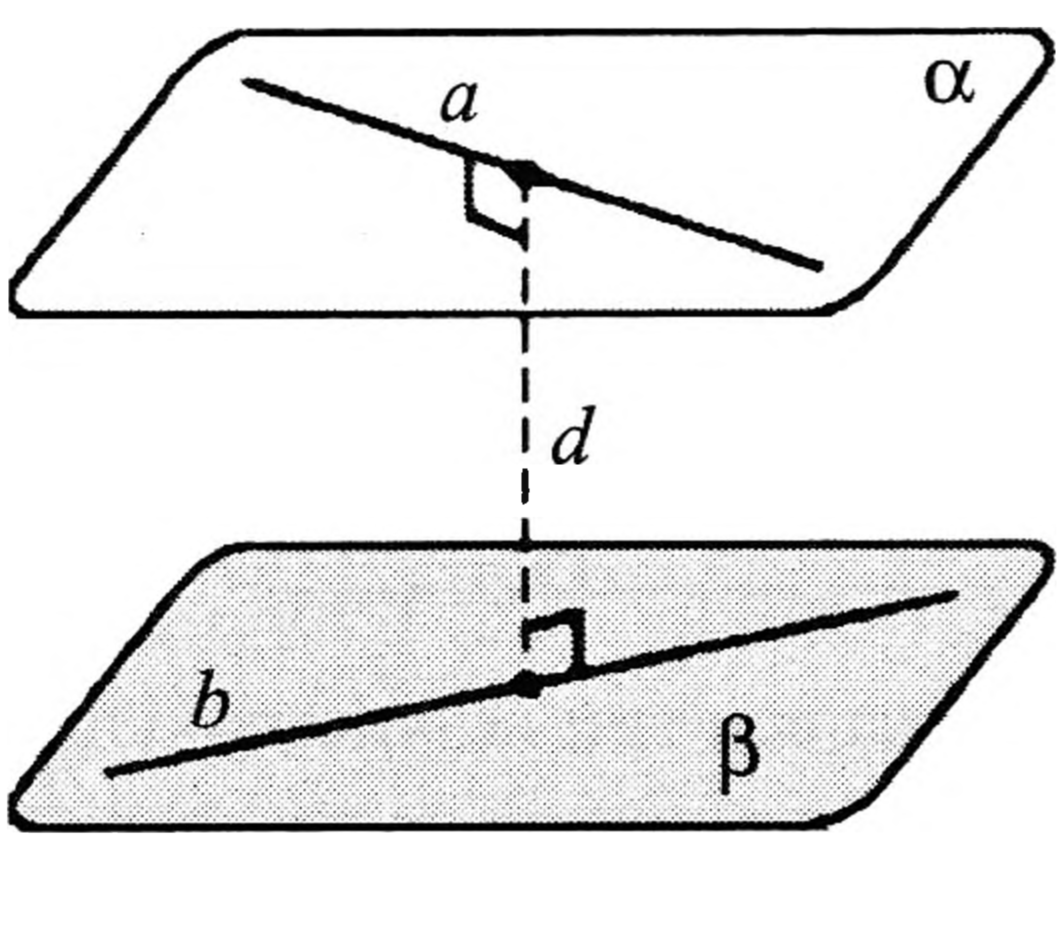
$c \parallel a$,

$c \in \beta$,

$(\widehat{a,b}) = (\widehat{c,b}) = \varphi$.

Можно сказать, что **угол между скрещивающимися прямыми** — это угол между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.



Другими словами, расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат.

Дадим еще два полезных определения.

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

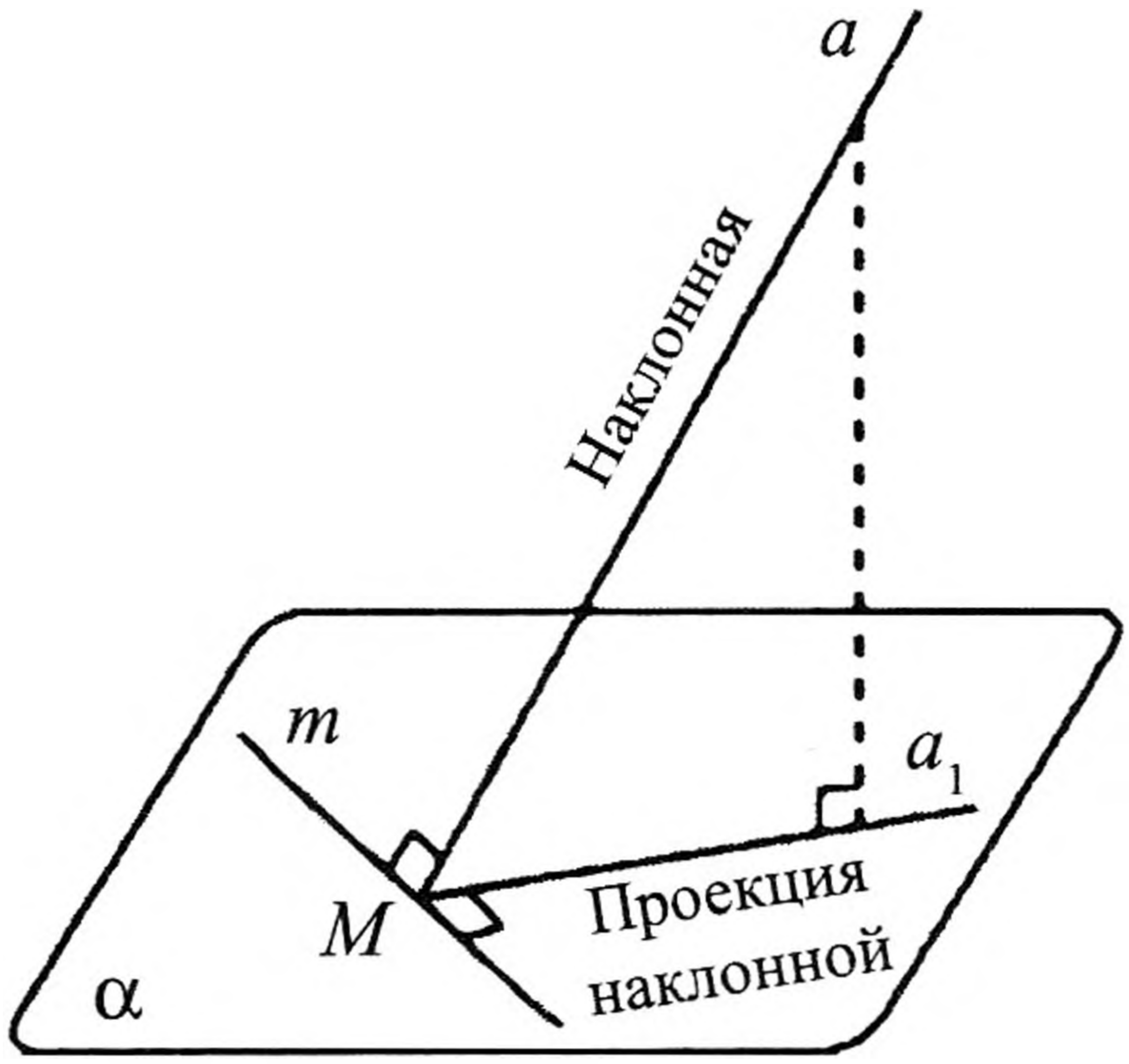
Заметим, что расстояние от точки до плоскости или угол между скрещивающимися прямыми иногда проще найти с помощью *координатно-векторного метода*.

Теорема о трех перпендикулярах

Рассмотрим чертеж. На нем изображены плоскость α и лежащая в ней прямая m. Наклонная a пересекает плоскость α в точке M. Прямая a_1 — проекция наклонной a на плоскость α.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

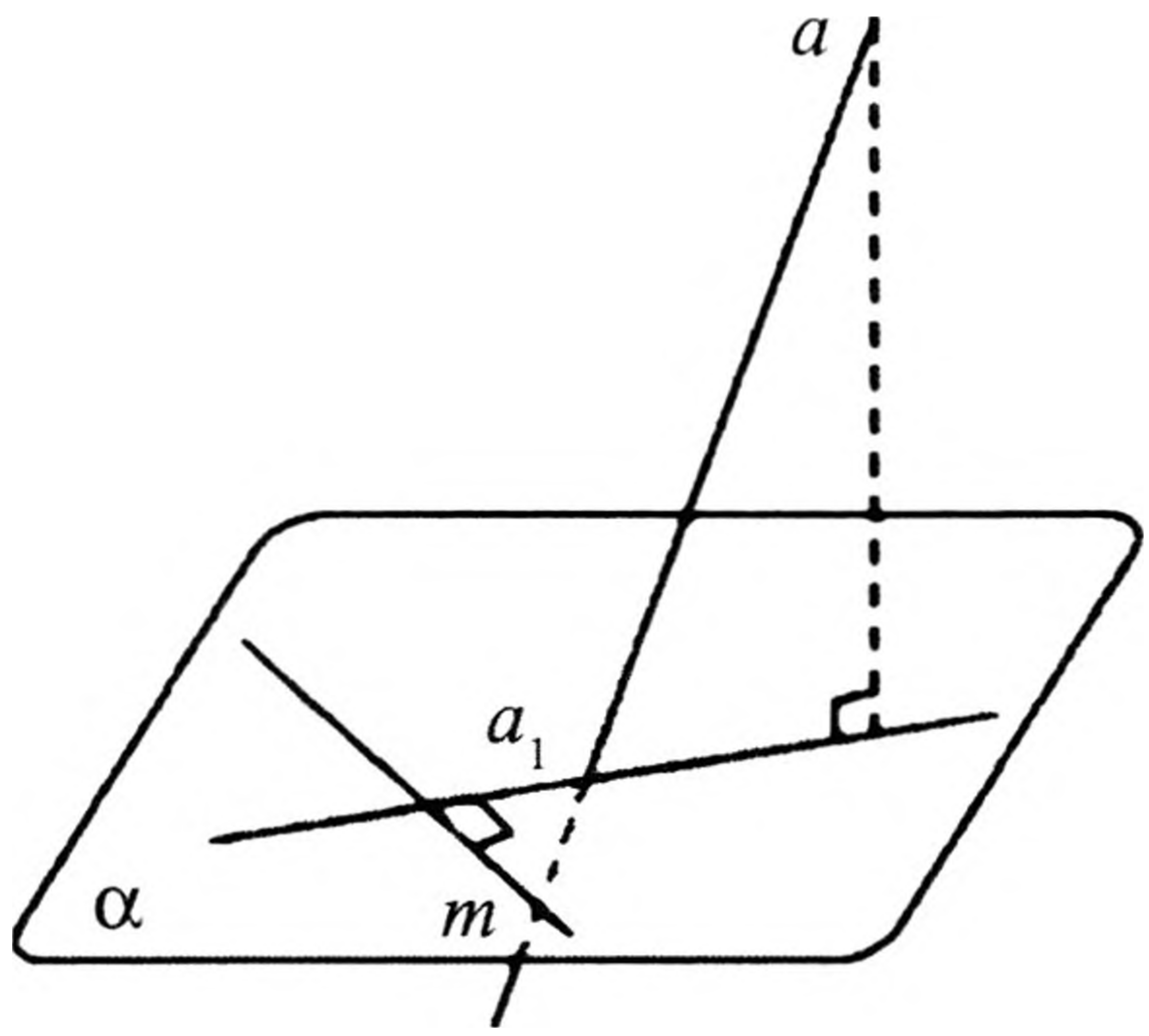


На рисунке показаны все три перпендикуляра.

Если прямая m, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Слова «тогда и только тогда» в формулировке теоремы означают, что прямая m перпендикулярна одновременно и наклонной, и ее проекции. Если m перпендикулярна наклонной, значит, перпендикулярна и ее проекции, и наоборот.

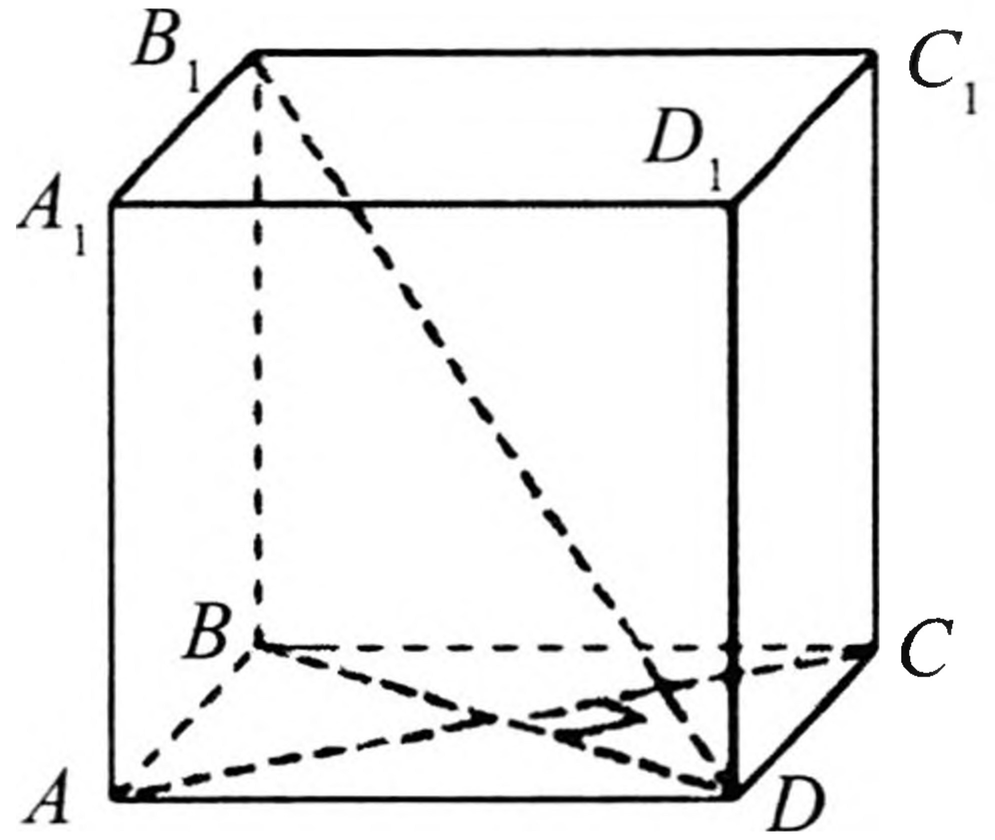
На нашем чертеже прямая m проведена через основание наклонной. Этого требует формулировка теоремы о трех перпендикулярах в большинстве учебников. Но прямая m, лежащая в плоскости, вовсе не обязана проходить через основание наклонной. Главное — чтобы она была перпендикулярна проекции наклонной. Тогда она будет перпендикулярна и самой наклонной.



$m \in \alpha$,
a и m — скрещиваются,
a_1 — проекция наклонной a на плоскость α,
$m \perp a_1 \Leftrightarrow m \perp a$.

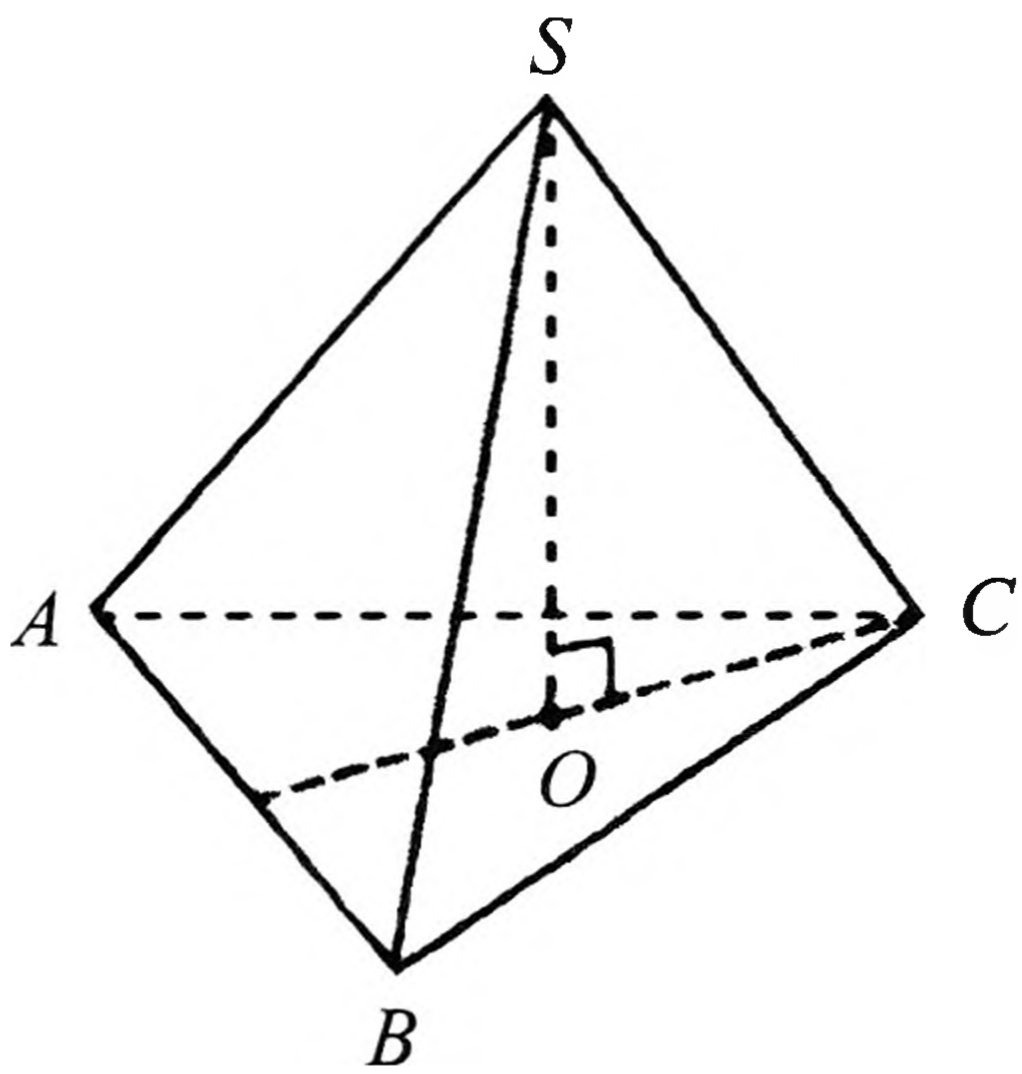
Теорема о трех перпендикулярах — полезный инструмент для решения задач.

Например, с ее помощью можно доказать, что диагональ куба B_1D перпендикулярна прямой AC.



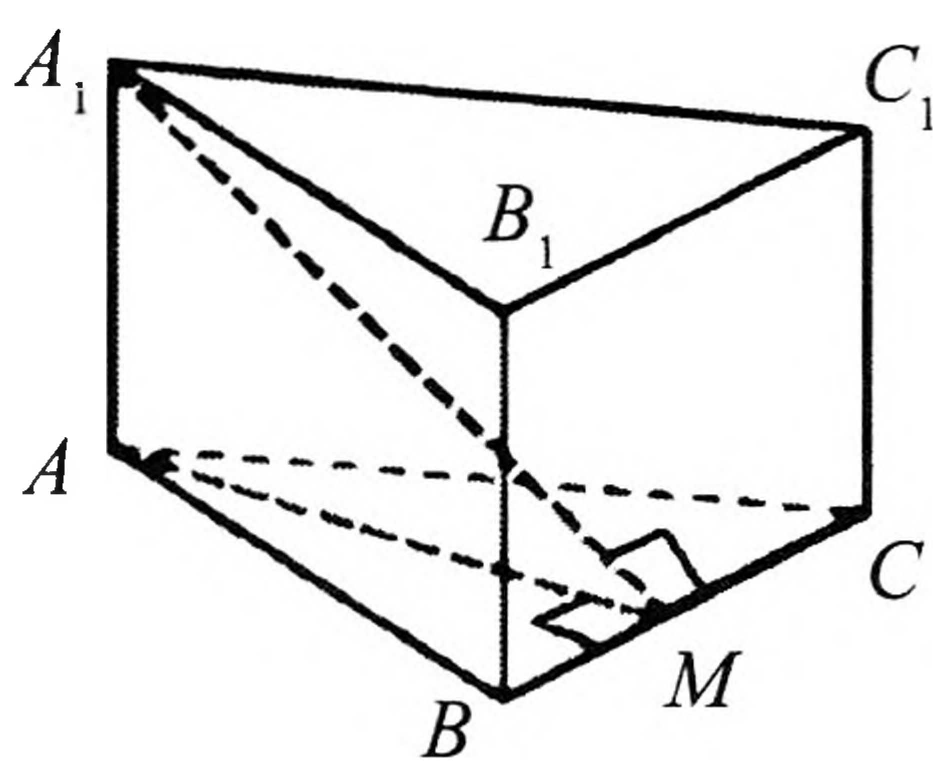
$BD \perp AC \Rightarrow B_1D \perp AC.$

Или — что скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра взаимно перпендикулярны.



$SABC$ — правильный тетраэдр,
OC — проекция SC
на плоскость (ABC),
$OC \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$.

Или — что в правильной треугольной призме прямая A_1M (где M — середина BC) перпендикулярна ребру BC.



$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма,
M — середина BC,
$AM \perp BC \Rightarrow A_1M \perp BC$.

Параллельное проецирование. Площадь проекции фигуры

В задачах по геометрии успех зависит не только от знания теории, но от качественного чертежа.

С плоскими чертежами все более-менее понятно. А в стереометрии дело обстоит сложнее. Ведь изобразить надо **трехмерное** тело на **плоском** чертеже, причем так, чтобы и вы сами, и тот, кто смотрит на ваш чертеж, увидели бы то же самое объемное тело.

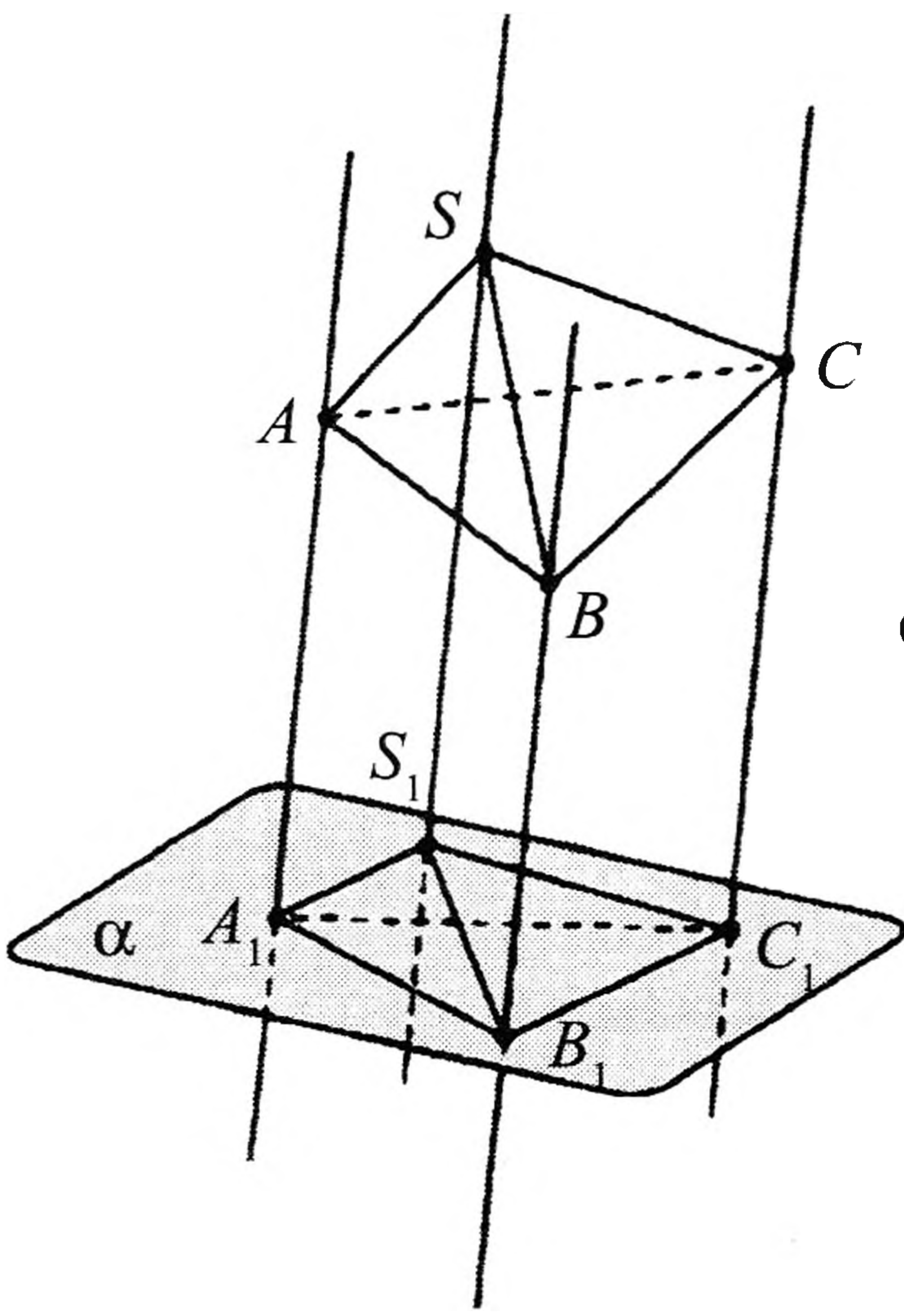
Как это сделать?

Конечно, любое изображение объемного тела на плоскости будет условным. Однако существует определенный набор правил. Существует общепринятый способ построения чертежей — **параллельное проецирование**.

Возьмем объемное тело.

Выберем **плоскость проекции**.

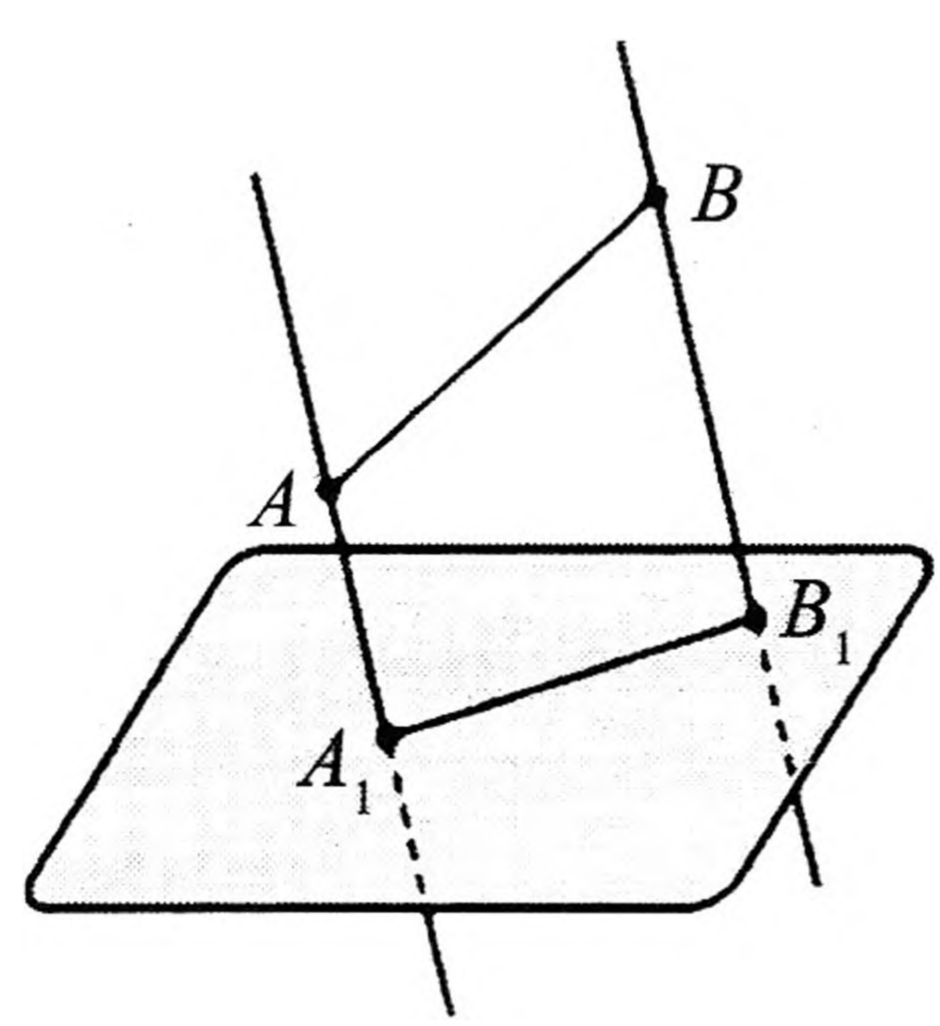
Через каждую точку объемного тела проведем прямые, параллельные друг другу и пересекающие плоскость проекции под каким-либо углом. Каждая из этих прямых пересекает плоскость проекции в какой-либо точке. А все вместе эти точки образуют **проекцию** объемного тела на плоскость, то есть его плоское изображение.



α — плоскость проекции

Как строить проекции объемных тел?

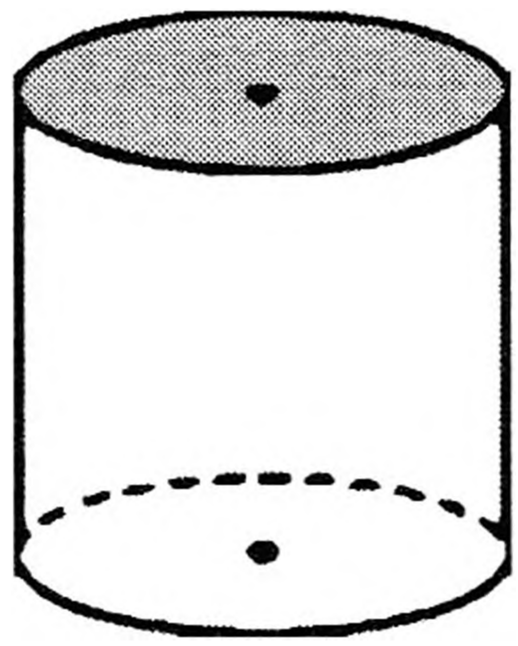
Представьте, что у вас есть каркас объемного тела — призмы, пирамиды или цилиндра. Освещая его параллельным пучком света, получаем изображение — тень на стене или на экране. Заметим, что в разных ракурсах получаются разные изображения, но некоторые закономерности все же присутствуют.



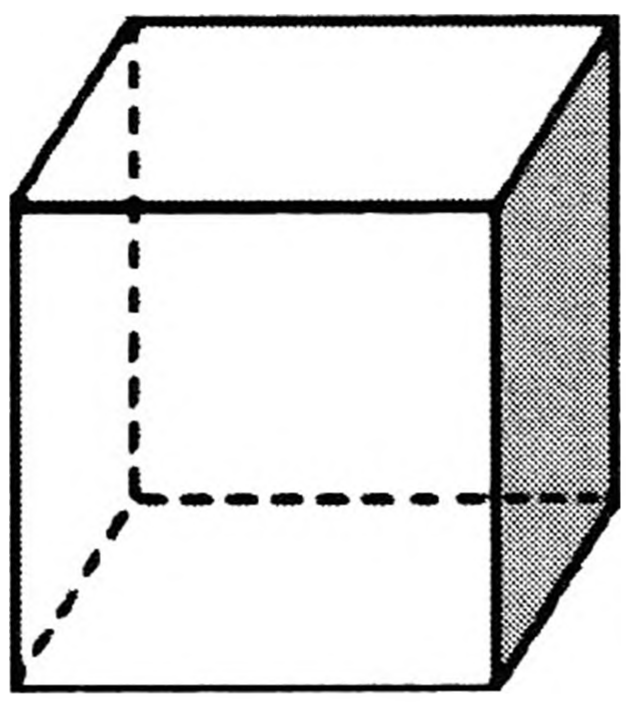
Проекцией отрезка будет отрезок.

Конечно, если отрезок перпендикулярен плоскости проекции — он отобразится в одну точку.

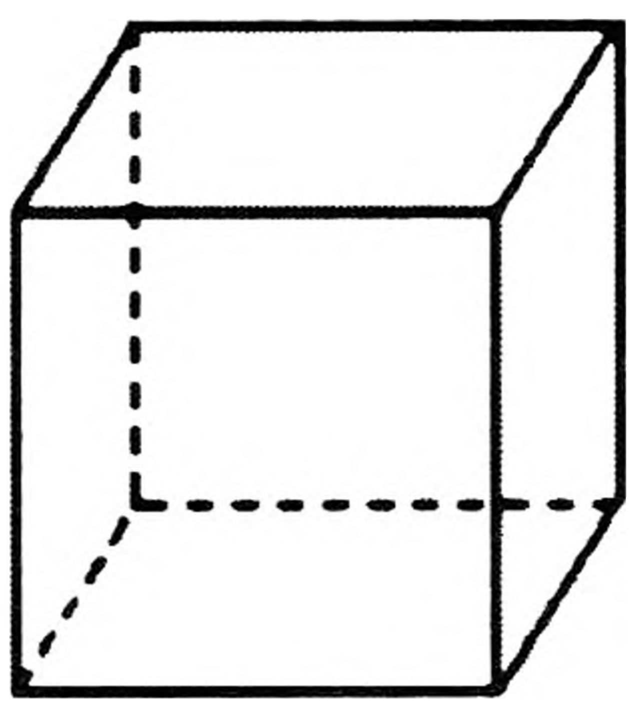
Проекцией круга в общем случае окажется эллипс.



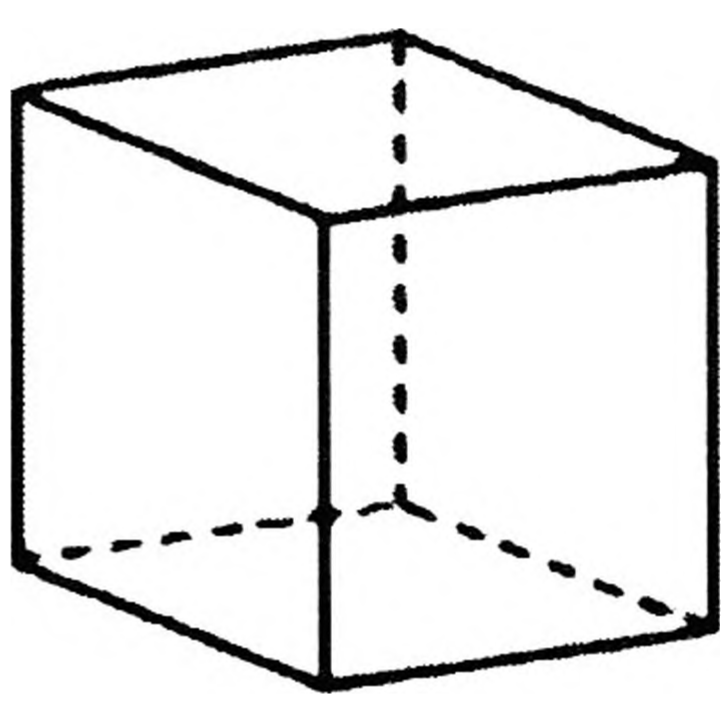
Проекцией прямоугольника — параллелограмм.



Вот как выглядит проекция куба на плоскость.

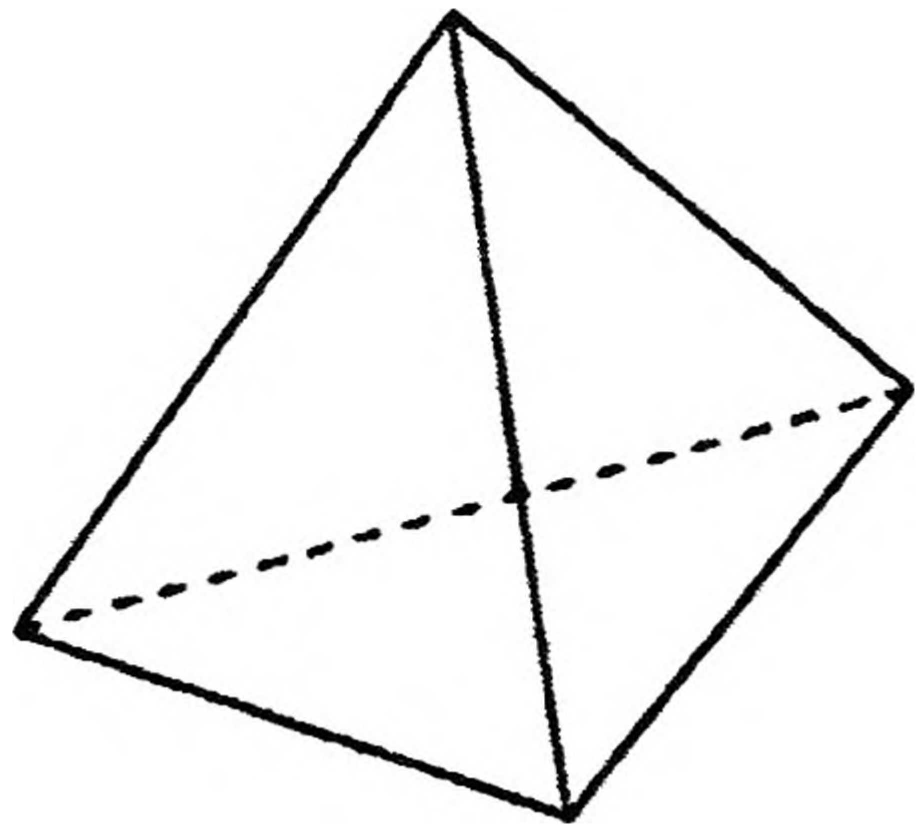


Здесь передняя и задняя грани параллельны плоскости проекции. Можно сделать по-другому.

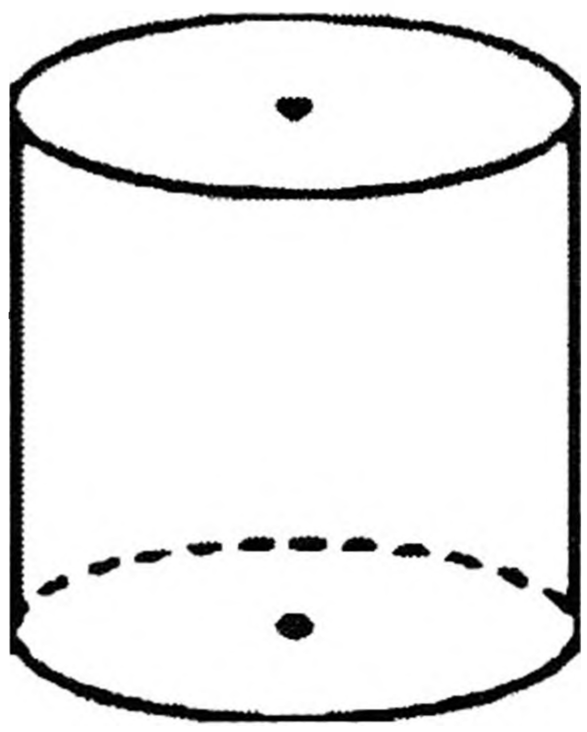


Какой бы ракурс мы ни выбрали, **проекциями параллельных отрезков на чертеже тоже будут параллельные отрезки**. Это один из принципов параллельного проецирования.

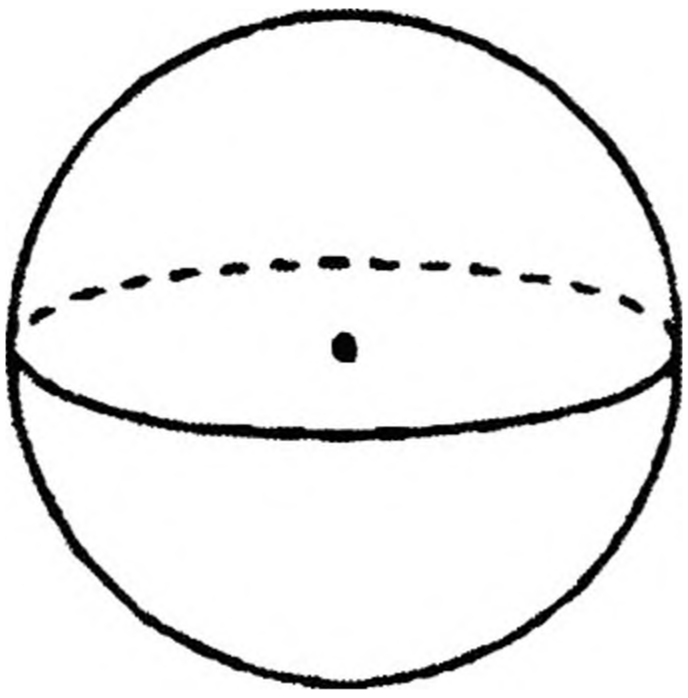
Рисуем проекции пирамиды,



цилиндра,

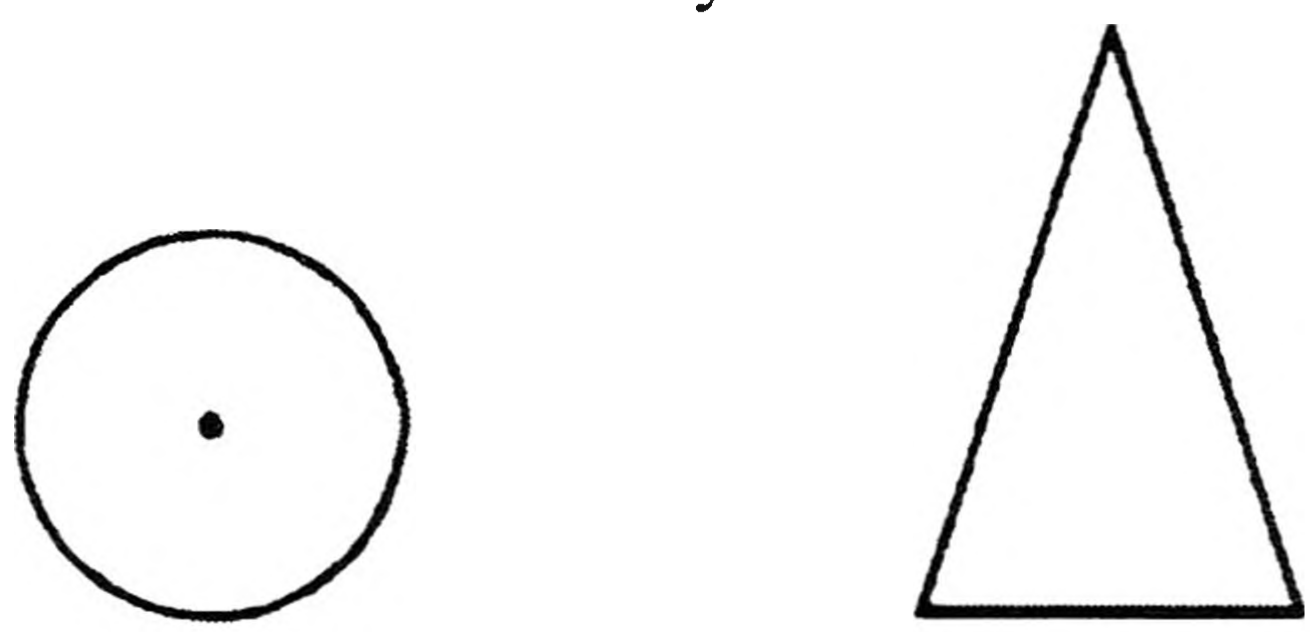


и шара.



Еще раз повторим основной принцип параллельного проецирования. Выбираем плоскость проекции и через каждую точку объемного тела проводим параллельные друг другу прямые. Эти прямые пересекают плоскость проекции под каким-либо углом. Если этот угол равен 90° — речь идет о **прямоугольном проецировании**. С помощью прямоугольного проецирования строятся чертежи объемных деталей в технике. В этом случае мы говорим о виде сверху, виде спереди и виде сбоку.

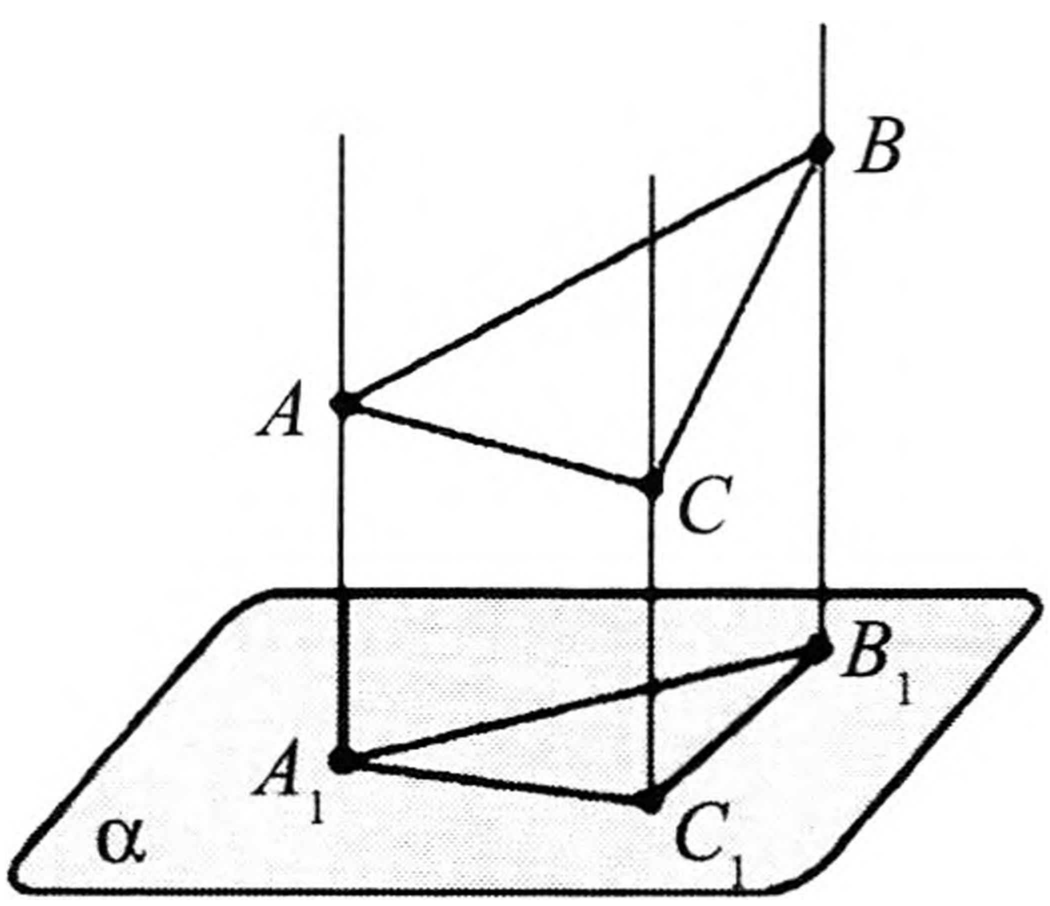
Конус



Вид сверху Вид сбоку

Иногда в задачах требуется найти **площадь прямоугольной проекции** фигуры.

Пусть S — площадь фигуры. Тогда площадь ее прямоугольной проекции равна $S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.



$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$,
где φ — угол между плоскостями (ABC) и α.

Как строить чертежи в задачах по стереометрии

Мы рассказали о том, что такое *параллельное проецирование* и как строить чертежи объемных тел. Однако часто бывает так, что вы построили чертеж — и непонятно, что делать дальше. На чертеже ничего хорошего не видно. Почему?

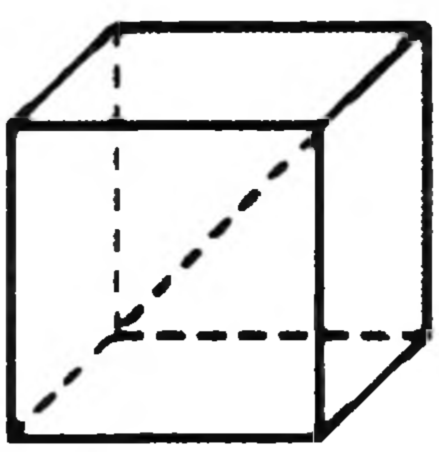
Не спешите обвинять себя в отсутствии пространственного мышления. Может быть, просто ракурс выбран неудачно.

Очень важно, чтобы объемное тело на вашем чертеже выглядело действительно объемным, а не складывалось, как зонтик. Следите, чтобы одна грань не накладывалась на другую, а непараллельные отрезки (например, ребро куба и его диагональ) не совпадали.

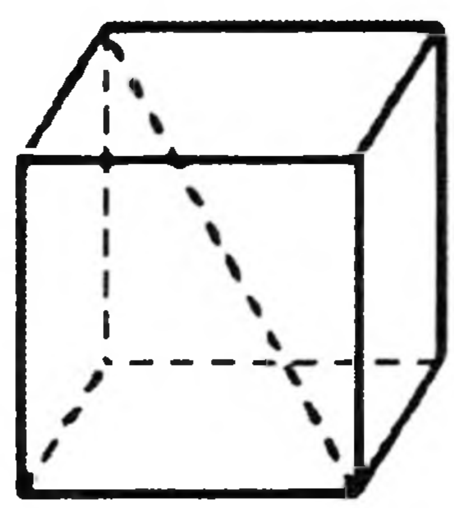
Мы рисуем чертеж **крупным**, чтобы на нем все было хорошо видно. Не стоит, как «лучший в мире рисовальщик петухов» Карлсон, изображать крошечного одинокого петушка (или малюсенький кубик) в углу тетради.

Приведем примеры удачных и неудачных чертежей.

Куб

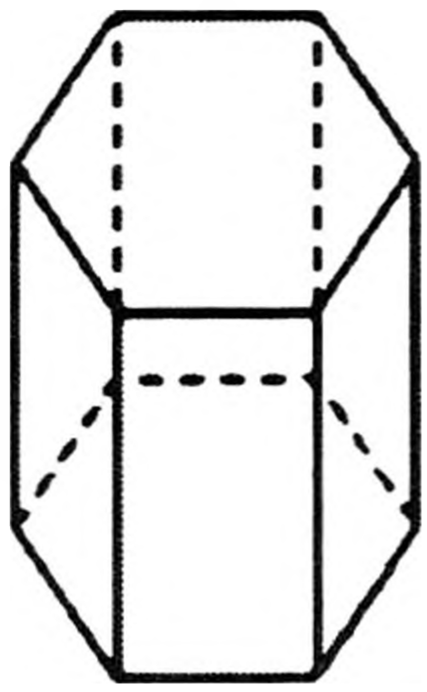


Неудачно. Главная диагональ и боковые ребра оказались на одной линии.

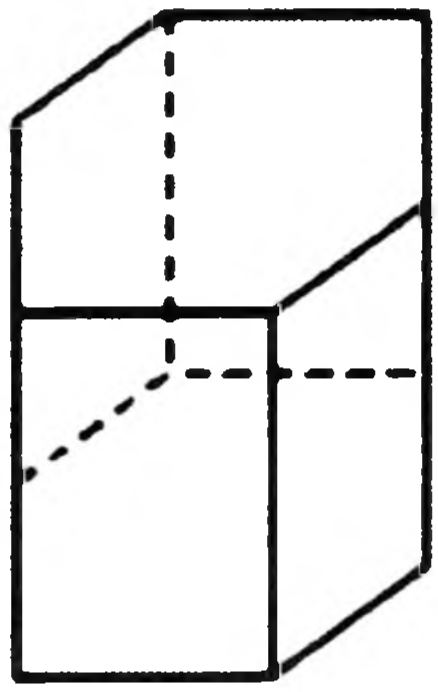


ОК

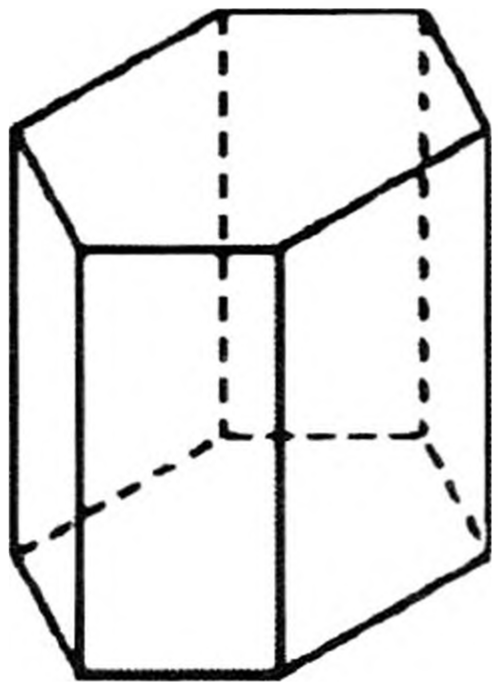
Шестигранная призма



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней грани оказались на одной линии.

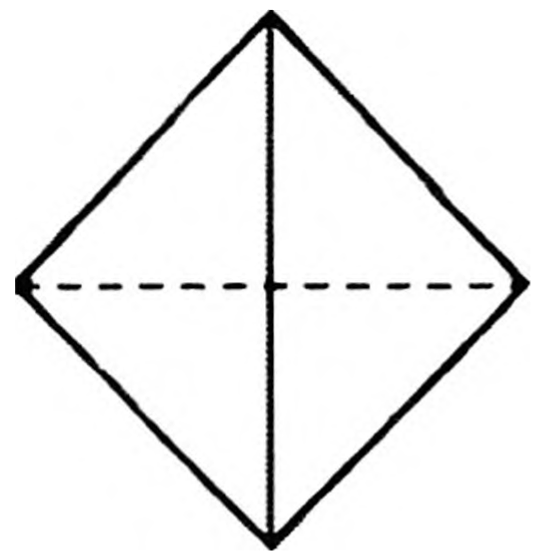


Неудачно. Стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии.

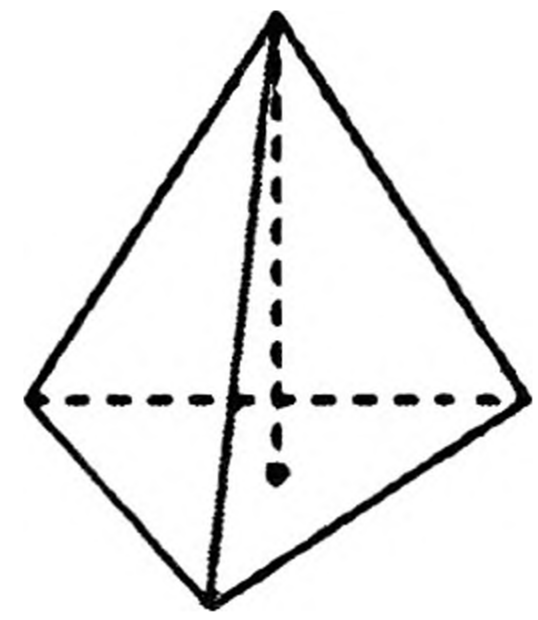


ОК

Тетраэдр

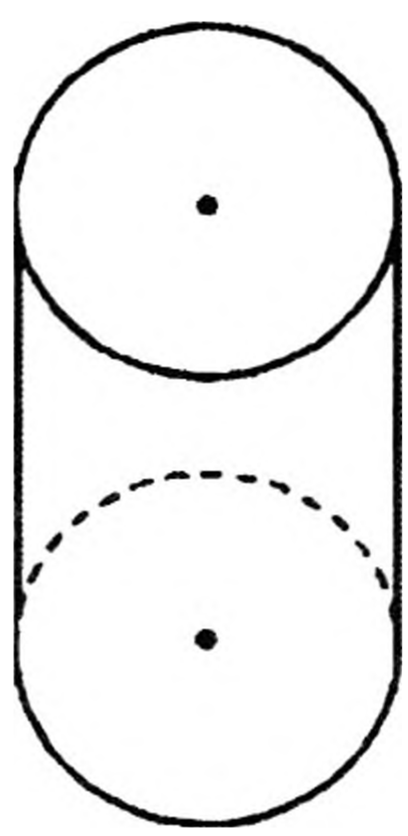


Неудачно. Рисунок стал плоским. Не видна высота тетраэдра.

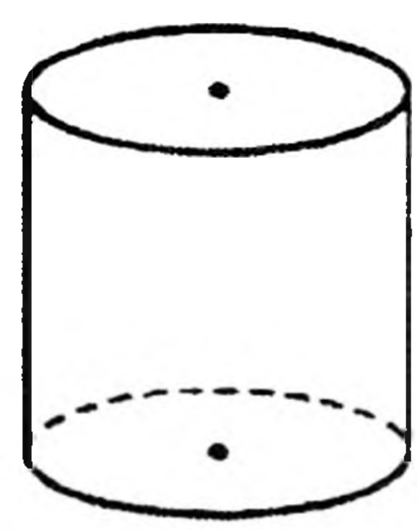


ОК

Цилиндр

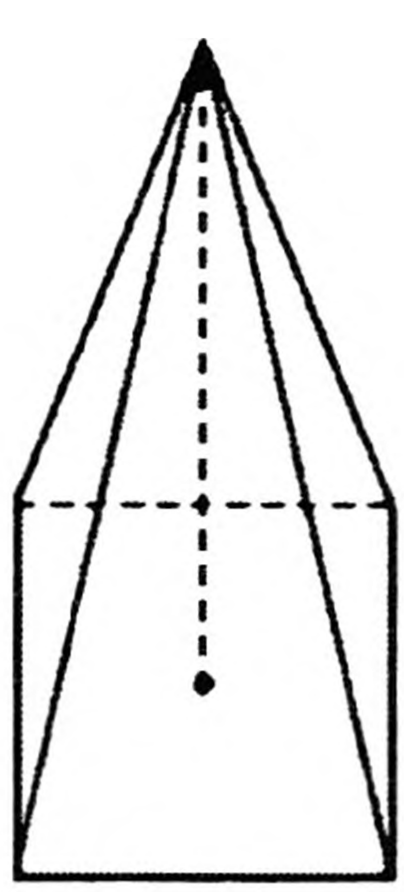


Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.

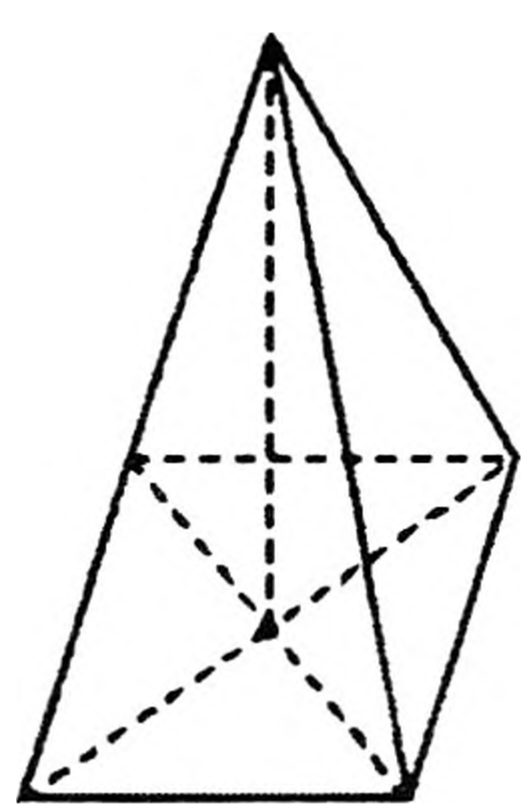


ОК

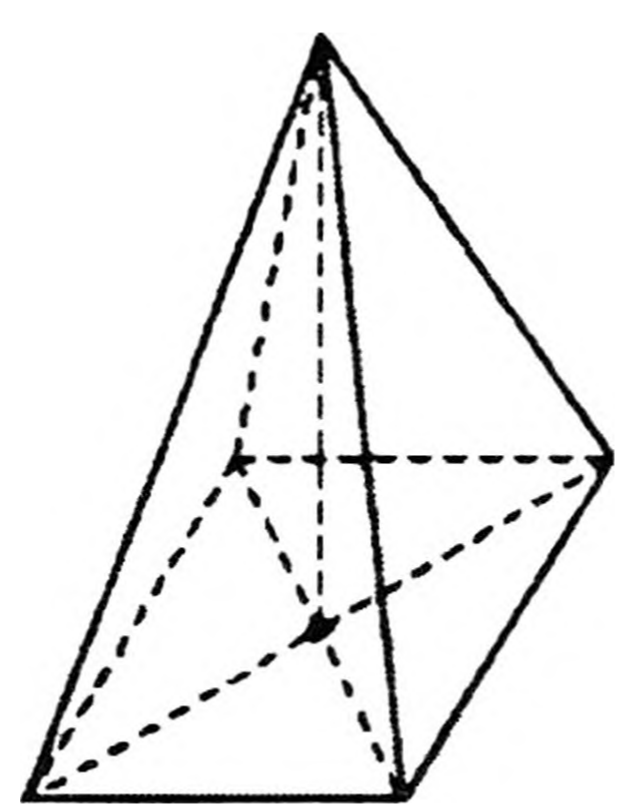
Правильная четырехугольная пирамида



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.



Неудачно. Левая боковая грань не видна.



ОК

Видимые линии изображаем сплошными, невидимые — штриховыми. Если решаете задачу векторно-координатным методом, ставьте рядом с точками их координаты. Это удобно.

Иногда одного чертежа недостаточно. Чаще всего для решения задач по стереометрии, кроме «объемного» чертежа, нужен один или несколько плоских.

Сейчас мы перейдем к решению задач по стереометрии. Повторим еще раз, чем же все-таки признак отличается от определения. Есть, например, определение перпендикулярности прямой и плоскости — и признак перпендикулярности прямой и плоскости. В чем разница между ними?

Предположим, в конкретной задаче нам надо доказать, что прямая m перпендикулярна плоскости α.

Если применять определение — придется перебрать все прямые, лежащие в плоскости α. Сделать это невозможно, да и не нужно. Достаточно, чтобы прямая m была перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости α.

Правила решения стереометрических задач ЕГЭ:

1. Начинаем с построения чертежа.

Строим чертеж ручкой (не карандашом!), с помощью линейки. Невидимые элементы объемного тела изображаем штриховыми линиями.

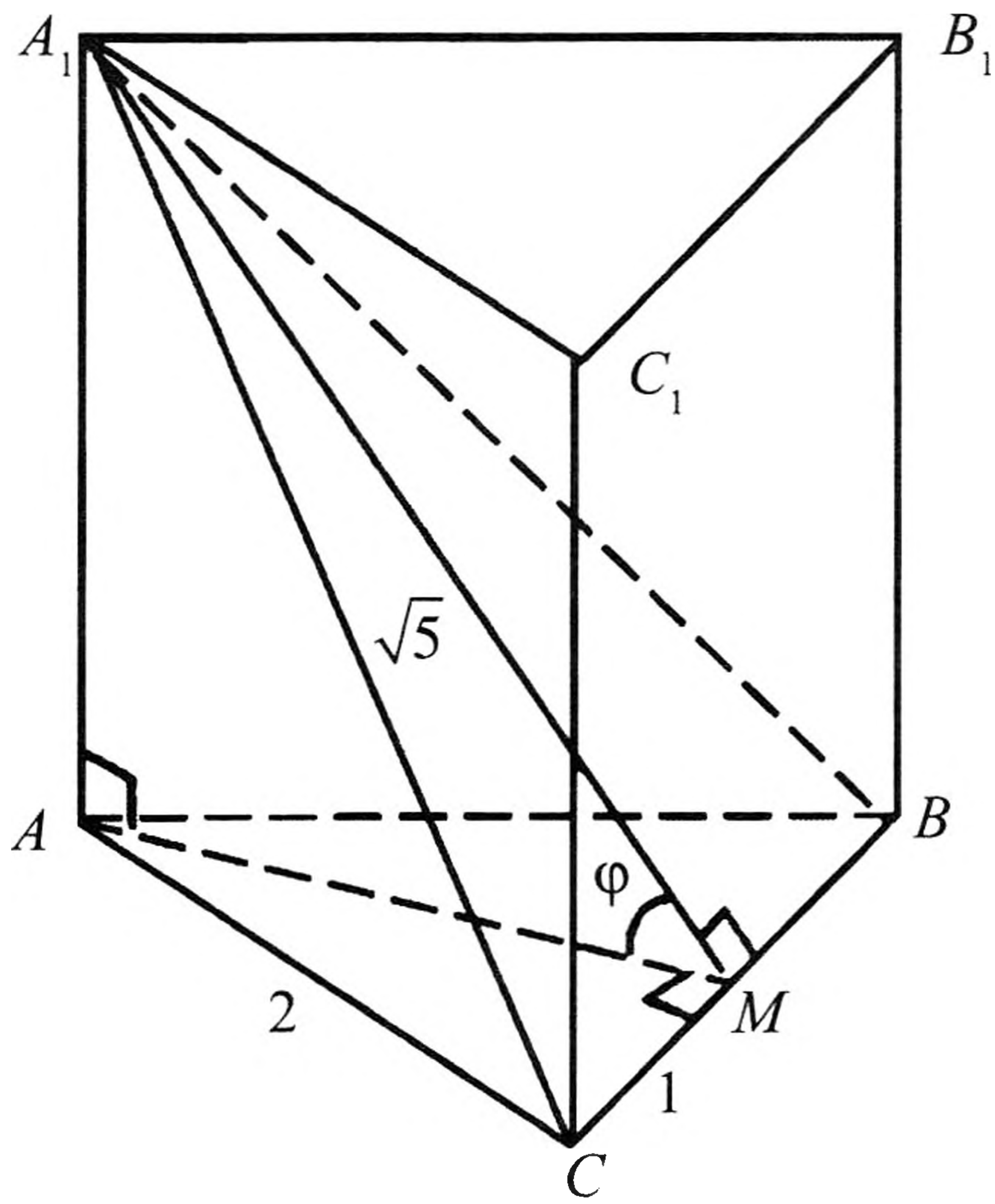
2. Записываем каждый шаг решения. Помним, что в задаче по стереометрии необходимы подробные объяснения. Не просто «Прямая AB перпендикулярна плоскости α», а «Прямая AB перпендикулярна плоскости α, потому что она перпендикулярна пересекающимся прямым c и d, лежащим в плоскости α». Конечно, все это лучше записать не словами, а символами.

3. От объемной задачи переходим к плоской, планиметрической. Все необходимые плоские чертежи рисуем отдельно.

Задачи по стереометрии

Для решения задач по стереометрии применяются два способа — классический и векторно-координатный. Мы начнем с классического.

1. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



По условию, призма правильная. Это значит, что в ее основании лежит правильный многоугольник, а боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

Сечение призмы плоскостью A_1BC изображено на чертеже.

Оформляя решение на ЕГЭ, записывайте все определения, которыми пользуетесь. В этой задаче мы запишем определение угла между плоскостями.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии пересечения плоскостей, проведенными в этих плоскостях.

Чтобы найти угол между плоскостями (ABC) и (A_1BC), надо провести перпендикуляры к линии BC пересечения этих плоскостей. В какой точке прямой BC их проводить? Конечно, можно взять любую точку прямой BC, однако выбираем ту, которая для нас наиболее удобна. Это точка M — середина отрезка BC.

Проведем AM и A_1M. Треугольник ABC — правильный, значит, AM — медиана и высота ($AM \perp BC$). Треугольник A_1BC — равнобедренный, значит, A_1M — также медиана и высота ($A_1M \perp BC$). Получаем: $\angle A_1MA = \varphi$ — искомый, согласно определению угла между плоскостями.

Осталось найти этот угол из какого-либо треугольника, в который он входит. Например, из прямоугольного треугольника A_1MA. Угол A в нем прямой, так как боковое ребро призмы AA_1 перпендикулярно плоскости основания, а значит, любой прямой, лежащей в плоскости основания.

Рассмотрим ΔCAM, $\angle M = 90°$. $CM = \frac{1}{2}BC = 1$. По теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Рассмотрим ΔAA_1C, $\angle A = 90°$. По теореме Пифагора

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{5-4} = 1.$$

Из треугольника AA_1M, в котором угол A прямой, найдем $\operatorname{tg}\varphi$.

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AA_1}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Получаем $A_1MA = 30°$.

Ответ: 30°.

Покажем еще один, более короткий способ решения этой задачи.

Второй способ.

Правильный треугольник ABC, лежащий в основании, является проекцией треугольника A_1BC на плоскость основания. Вспомним, что площадь прямоугольной проекции фигуры равна произведению площади фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, то есть $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1BC} \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями, который нам и надо найти.

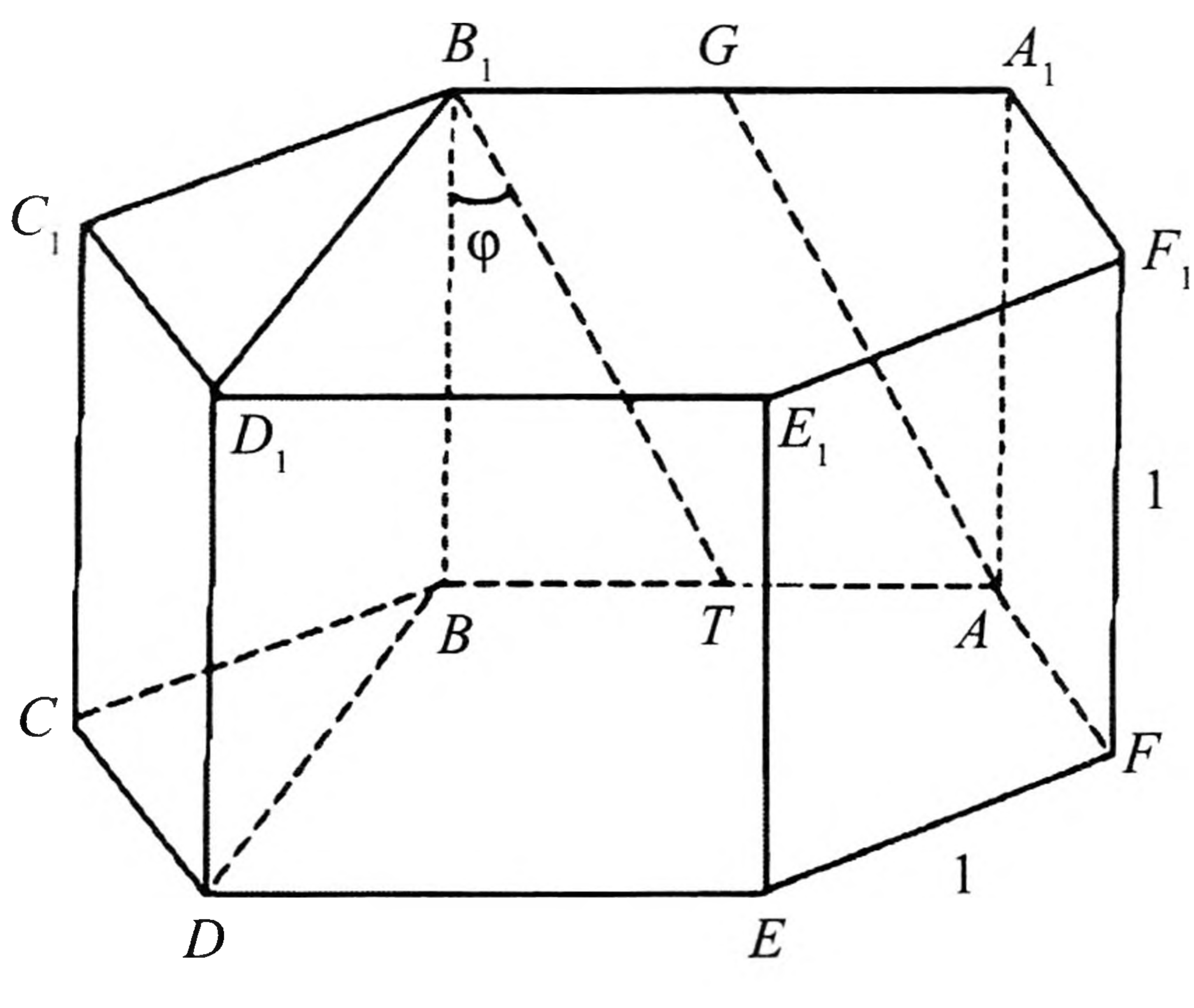
$S_{ABC} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, по формуле площади правильного треугольника.

В равнобедренном треугольнике A_1BC, где основание равно 2, а боковая сторона $\sqrt{5}$, найдем высоту A_1M.

Тогда $S_{A_1BC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot A_1M = 1$.

Получим, что $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi = 30°$.

2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямой AG и плоскостью BDD_1.



Мы видим, что прямая и плоскость пересекаются вне призмы. В этой ситуации возможны два выхода. Первый — достроить чертеж, продлив эти плоскость и прямую до точки пересечения. Второй — провести через какую-либо точку, лежащую в плоскости BB_1D_1, прямую, параллельную AG, и найти угол между плоскостью и полученной прямой. Мы выберем второй способ.

В плоскости ABB_1 проведем через точку B_1 прямую B_1T, параллельную AG. Точка T является серединой ребра AB, так как ATB_1G — параллелограмм.

Найдем угол между TB_1 и (BB_1D_1).

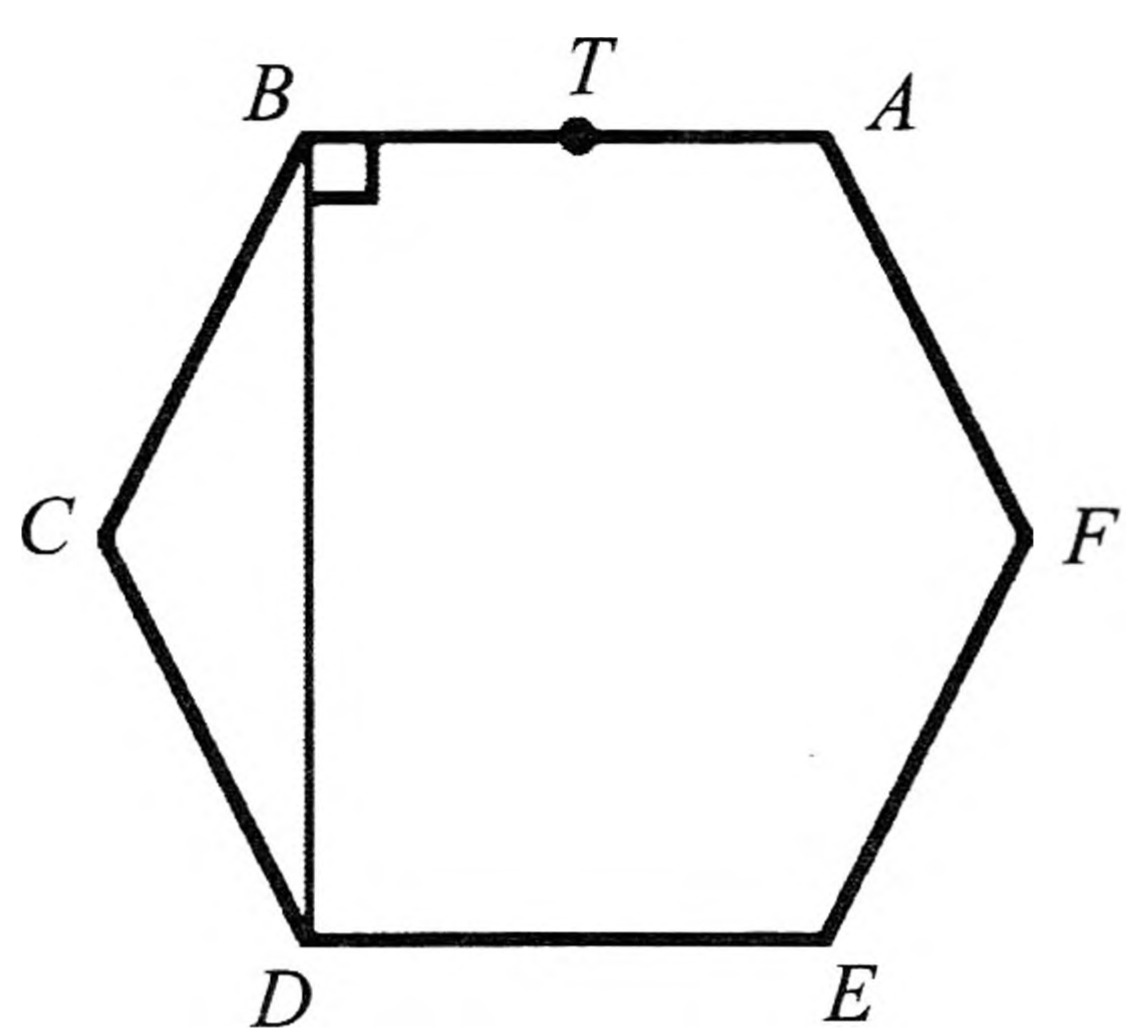
Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Точка B_1 уже лежит в нужной нам плоскости. Значит, надо найти проекцию точки T на эту плоскость. Для этого надо опустить из точки T перпендикуляр на эту плоскость. Но какая же точка будет основанием этого перпендикуляра? В какую точку плоскости BB_1D_1 проецируется точка T?

Вспомним признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Сделаем плоский чертеж нижнего основания и докажем, что $TB \perp DB$.



Угол ABC — угол правильного шестиугольника, и он равен 120°, $\angle CDB = CBD = 30°$ (из равнобедренного треугольника DBC). Значит, $\angle CDB = 120° - 30° = 90°$. $TB \perp DB$.

Кроме того, TB лежит в плоскости нижней грани (ABC), а $BB_1 \perp (ABC)$ как высота призмы. Значит, BB_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABC, в том числе и прямой TB.

Итак, $TB \perp BB_1$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $TB \perp (DBB_1)$.

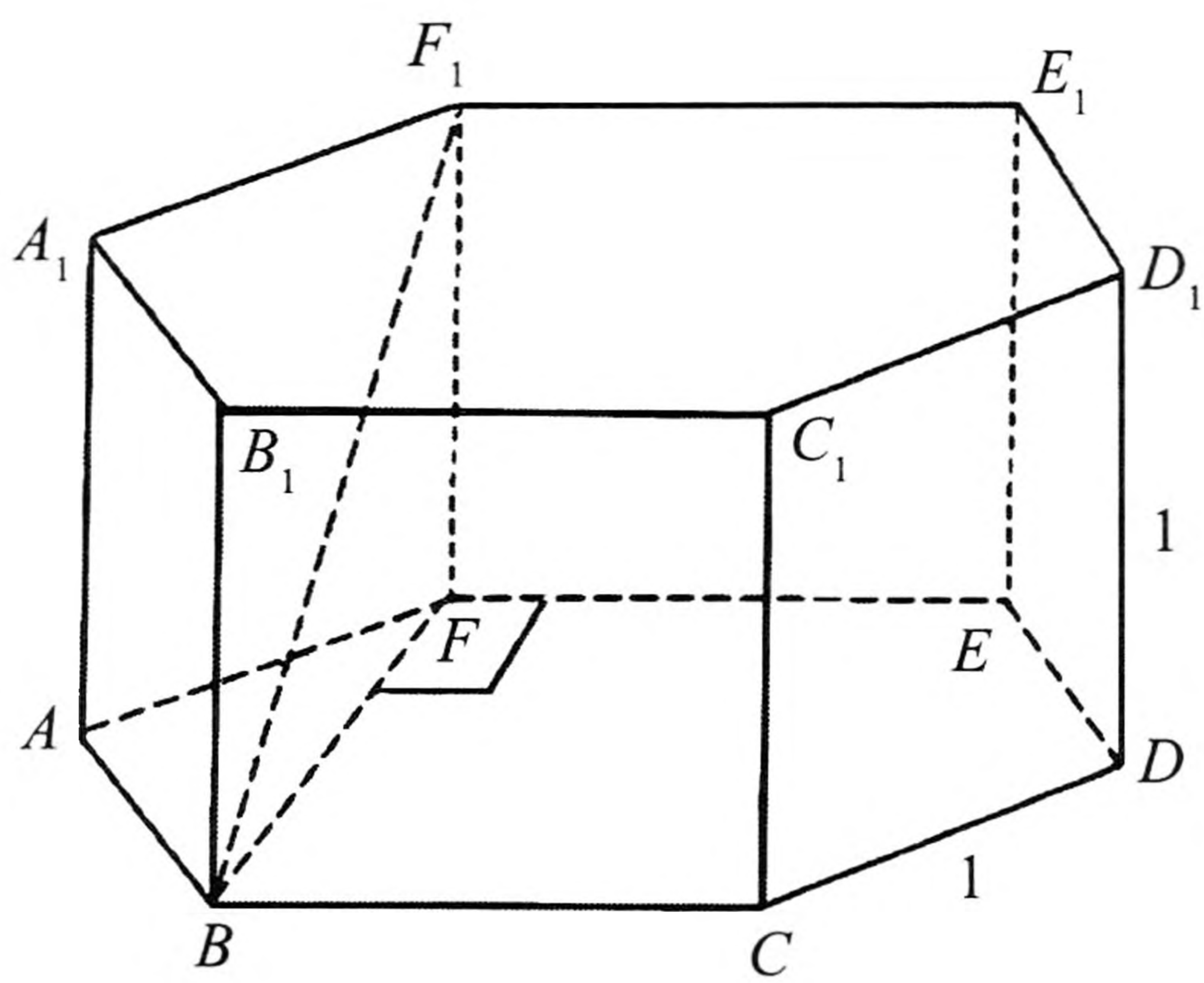
Тогда точка B — проекция точки T на (DBB_1).

Искомый угол $BB_1T = \alpha$.

$$BT = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2},\ BB_1 = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{BT}{BB_1} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

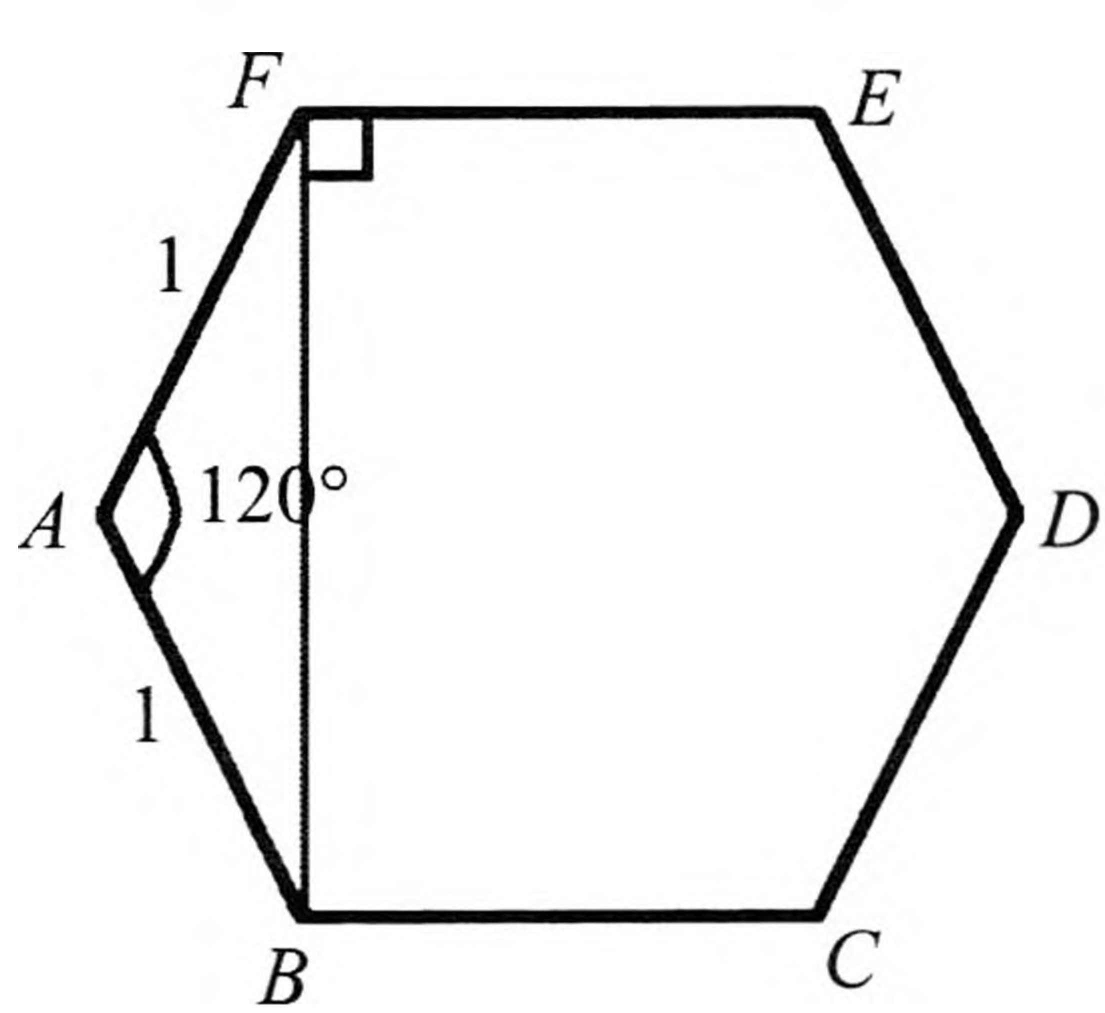
3. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.



Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Значит, необходимо опустить перпендикуляр из точки B на прямую E_1F_1. В какой же плоскости будет лежать этот перпендикуляр?

Сделаем плоский чертеж основания призмы.



Проведем BF. В предыдущей задаче мы доказали, что $BF \perp FE$. При этом BF — проекция BF_1 на плоскость (ABC), $EF \in (ABC)$. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах $BF_1 \perp FE$.

$F_1E_1 \parallel FE$, значит, $BF_1 \perp F_1E_1$. Тогда BF_1 — искомое расстояние от точки B до F_1E_1. Найдем это расстояние из ΔBFF_1.

Найдем BF из плоского чертежа. Из ΔABF: $AB = AF = 1$, $\angle BAF = 120°$. По теореме косинусов:

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AB \cdot AF \cdot \cos(\angle BAF),$$

$$BF^2 = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

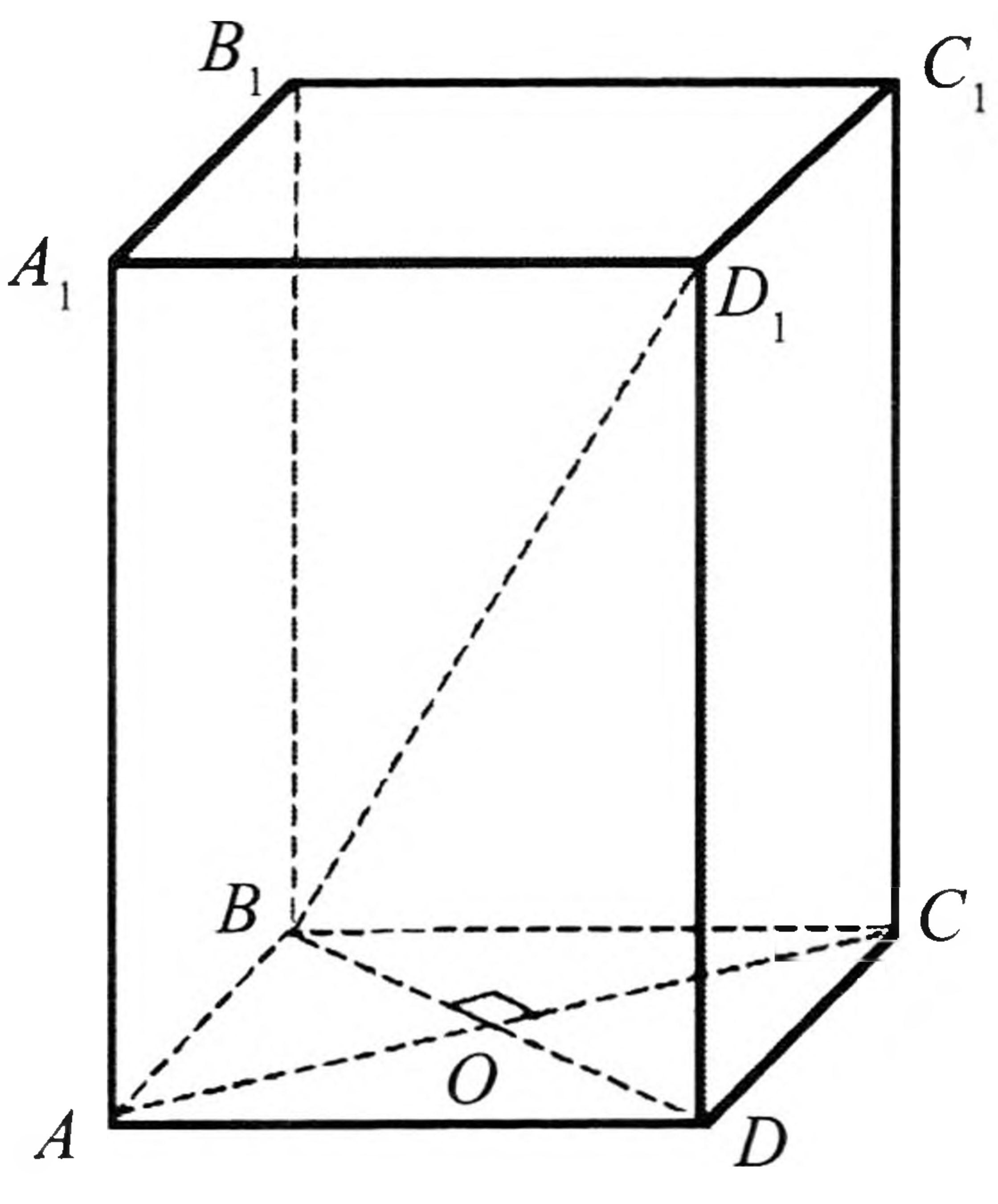
$$BF = \sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора из ΔBFF_1 находим гипотенузу

$$BF_1 = \sqrt{BF^2 + FF_1^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Ответ: 2.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб. Найти угол между прямыми AC и BD_1.



Диагонали ромба $ABCD$, лежащего в основании, взаимно перпендикулярны. Значит, $BD \perp AC$.

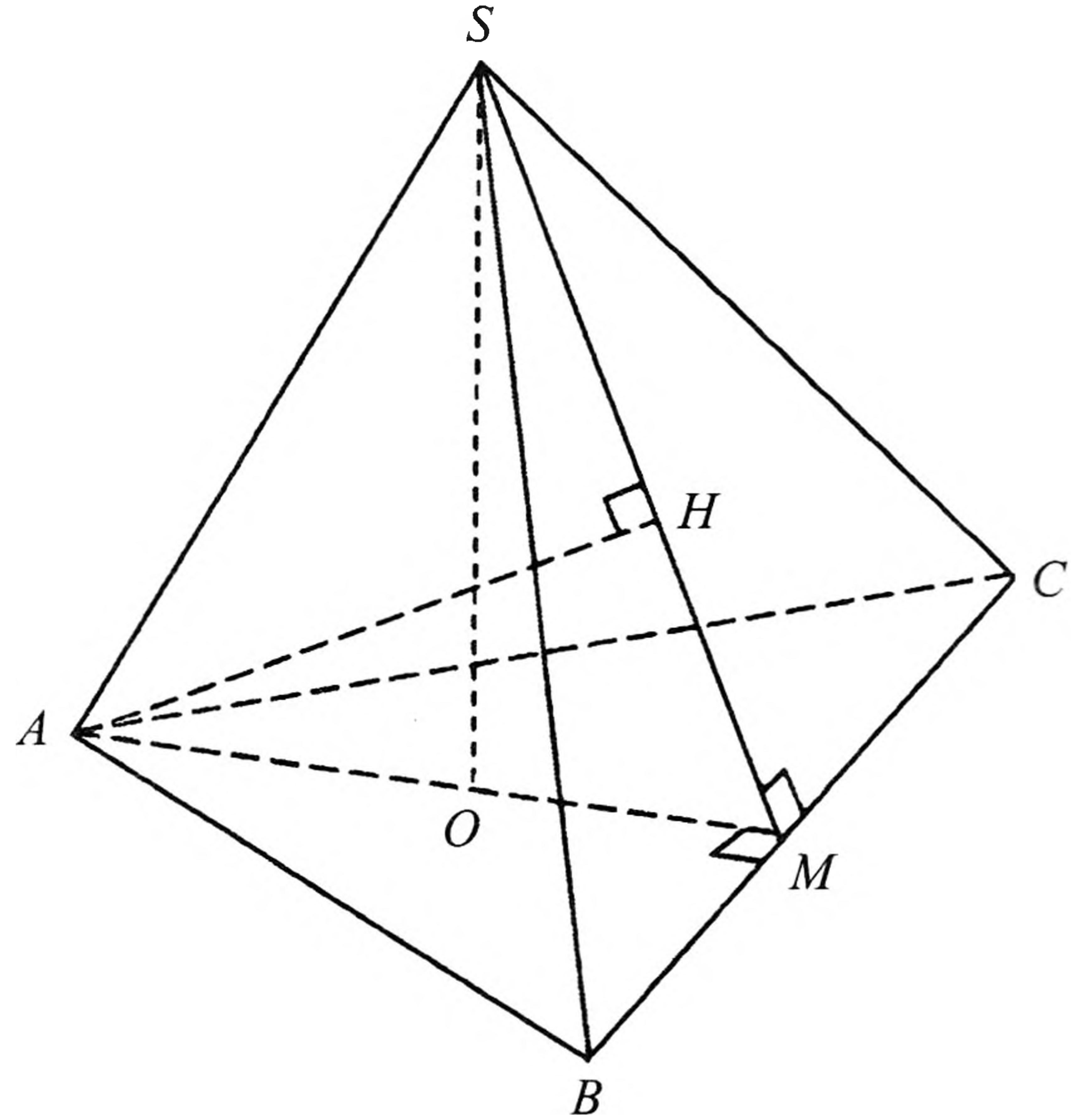
Вспомним теорему о трех перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

$BD \perp AC$, BD — проекция BD_1 на плоскость основания, значит, $BD_1 \perp AC$. Получаем, что искомый угол — прямой.

Ответ: 90°.

5. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60 градусов. Найдите расстояние от вершины основания до плоскости противолежащей ей боковой грани.



Обратите внимание на эту задачу. Она содержит базовые схемы для решения очень многих задач по стереометрии.

Будем искать расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости (SBC).

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим этой плоскости.

Значит, надо построить отрезок с одним из концов в точке A, перпендикулярный двум пересекающимся прямым в плоскости (SBC).

Пусть точка M — середина BC. Вспомните, мы уже пользовались этим приемом в самой первой задаче.

1) Проведем $AM \in (ABC)$. AM — медиана и высота правильного треугольника ABC, значит, $AM \perp BC$.

2) Проведем $SM \in (SBC)$. SM — медиана и высота равнобедренного треугольника SBC, значит, $SM \perp BC$.

Эти два пункта — важные шаги построения, часто встречающиеся в задачах по стереометрии. Запомните их.

3) Из пунктов 1) и 2) следует, что $(ASM) \perp BC$, а угол AMS — угол между боковой гранью и плоскостью основания, равный $60°$ (по определению угла между плоскостями).

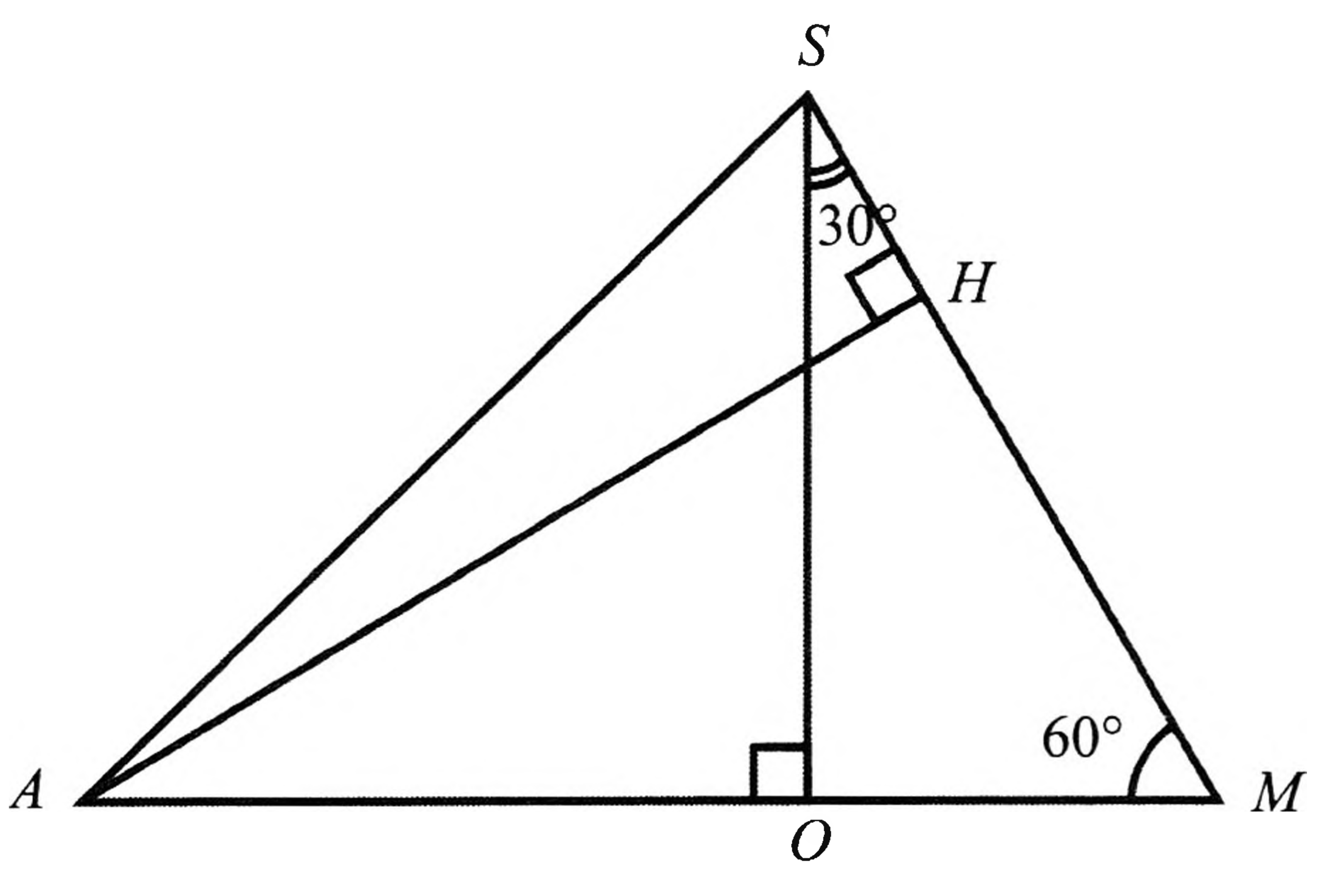
Проведем $AH \perp SM$ в плоскости (ASM).

Заметим, что нужно обязательно указывать, в какой плоскости идет построение. Мы не можем провести линию просто в воздухе. Необходима плоскость, в которой лежит эта линия.

Кроме того, $AH \perp BC$, так как $AH \in (ASM)$, $(ASM) \perp BC$.

Итак, отрезок AH перпендикулярен двум пересекающимся прямым в плоскости (SBC), поэтому $AH \perp (SBC)$. Значит, $|AH|$ — расстояние от A до плоскости (SBC).

Чтобы найти это расстояние, сделаем плоский чертеж сечения пирамиды плоскостью (ASM).



Пусть точка O — проекция точки S на плоскость основания пирамиды. По условию, $SO = 4$ как высота пирамиды.

Из ΔSOM ($\angle M = 60°$, $\angle O = 90°$) найдем OM:

$$\text{tg}60° = \frac{SO}{OM},$$

$$\sqrt{3} = \frac{4}{OM},$$

$$OM = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Катет, лежащий напротив угла OSM, равного 30°, равен половине гипотенузы, поэтому $SM = 2OM = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

У правильной пирамиды вершина S проецируется в центр основания — точку O, которая является центром вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Также для правильного треугольника ABC точка O — точка пересечения его высот, медиан и биссектрис. Значит, по свойству медиан точка O лежит на AM и делит AM в отношении 2:1, считая от вершины A.

Следовательно, $AM = 3OM = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$.

Воспользуемся методом площадей, записав площадь треугольника ABC двумя способами.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot SO = \frac{1}{2}SM \cdot AH,$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 4 = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot AH,$$

$$AH = 6.$$

Ответ: 6.

Второй способ.

Покажем, как решить данную задачу **методом объемов.** Суть метода заключается в том, чтобы разными способами записать объем нашей пирамиды, а затем найти неизвестное расстояние от вершины до противоположной грани, которое является высотой пирамиды. Ведь в качестве основания пирамиды мы можем выбрать любую ее грань.

Из прямоугольного треугольника SOM найдем $OM=\frac{4}{\sqrt{3}}$. Тогда $SM=\frac{8}{\sqrt{3}}$ и $AM=\frac{12}{\sqrt{3}}$, так как $OM=\frac{1}{3}AM$ (по свойству правильного треугольника). Отсюда $AB=AC=BC=8$, $S_{ABC}=\frac{16}{\sqrt{3}}$. Мы нашли площадь основания пирамиды.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO=\frac{64}{\sqrt{3}}$.

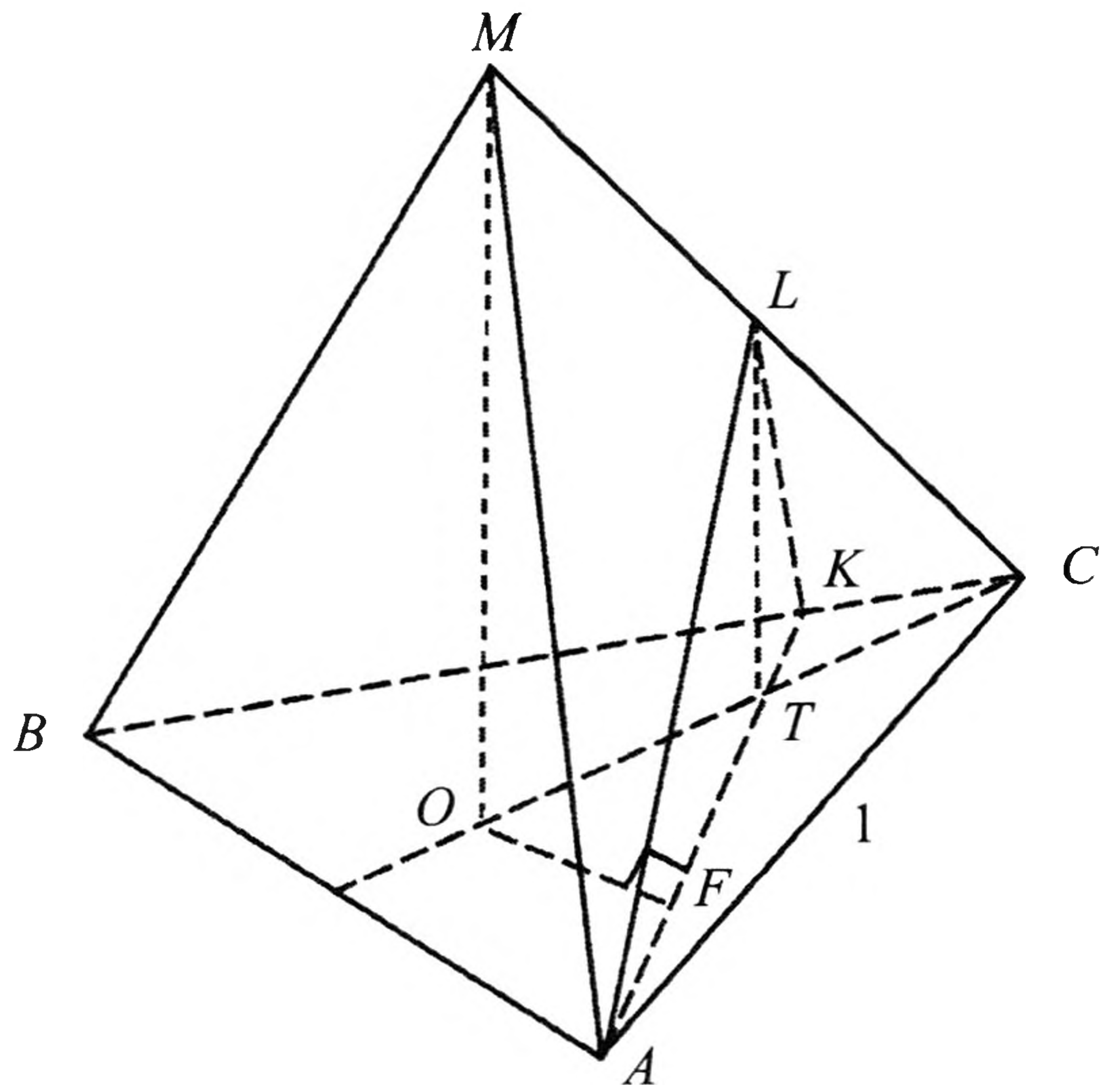
С другой стороны, объем пирамиды $V=\frac{1}{3}\cdot S_{SBC}\cdot AH$, где AH — неизвестное нам расстояние от вершины A до плоскости SBC, которое мы и хотим найти.

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot SM=\frac{32}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $AH=6$.

Ответ: 6.

6. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.



На вид задача простая, однако не каждый абитуриент с ней справляется. Прямые AL и MO скрещиваются (не параллельны и не пересекаются). Иначе говоря, скрещивающимися называются прямые, которые невозможно поместить в одну плоскость. Они лежат в параллельных плоскостях.

Найдем такую пару параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые. Иными словами, нам надо найти такую плоскость, которая проходит через AL параллельно прямой OM. Если ее пока нет на чертеже, значит, построим ее.

Опустим $LT \perp (ABC)$.

$LT \parallel MO$, так как $MO \perp (ABC)$ (два перпендикуляра к одной плоскости параллельны друг другу). Но где будет основание перпендикуляра — точка T?

Докажем, что точка T лежит на OC.

Отрезок OC — проекция отрезка MC на плоскость (ABC).

Тогда точка T — проекция L на (ABC), точка L — середина MC. И по свойству прямоугольного проецирования T — середина OC.

Проведем плоскость (ALT).

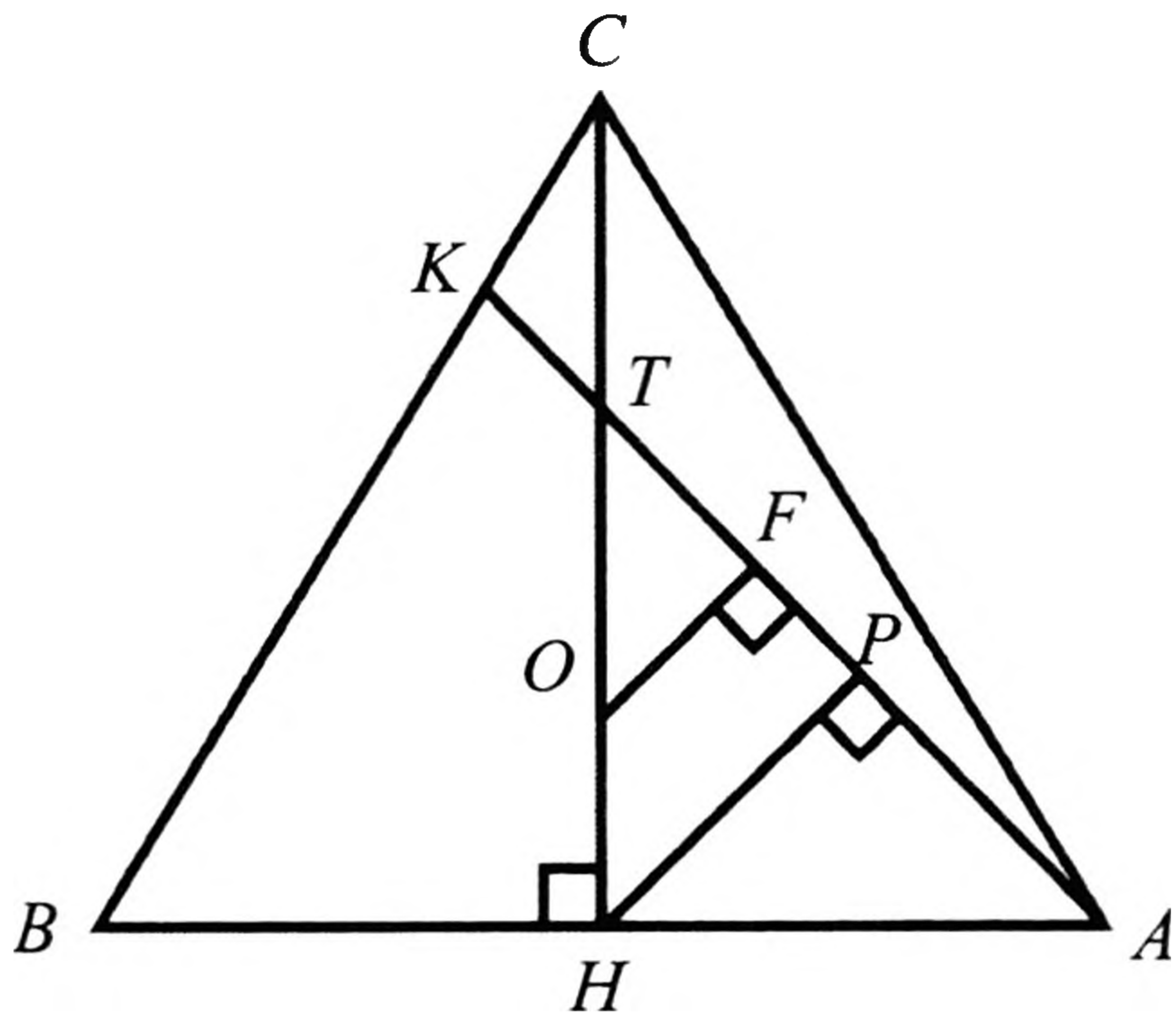
$LT \parallel MO, LT \in (ALT) \Rightarrow (ALT) \parallel OM$. Через одну из двух скрещивающихся прямых мы провели плоскость, параллельную второй прямой. Достроим сечение тетраэдра этой плоскостью, продлив AT до пересечения с BC в точке K ($AT \cap BC = K$) и соединив точки L и K. Тогда треугольник ALK — искомое сечение.

Найдем расстояние от прямой OM до плоскости ALK.

В плоскости (ABC) проведем $OF \perp AT$. Кроме того, $OF \perp LT$ (так как $LT \perp (ABC)$).

Значит, $OF \perp (ALT)$, OF — расстояние от точки O до (ALT). Другими словами, OF — расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, в которой лежит вторая прямая.

Переходим к плоскому чертежу основания ABC.



Вспомним навыки решения геометрических задач.

Из ΔAHT: $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, $TH = \frac{2}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (O — центр правильного треугольника, T — середина OC), тогда по теореме Пифагора

$$TA^2 = \sqrt{AH^2 + HT^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Проведем $HP \parallel OF \Rightarrow HP \perp AK$.

$\Delta TFO \sim \Delta TPH$ (по двум углам) $\Rightarrow FO = \frac{1}{2}HP$ (O — середина HT).

HP — высота прямоугольного треугольника HTA. Запишем его площадь двумя способами: как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе.

$$S_{\Delta AHT} = \frac{1}{2}AH \cdot HT = \frac{1}{2}HP \cdot AT,$$

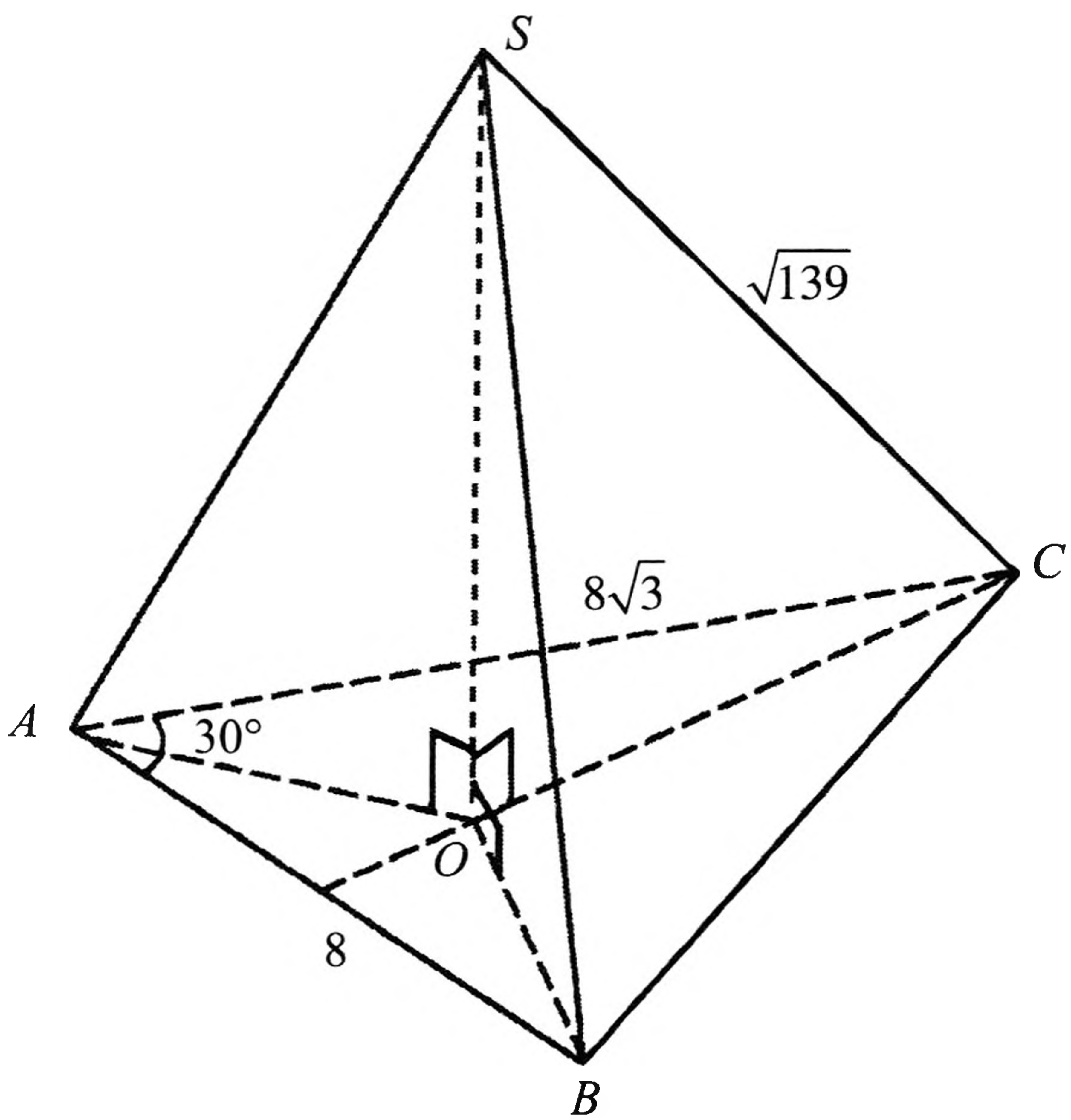
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = HP \cdot \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$HP = \frac{\sqrt{12}}{2 \cdot \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$OF = \frac{1}{2}HP = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

7. Основанием треугольной пирамиды является треугольник, две стороны которого равны 8 и $8\sqrt{3}$, а угол между ними равен 30 градусов. Длина каждого бокового ребра равна $\sqrt{139}$. Найдите объем пирамиды.



Хотя все боковые ребра этой пирамиды равны, она не является правильной. При этом одно интересное свойство у нее есть.

Докажем, что если все боковые ребра пирамиды равны, то вершина проецируется в центр окружности, описанной вокруг основания.

Рассмотрим треугольники SOA, SOB и SOC. Все они — прямоугольные, так как высота SO перпендикулярна плоскости ABC, а значит, и любой прямой, лежащей в плоскости ABC.

Более того.

$\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (по катету и гипотенузе, SO — общий катет, гипотенузы $SA = SB = SC$ по условию). Значит, $AO = OC = OB$.

Итак, точка O равноудалена от точек A, B и C. Значит, O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Зная радиус этой описанной окружности и стороны треугольника ABC, мы сможем найти и его площадь. Затем по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h$ найдем объем пирамиды.

Найдем BC по теореме косинусов из треугольника ABC.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC),$$

$$BC^2 = 64 + 192 - 2 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$BC = 8.$$

Треугольник ABC оказался равнобедренным.

По теореме синусов найдем радиус описанной окружности:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = 8.$$

Рассмотрим треугольник SOC:

$$OC = R = 8,\ \angle O = 90° \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} =$$

$$= \sqrt{139 - 64} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (по теореме Пифагора).}$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h.$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC) \cdot SO,$$

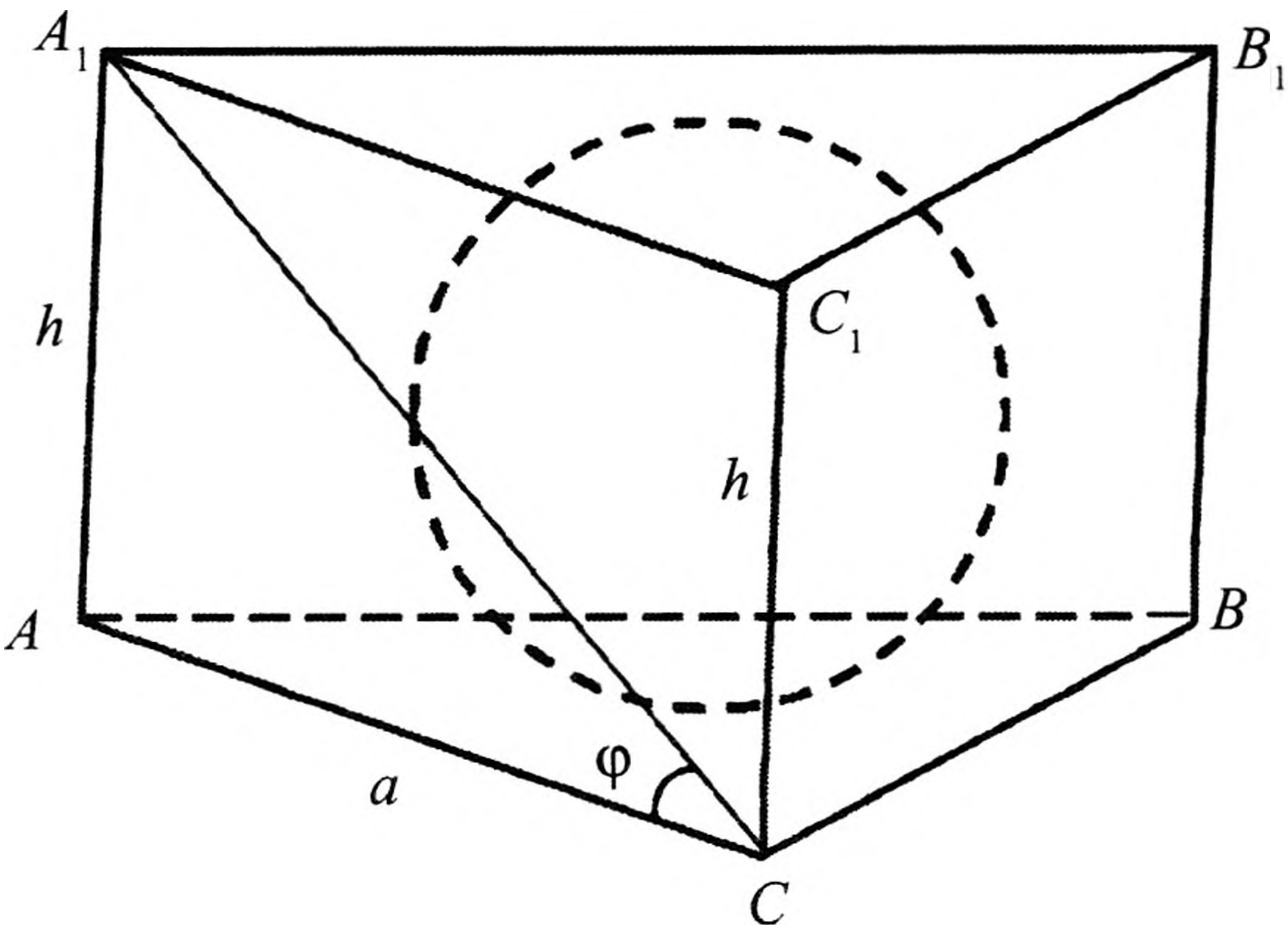
$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 80.$$

Ответ: 80.

Дополнительная задача

Докажите самостоятельно, что у пирамиды, у которой все боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, вершина проецируется в центр окружности, вписанной в основание.

8. В правильную треугольную призму можно вписать шар таким образом, что он будет касаться всех боковых граней и оснований призмы. Найдите угол (в градусах) наклона диагонали боковой грани призмы к плоскости основания.



Задача кажется легкой, но в ней есть подвох. Надо найти, чему равен угол φ, показанный на чертеже. Первое, что может прийти в голову, — что этот угол равен 45 градусам, так как шар вписан в призму, и вроде бы все грани должны быть квадратами. Что же на самом деле?

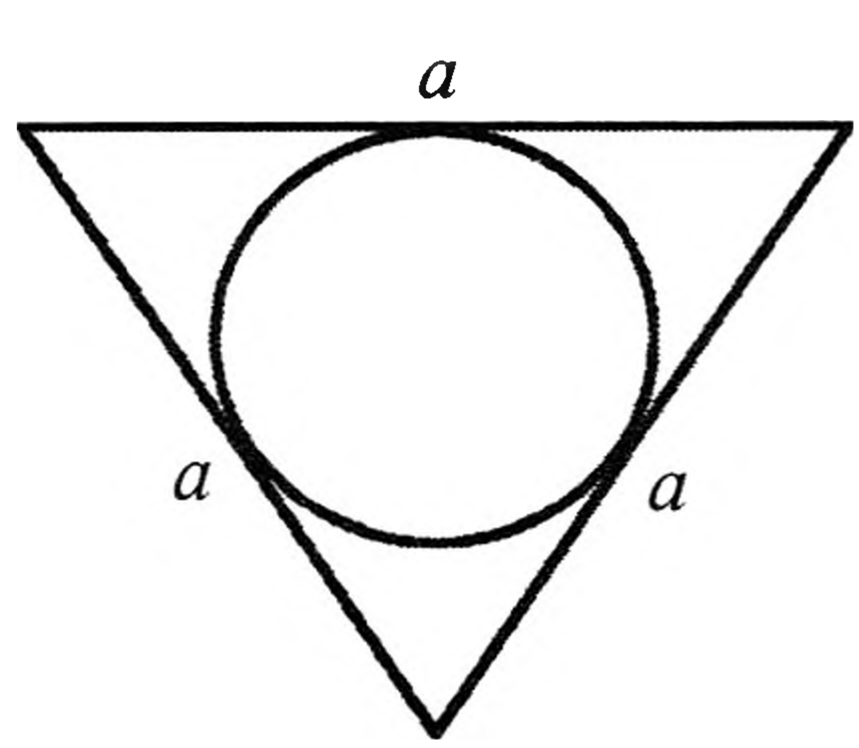
Обратите внимание, что линейные размеры в задаче не даны. Значит, мы введем их сами.

Пусть a — сторона основания призмы, h — ее высота.

Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{h}{a}$.

Так как шар касается нижней и верхней граней призмы, то его диаметр равен высоте призмы, $h = 2R$.

Изобразим вид сверху.



Круг вписан в правильный треугольник. Если его сторона a, то радиус вписанной окружности $R = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{6R}{\sqrt{3}}$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{a} = \frac{2R}{6R} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

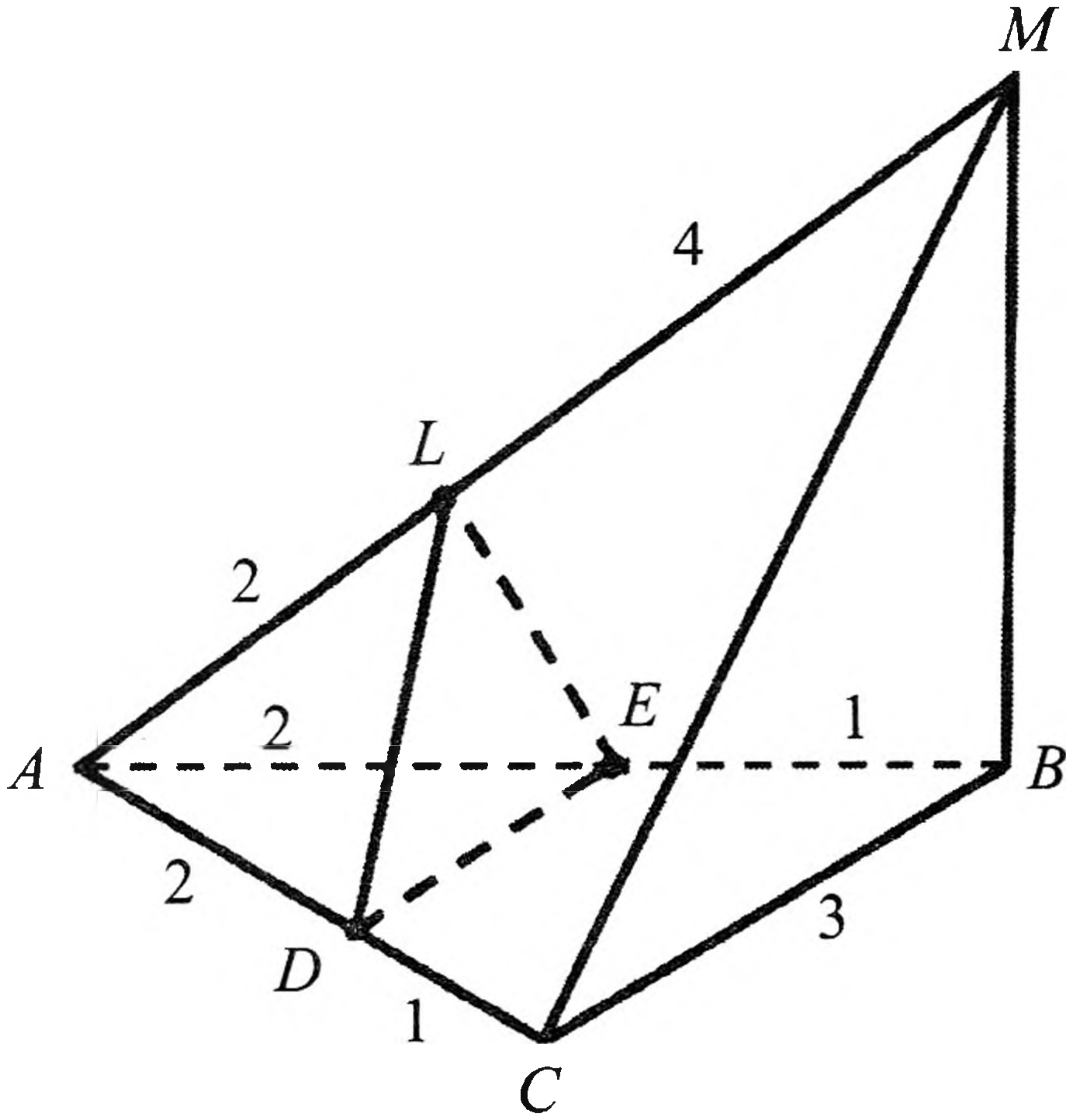
$$\varphi = 30^\circ.$$

Если вам все еще кажется, что угол должен быть 45 градусов, посмотрите на чертеж спереди. Сможете ли вы увидеть круг, вписанный в квадрат?

Вы увидите прямоугольник и круг, который касается верхнего и нижнего оснований прямоугольника.

Ответ: 30°.

9. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.



$AD = AL = 2$,
$BE = 1$.

В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник ABC. Кроме того, боковые грани MBA и MBC — прямоугольные треугольники, поскольку ребро MB перпендикулярно плоскости основания.

Сечение построить легко.

Точки D и L лежат в плоскости AMC, точки L и E — в плоскости AMB, точки D и E — в плоскости ABC. Соединяем попарно и получаем треугольник LDE.

Теперь найдем его стороны.

1) $\Delta AED \sim \Delta ABC$ по двум сторонам и углу между ними:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{2}{3},$$

угол A — общий.

Тогда $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{2}{3}$. Получим, что $DE = 2$.

2) ΔAMB — прямоугольный, $\angle B = 90°$.

Тогда угол AMB равен 30 градусам, так как $AB=\dfrac{1}{2}AM$ (катет, лежащий напротив угла в 30 градусов, равен половине гипотенузы). Значит, угол MAB равен 60 градусам.

В треугольнике ALE: угол $LAE = 60°$, $AL = AE$. Значит, треугольник ALE является равносторонним, поэтому $LE = 2$.

3) Сторону LD можно найти из ΔALD. В нем мы уже знаем две стороны. Для нахождения третьей не хватает угла A. Его можно найти из ΔAMC.

$\Delta AMB = \Delta CMB$ (треугольники прямоугольные с прямыми углами B, равны по двум катетам: MB — общий катет, $AB = BC$ по условию). Значит, $AM = MC = 6$.

Угол A можно найти по теореме косинусов.

$$MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2\cdot AM\cdot AC\cdot\cos\angle MAC$$

$$\cancel{6^2} = \cancel{6^2} + 3^2 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot\cos\angle MAC,$$

$$3 = 2\cdot 6\cdot\cos\angle MAC,$$

$$\cos\angle MAC = \frac{1}{4}.$$

Из ΔALD найдем LD также по теореме косинусов.

$$LD^2 = AL^2 + AD^2 - 2 \cdot AL \cdot AD \cdot \cos(\angle LAD),$$

$$LD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4},$$

$$LD = \sqrt{6}.$$

Осталось найти площадь ΔELD. Можно найти высоту (треугольник равнобедренный) и воспользоваться формулой для площади треугольника через высоту, можно воспользоваться формулой Герона (так как известны все три стороны). А можно также заметить, что $\Delta LDE = \Delta CMB$ по трем сторонам, поэтому соответственные углы в них будут равны, и $\angle LED = \angle LAD$. Поэтому $\cos \angle LED = \cos \angle LAD = \frac{1}{4}$. По основному тригонометрическому тождеству: $\sin \angle LED = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$S_{\Delta LED} = \frac{1}{2} LE \cdot ED \cdot \sin \angle LED,$$

$$S_{\Delta LED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

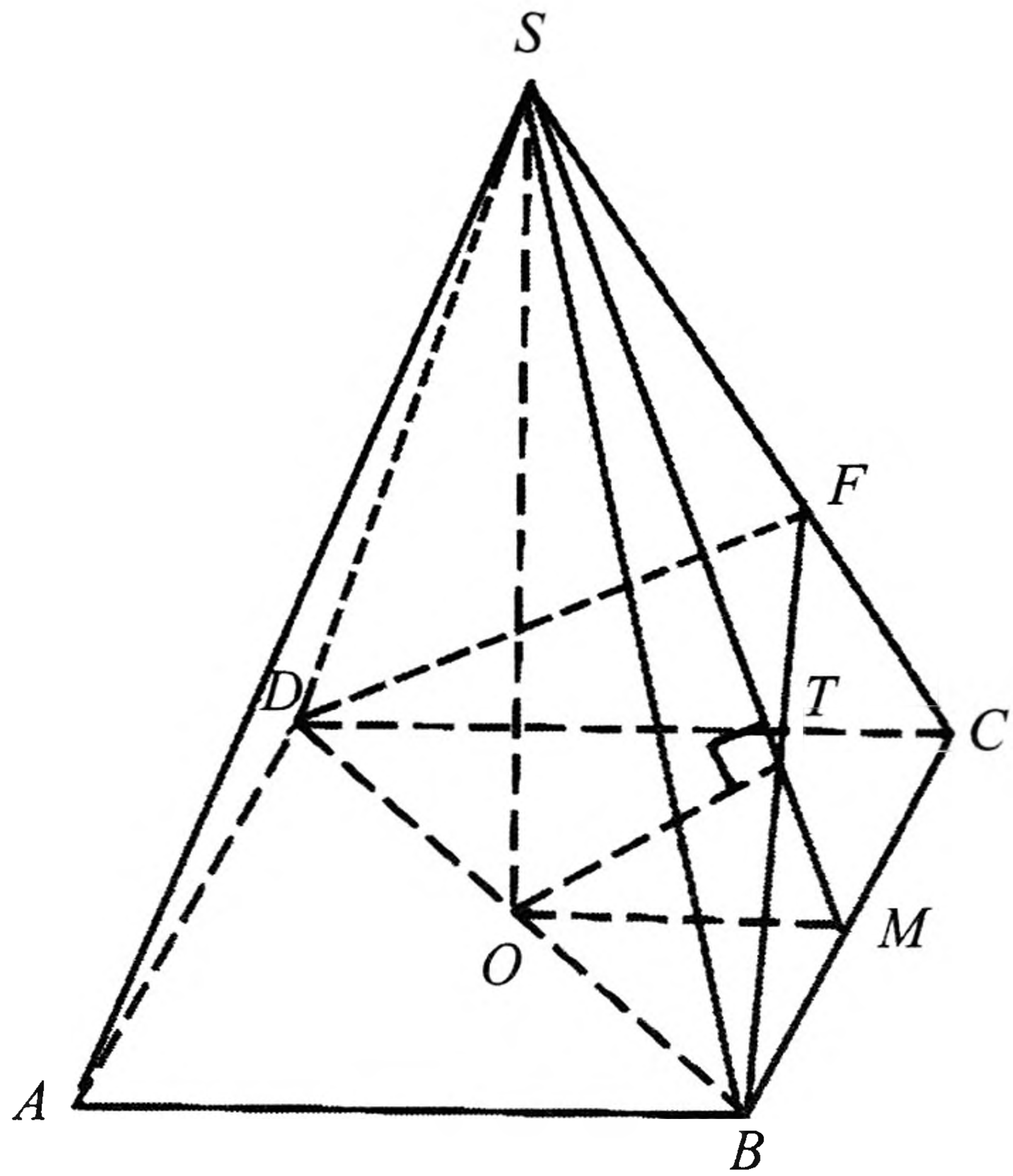
Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

10. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* плоскостью, проходящей через диагональ *BD* основания перпендикулярно плоскости *SBC*. Найдите площадь сечения, если каждое ребро пирамиды равно 1.

Вспомним признак перпендикулярности плоскостей.

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Заметим, что точки B и D принадлежат сечению, которое мы строим. Мы можем построить перпендикуляр к плоскости SBC, а затем через две пересекающиеся прямые — BD и этот перпендикуляр — провести нужную нам плоскость сечения.



1) Соединим точку O с точкой M — серединой BC. Легко доказать, что $OM \perp BC$.

2) Кроме того, $BC \perp SO$, поскольку BC лежит в плоскости основания пирамиды.

3) $SO \perp BC$, $OM \perp BC$, следовательно, $(SOM) \perp BC$.

Плоскость SBC содержит отрезок BC, перпендикулярный плоскости SOM. Значит, плоскости SBC и SOM перпендикулярны.

Проведем в плоскости SOM отрезок $OT \perp SM$.

Кроме того, $OT \perp BC$, так как $OT \in (SOM)$, $(SOM) \perp BC$.

Получим: $OT \perp (SBC)$.

4) Соединим точки B и T. $BT \cap SC = F$. Соединяем точки D и F получаем искомое сечение — треугольник FDB.

5) Найдем площадь сечения.

$DB = \sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной 1. Боковые грани пирамиды — равные друг другу правильные треугольники, отсюда $\Delta BCF = \Delta DCF$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $DF = FB$.

$$\left.\begin{aligned} OT \perp (SBC), \\ FB \in (SBC), \end{aligned}\right\} \Rightarrow OT \perp FB.$$

Рассмотрим ΔSOM:

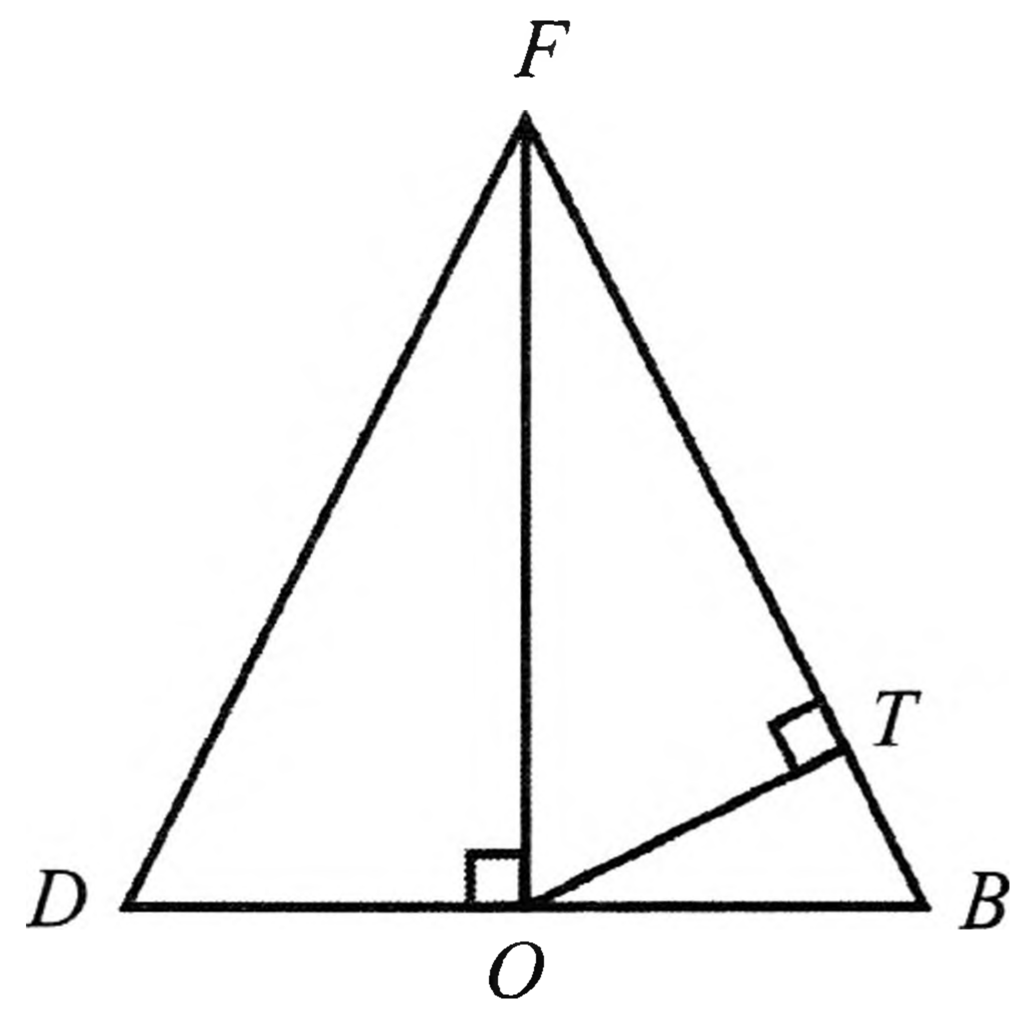
$OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (из прямоугольного треугольника SAO),

$SM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (высота правильного треугольника SBC).

Площадь треугольника SOM равна $\frac{1}{2}SO \cdot OM = \frac{1}{2}OT \cdot SM$.

Отсюда $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = OT \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $OT = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.

Изобразим треугольник DFB на отдельном чертеже.



Из треугольника TOB:

$$\sin B = \frac{OT}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\cos B = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из треугольника FOB:

$$FO = OB \cdot \operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Итак, высота FO равнобедренного треугольника DFB равна $\frac{1}{2}$. Тогда его площадь

$$S_{\Delta DFB} = \frac{1}{2} FO \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Векторы в пространстве и метод координат

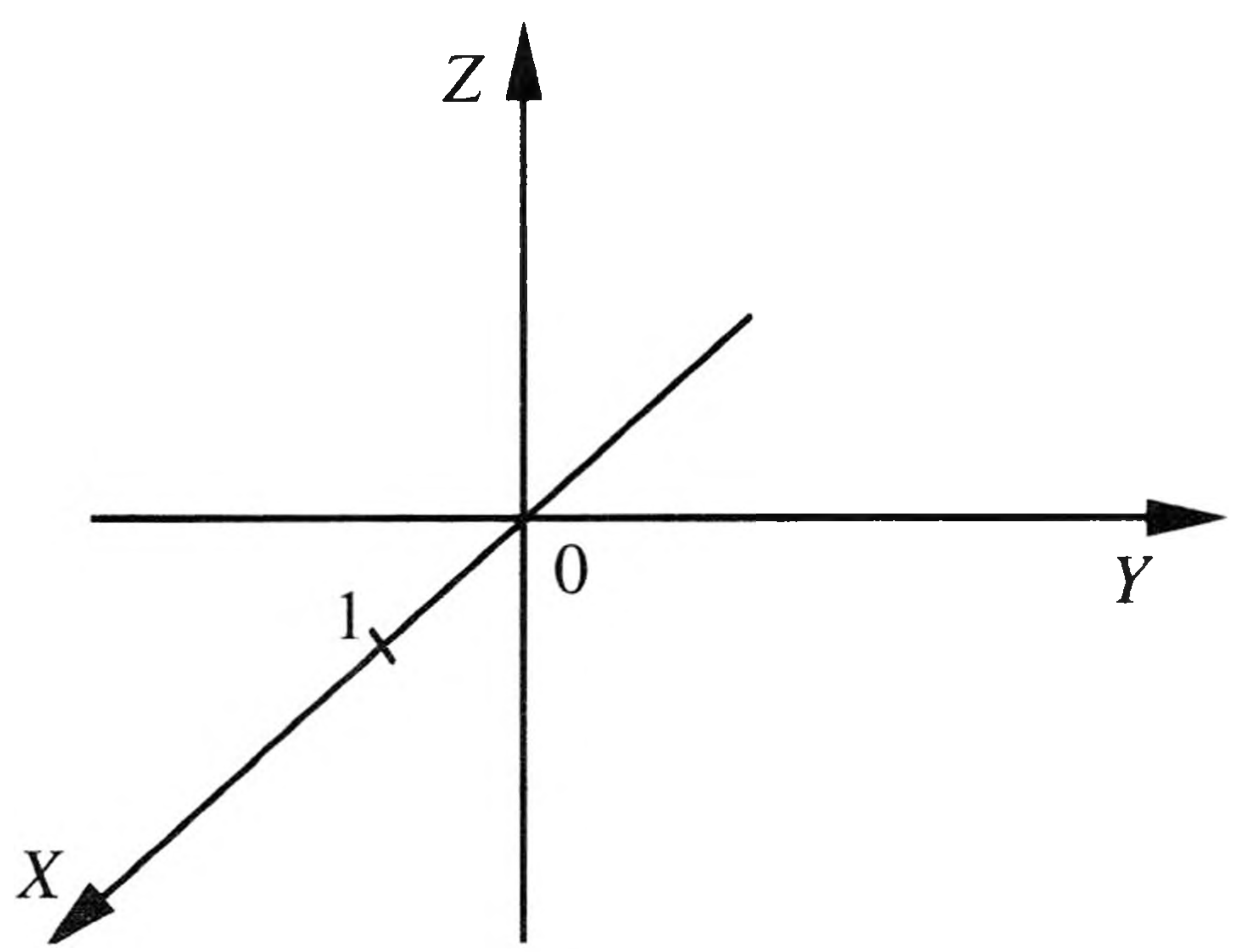
Существует два способа решения задач по стереометрии.

Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение. С этим способом мы уже знакомы.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить задачу по стереометрии очень хочется.

Система координат в пространстве

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X, Y и Z. Зададим удобный масштаб.

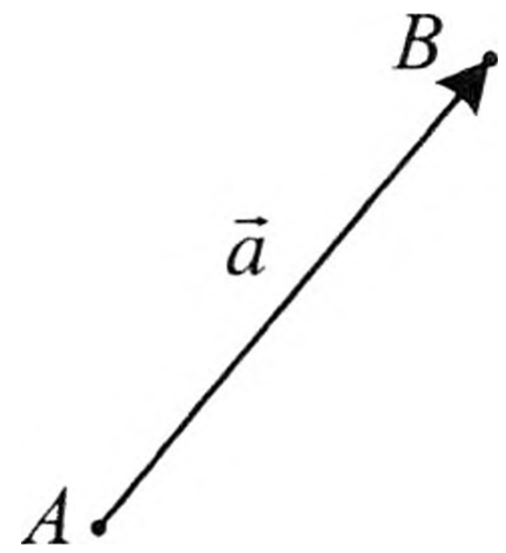


Получилась **система координат** в трехмерном пространстве. Теперь каждая его точка характеризуется тремя числами — координатами по X, Y и Z. Например, запись $M\,(-1;\ 3;\ 2)$ означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна -1, координата по Y (ордината) равна 3, а координата по Z (аппликата) равна 2.

Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x, y и z:

$$\vec{a}\left(x_0; y_0; z_0\right).$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overline{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$$

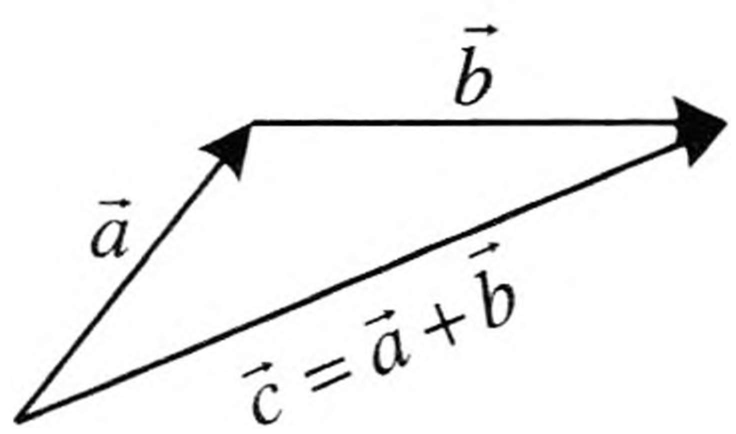
Длина вектора $\overline{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B. Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

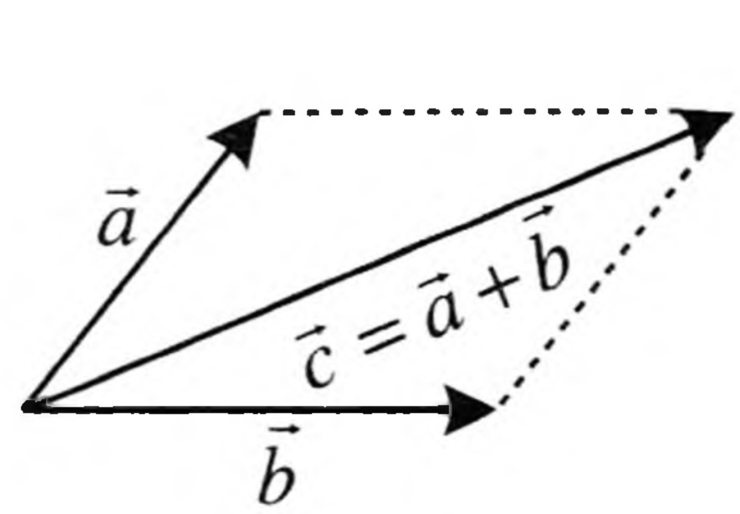
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}.$$

Пусть точка M — середина отрезка AB. Ее координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ x_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ x_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Для сложения векторов применяем уже знакомые правило треугольника и правило параллелограмма.





Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три. Возьмем векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$.

Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(x_a+x_b; y_a+y_b; z_a+z_b)$.

Разность векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}(x_a-x_b; y_a-y_b; z_a-z_b)$.

Произведение вектора на число: $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{p}(\lambda\cdot x_a; \lambda\cdot y_a; \lambda\cdot z_a)$.

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве. Особенно если эти прямые — скрещиваются.

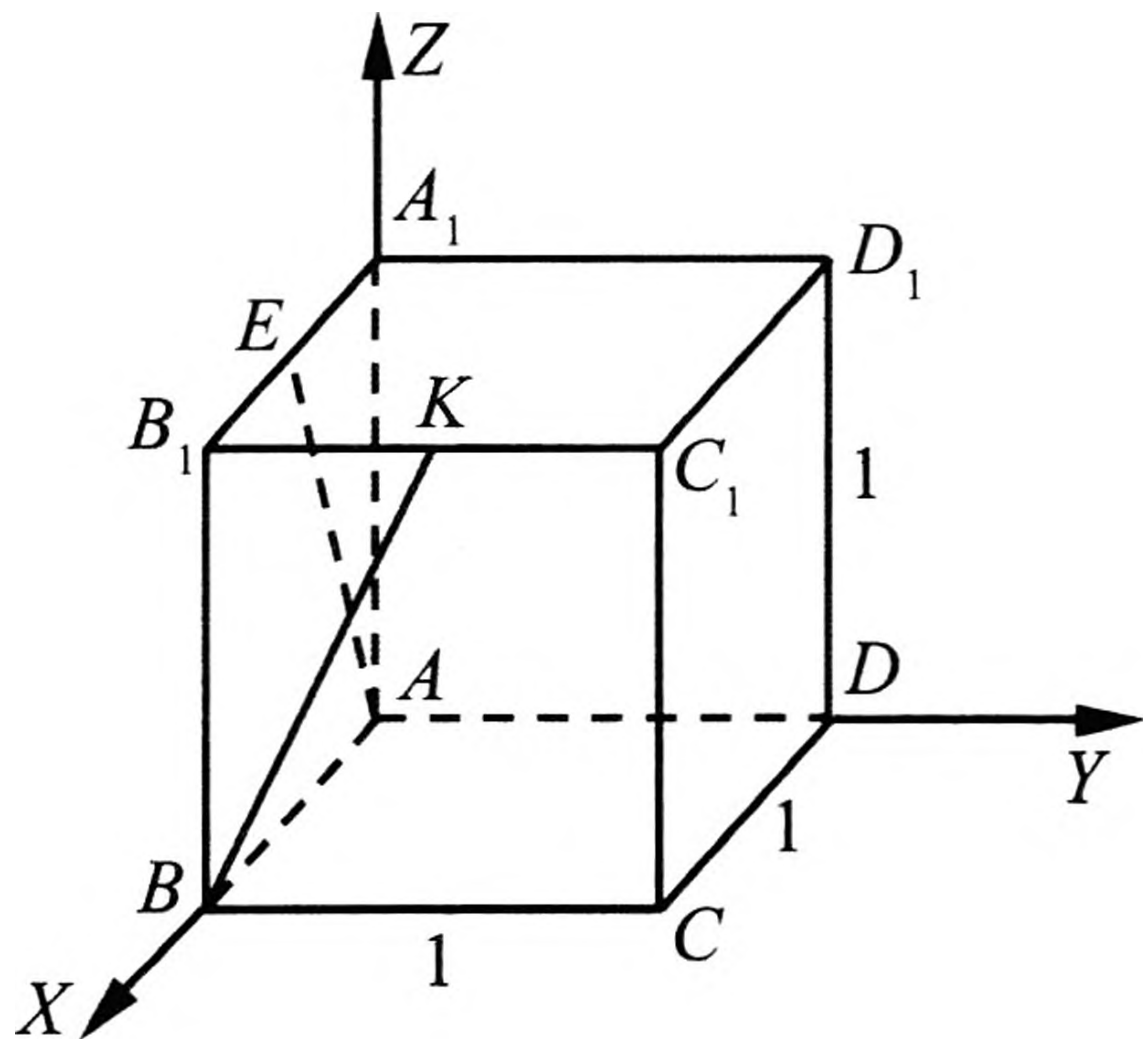
Формула для нахождения угла между прямыми:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Модуль в числителе стоит потому, что угол между прямыми может быть только острым или прямым, и косинус этого угла неотрицателен. Напомним, что в качестве угла между прямыми мы берем меньший из образованных ими углов.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Если в задаче в задаче по стереометрии вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж.



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$. Для этого нужны их координаты.

$$A(0;0;0);\ B(1;0;0);\ E\left(\frac{1}{2};0;0\right);\ K\left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Запишем координаты векторов:

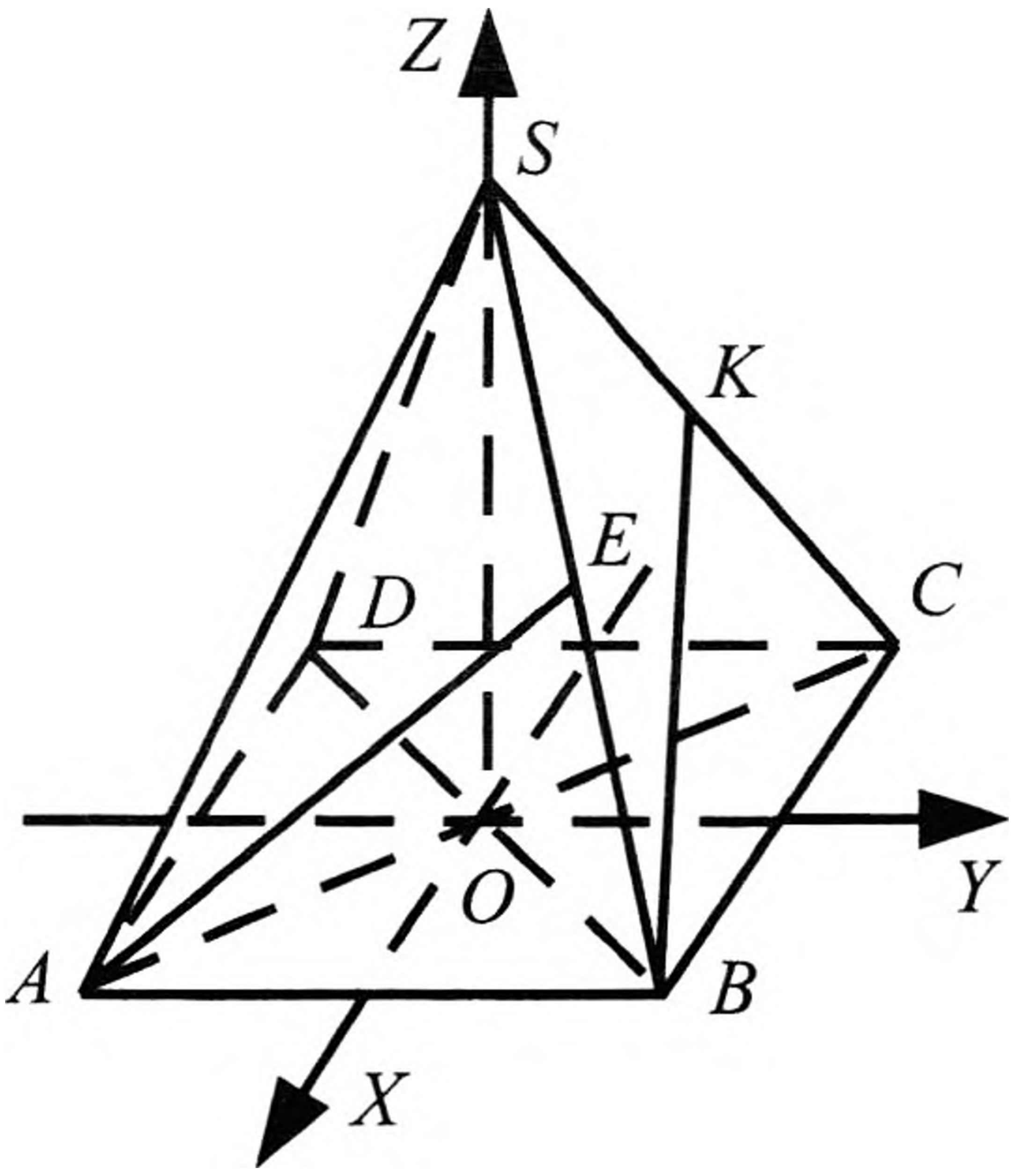
$$\overline{AE}\left(\frac{1}{2};0;1\right);\ \overline{BK}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

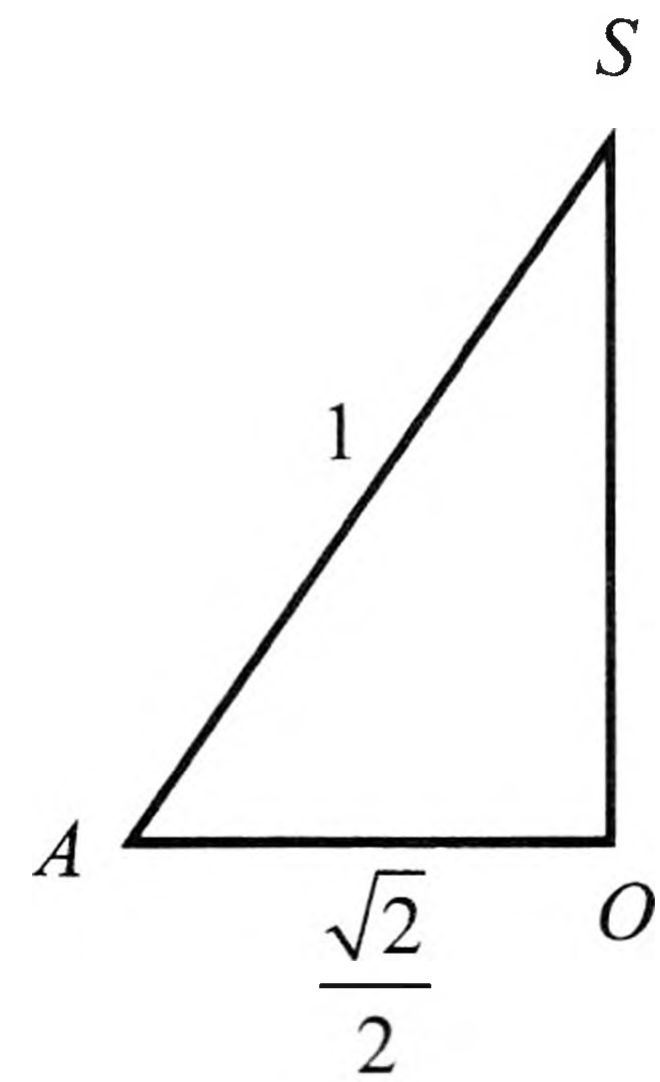
и найдем косинус угла между векторами $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{BK}}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}} = \frac{4}{5}.$$

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, K — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Лучше всего выбрать начало координат в центре основания пирамиды, а оси X и Y сделать параллельными сторонам основания.





Координаты точек A, B и C найти легко:

$$A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right);\ B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right);\ C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right).$$

Из прямоугольного треугольника AOS найдем $OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Координаты вершины пирамиды: $S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Точка E — середина SB, а K — середина SC. Воспользуемся формулой для координат середины отрезка и найдем координаты точек E и K.

$$E\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ K\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Найдем координаты векторов $\overline{AE}$ и $\overline{BK}$:

$$\overline{AE}\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ \overline{BK}\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

и угол между ними:

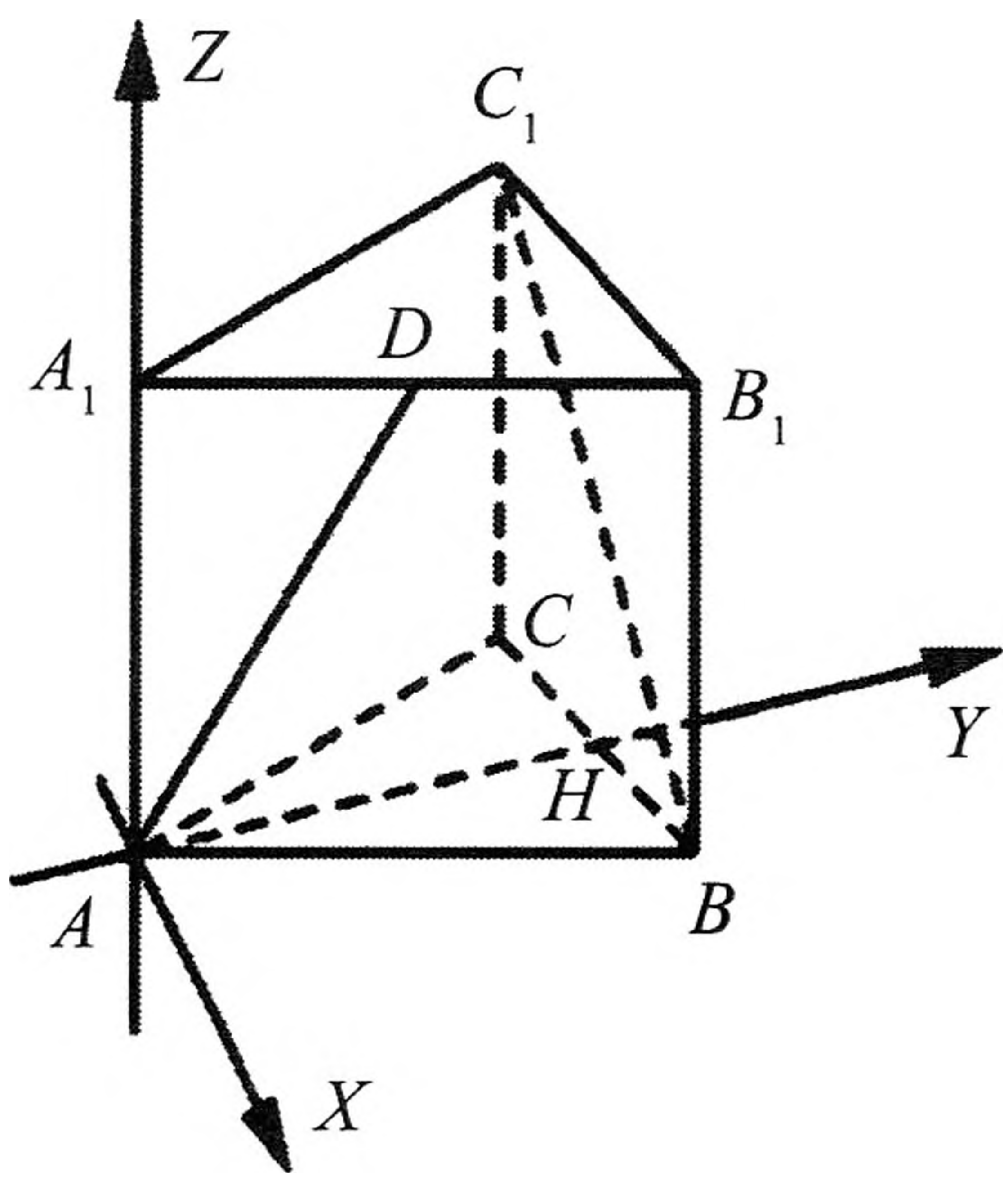
$$\cos\varphi = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{BK}}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|} = \frac{1}{6}.$$

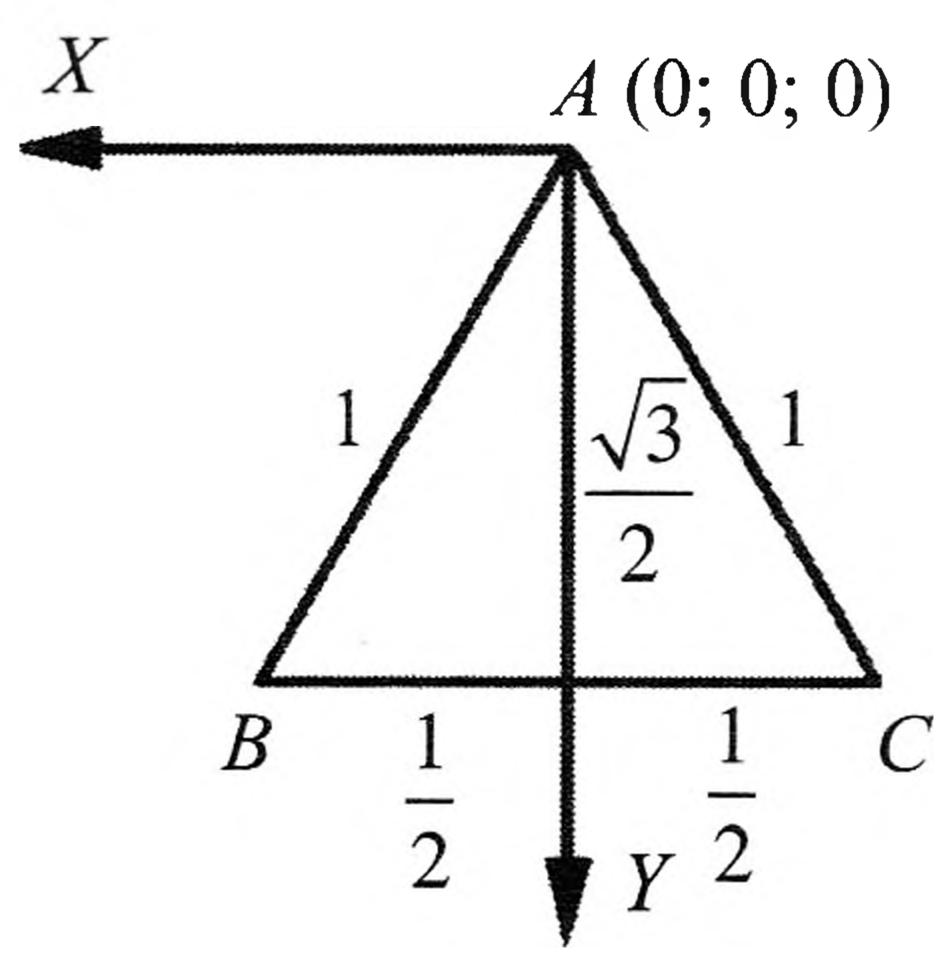
$$\varphi = \arccos\frac{1}{6}.$$

Покажем теперь, как вписать систему координат в треугольную призму.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

Пусть точка A — начало координат. Возьмем ось X параллельно стороне BC, а ось Y перпендикулярно ей. Другими словами, на оси Y будет лежать отрезок AH, являющийся высотой треугольника ABC. Нарисуем отдельно нижнее основание призмы.





Запишем координаты точек:

$$A(0;0;0);\ A_1(0;0;1);\ B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right);\ B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right);\ C_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right).$$

Точка D — середина A_1B_1. Значит, пользуемся формулами для координат середины отрезка.

$$D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right).$$

Найдем координаты векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC_1}$, а затем угол между ними:

$$\overline{AD}\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right);\ \overline{BC_1}(-1;0;1).$$

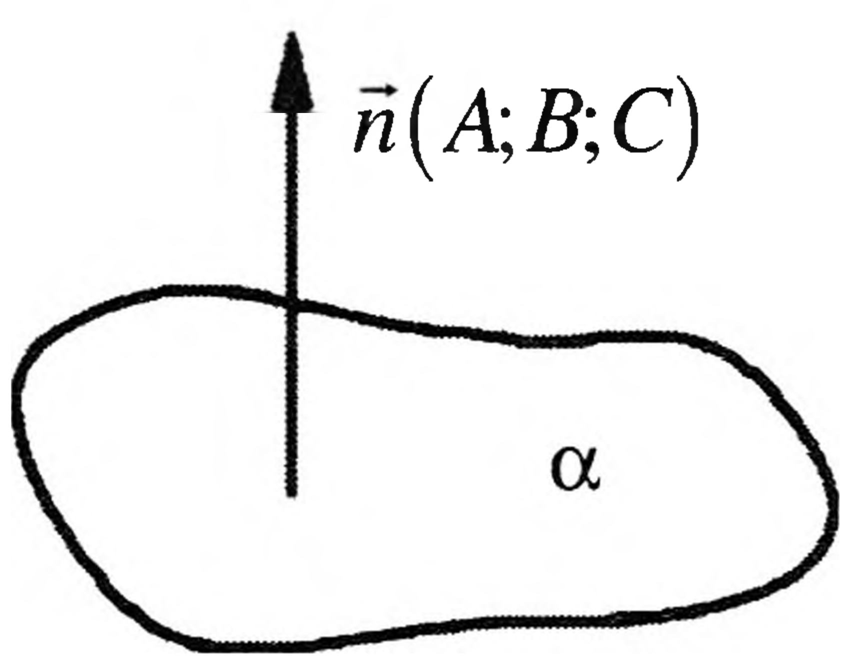
$$\cos\varphi = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC_1}}{\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{BC_1}\right|} = \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Смотрите, как легко с помощью векторов и координат найти угол между прямыми. А если требуется найти угол между плоскостями или между прямой и плоскостью? Для решения подобных задач нам понадобится уравнение плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве задается уравнением:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0.}$$

Здесь числа A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости.



Его называют нормалью к плоскости.

Вместо x, y и z можно подставить в уравнение координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости. Получится верное равенство.

Плоскость в пространстве можно провести через любые три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для того, чтобы написать уравнение плоскости, берем координаты трех принадлежащих ей точек. Подставляем их по очереди в уравнение плоскости. Решаем полученную систему.

Покажем, как это делается.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;0;1)$, $N(2;-2;0)$ и $K(4;1;2)$.

Уравнение плоскости выглядит так:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставим в него по очереди координаты точек M, N и K.
Для точки M:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0.$$

То есть

$$A + C + D = 0.$$

Для точки N:

$$A \cdot 2 + B \cdot (-2) + C \cdot 0 + D = 0;$$
$$2A - 2B + D = 0.$$

Аналогично для точки K:

$$4A + B + 2C + D = 0.$$

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ 2A - 2B + D = 0, \\ 4A + B + 2C + D = 0. \end{cases}$$

В ней четыре неизвестных: A, B, C и D. Поэтому одну из них мы выберем сами, а другие выразим через нее. Правило простое — вместо одной из переменных можно взять любое число, не равное нулю.

Пусть, например, $D = -2$. Тогда:

$$\begin{cases} A + C - 2 = 0, \\ 2A - 2B - 2 = 0, \\ 4A + B + 2C - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A - B = 1, \\ 4A + B + 2C = 2. \end{cases}$$

Выразим C и B через A и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} C = 2 - A, \\ B = A - 1, \\ 4A + A - 1 + 4 - 2A = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$A = -\frac{1}{3};\ B = -\frac{4}{3};\ C = \frac{7}{3}.$$

Уравнение плоскости MNK имеет вид:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{7}{3}z - 2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на –3. Тогда коэффициенты станут целыми:

$$x + 4y - 7z + 6 = 0.$$

Вектор $\vec{n}(1;4;-7)$ — это нормаль к плоскости MNK.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

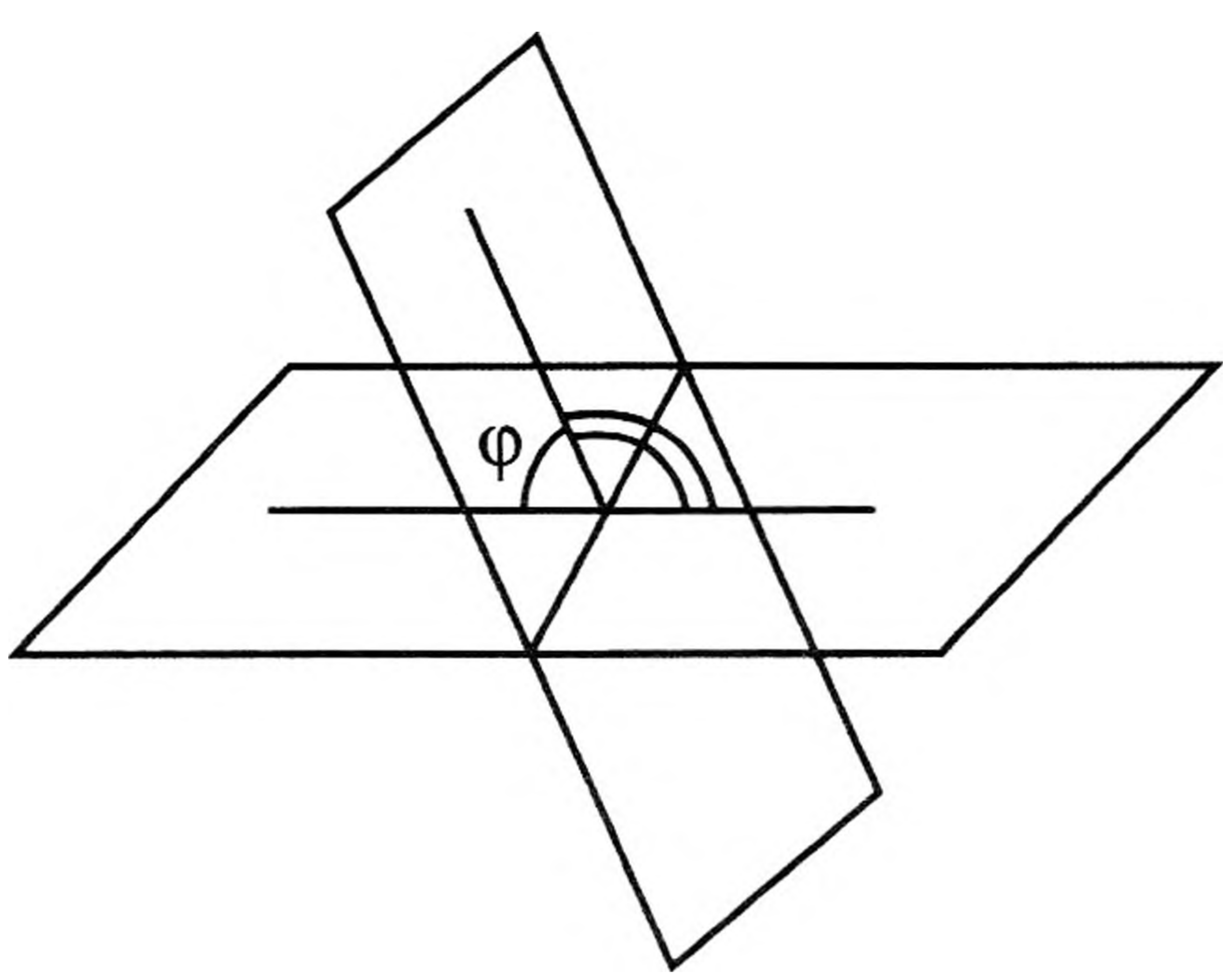
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Не правда ли, знакомая формула? Скалярное произведение нормалей поделили на произведение их длин.

Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла.

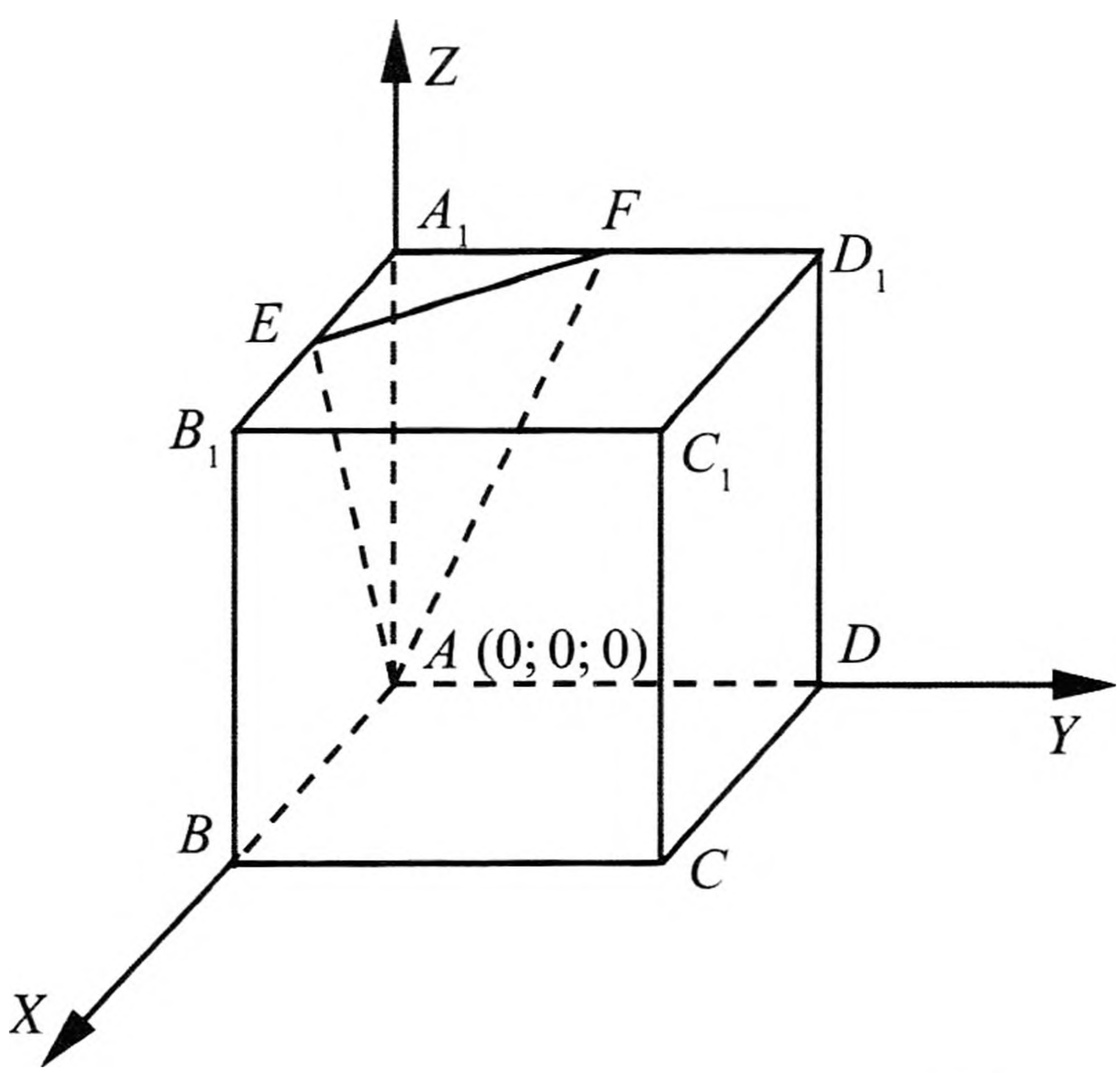


Мы берем меньший из них. Поэтому в формуле стоит модуль скалярного произведения — чтобы косинус угла был неотрицателен.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите угол между плоскостями AEF и BDD_1.

Строим чертеж. Видно, что плоскости AEF и BDD_1 пересекаются где-то вне куба. В классическом решении пришлось бы строить линию их пересечения. Но векторно-координатный метод значительно все упрощает. Не будем ломать голову над тем, по какой прямой пересекаются плоскости. Просто отметим координаты нужных нам точек и найдем угол между нормалями к плоскостям AEF и BDD_1.

Сначала — нормаль к плоскости BDD_1. Конечно, мы можем подставить координаты точек B, D и D_1 в уравнение плоскости и найти коэффициенты, которые и будут координатами вектора нормали. А можем сделать хитрее — увидеть нужную нормаль прямо на чертеже. Ведь плоскость BDD_1 — это диагональное сечение куба. Вектор $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярен этой плоскости.



Итак, первый вектор нормали у нас уже есть: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AC}(1;1;0)$. Напишем уравнение плоскости AEF.

$$A(0;0;0);\ E\left(\frac{1}{2};0;1\right);\ F\left(0;\frac{1}{2};1\right).$$

Берем уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и по очереди подставляем в него, вместо x, y и z, соответствующие координаты точек A, E и F.

$$\begin{array}{c|l} A & 0\cdot A+0\cdot B+0\cdot C+D=0, \\ E & \frac{1}{2}\cdot A+0\cdot B+1\cdot C+D=0, \\ F & 0\cdot A+\frac{1}{2}\cdot B+1\cdot C+D=0. \end{array}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} D=0, \\ \frac{1}{2}A+C=0, \\ \frac{1}{2}B+C=0. \end{cases}$$

Пусть $C = -1$. Тогда $A = B = 2$.

Уравнение плоскости AEF:

$$2x + 2y - z = 0.$$

Нормаль к плоскости AEF: $\vec{n}(2;2;-1)$.

Найдем угол между плоскостями:

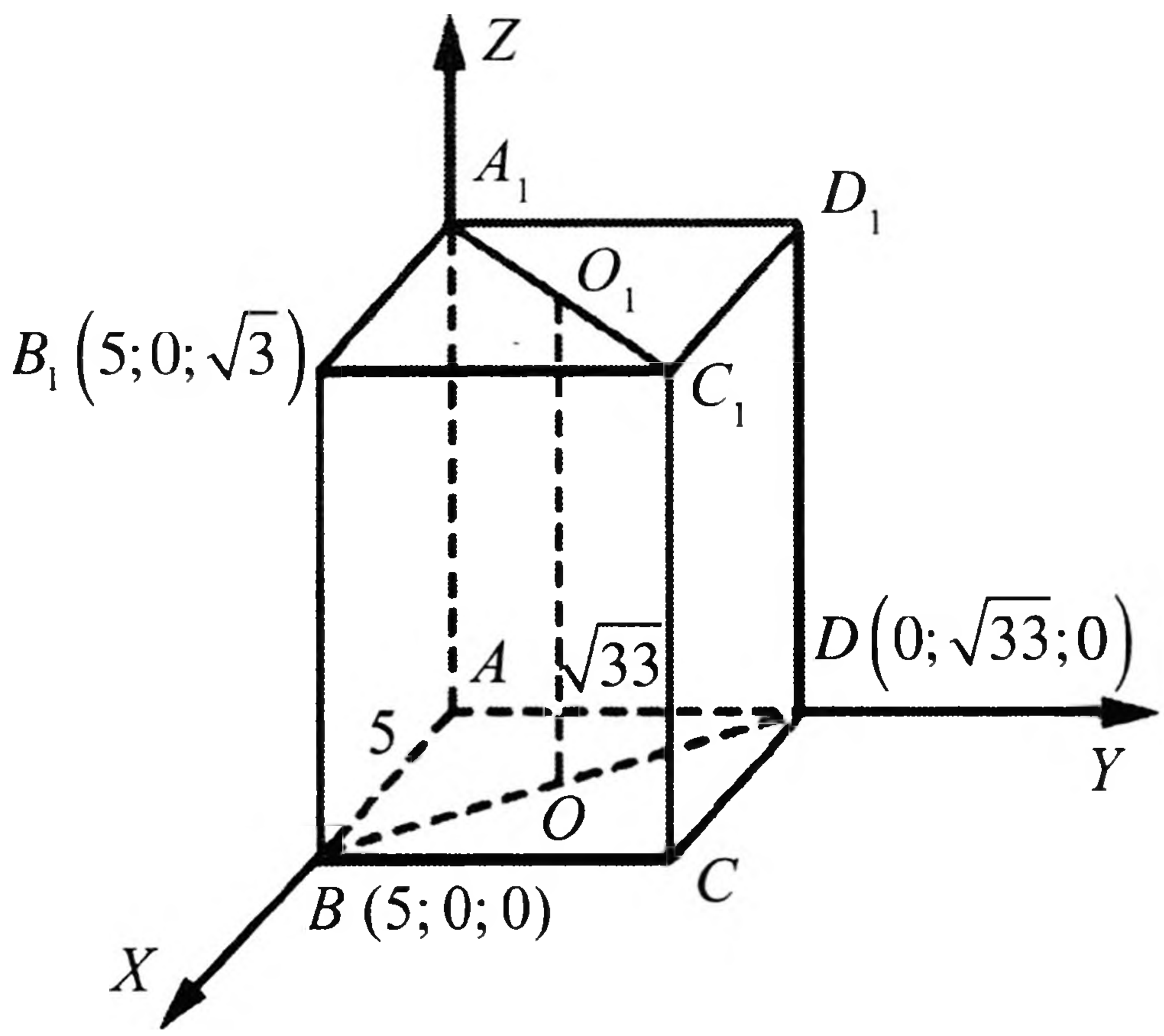
$$\cos\varphi = \frac{|2+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Эта задача наглядно показывает, насколько векторный метод проще классического. Попробуйте, для разнообразия, построить необходимые сечения и провести все доказательства — как это делается в «классике».

Строим чертеж. Прямую четырехугольную призму можно по-другому назвать «параллелепипед».



Замечаем, что длина и ширина параллелепипеда у нас есть, а высота — не дана. Как же ее найти?

«Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$». Прямые A_1C_1 и BD скрещиваются. Одна из них — диагональ верхнего основания, другая — диагональ нижнего. Вспомним, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Общий перпендикуляр к A_1C_1 и BD — это, очевидно, OO_1, где O — точка пересечения диагоналей нижнего основания, O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего. А отрезок OO_1 и равен высоте параллелепипеда.

Итак, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Плоскость AA_1D_1D — это задняя грань призмы на нашем чертеже. Нормаль к ней — это любой вектор, перпендикулярный задней грани, например, вектор $\overline{AB}(5;0;0)$ или, еще проще, вектор $\vec{n}(1;0;0)$.

Осталась еще «плоскость, проходящая через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D». Но позвольте, если плоскость перпендикулярна прямой B_1D — значит, B_1D и есть нормаль к этой плоскости! Координаты точек B_1 и D известны:

$$B_1\left(1;0;\sqrt{3}\right);\ D\left(0;\sqrt{33};0\right).$$

Координаты вектора $\overline{B_1D}$ — тоже:

$$\overline{B_1D}\left(-5;\sqrt{33};-\sqrt{3}\right)=\vec{n}_2.$$

Находим угол между плоскостями, равный углу между нормалями к ним:

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{25+33+3}}=\frac{5}{\sqrt{61}}.$$

Зная косинус угла, находим его тангенс по формуле

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

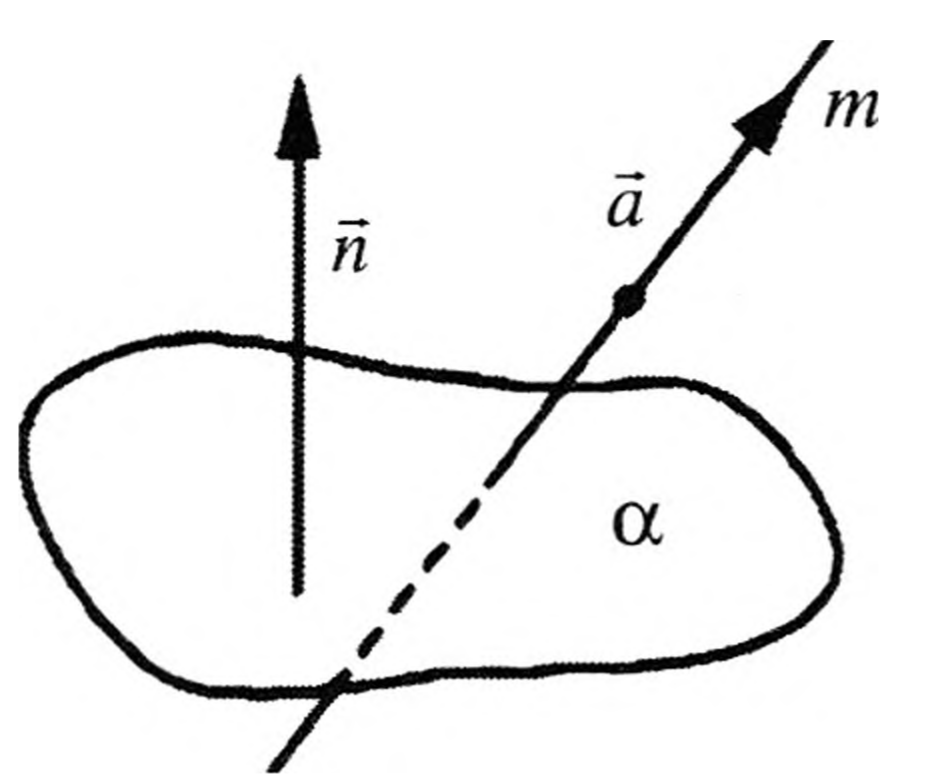
Получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Угол между прямой *m* и плоскостью α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов.

Пусть $\vec{a}$ — вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$ — нормаль к плоскости α. Вектор $\vec{a}$ еще называют направляющим вектором прямой m, а его координаты — направляющими коэффициентами.

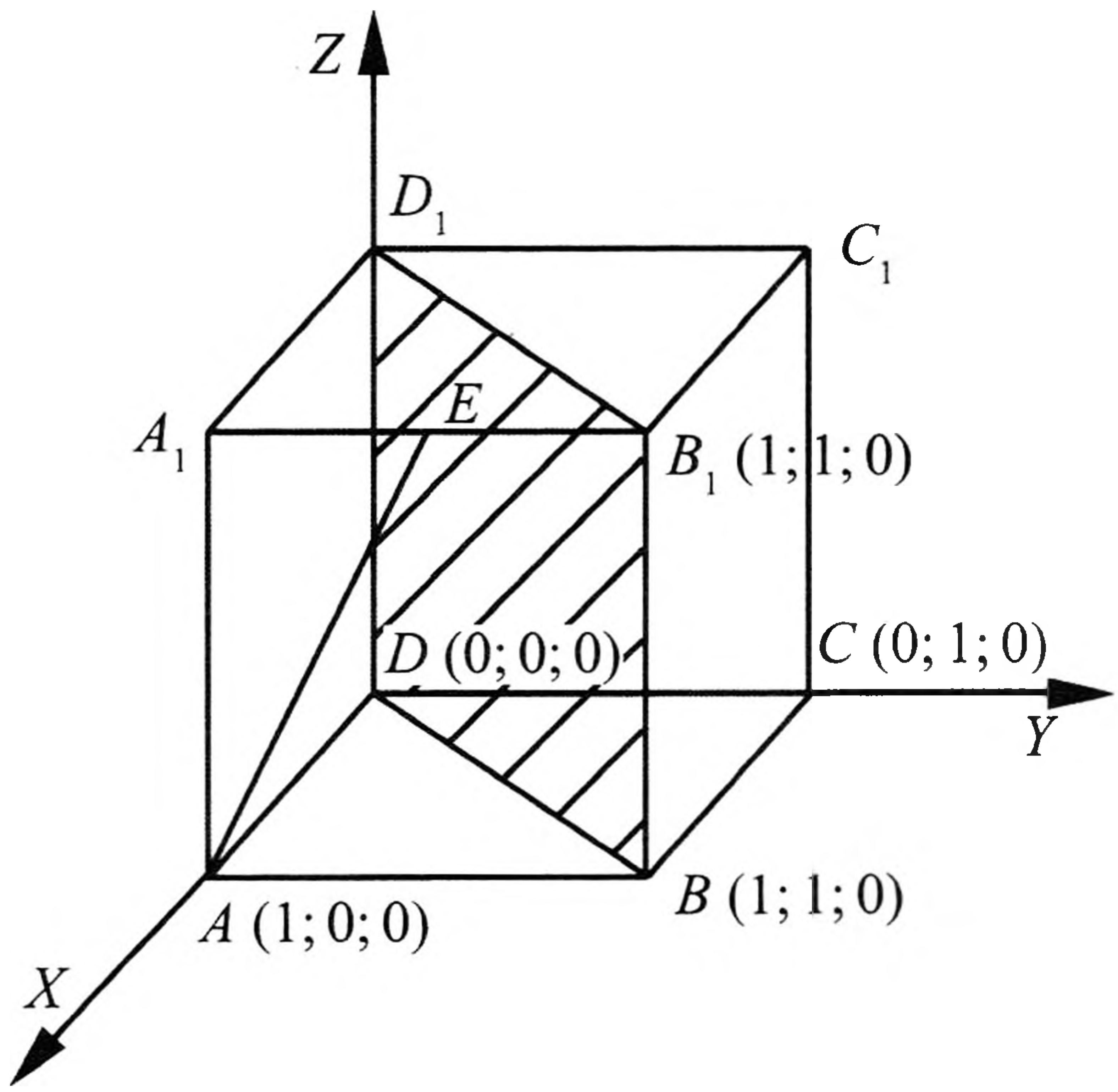


Синус угла между прямой *m* и плоскостью α можно найти по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}.$$

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Как всегда, рисуем чертеж и выбираем систему координат.



$$A(1;0;0);E\left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Находим координаты вектора $\overline{AE}\left(0;\frac{1}{2};1\right).$

Нужно ли нам уравнение плоскости BDD_1? В общем-то, без него можно обойтись. Ведь эта плоскость является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например, вектор $\overline{AC}$ (1; –1; 0).

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{AC}\cdot\overline{AE}\right|}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{AE}\right|}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

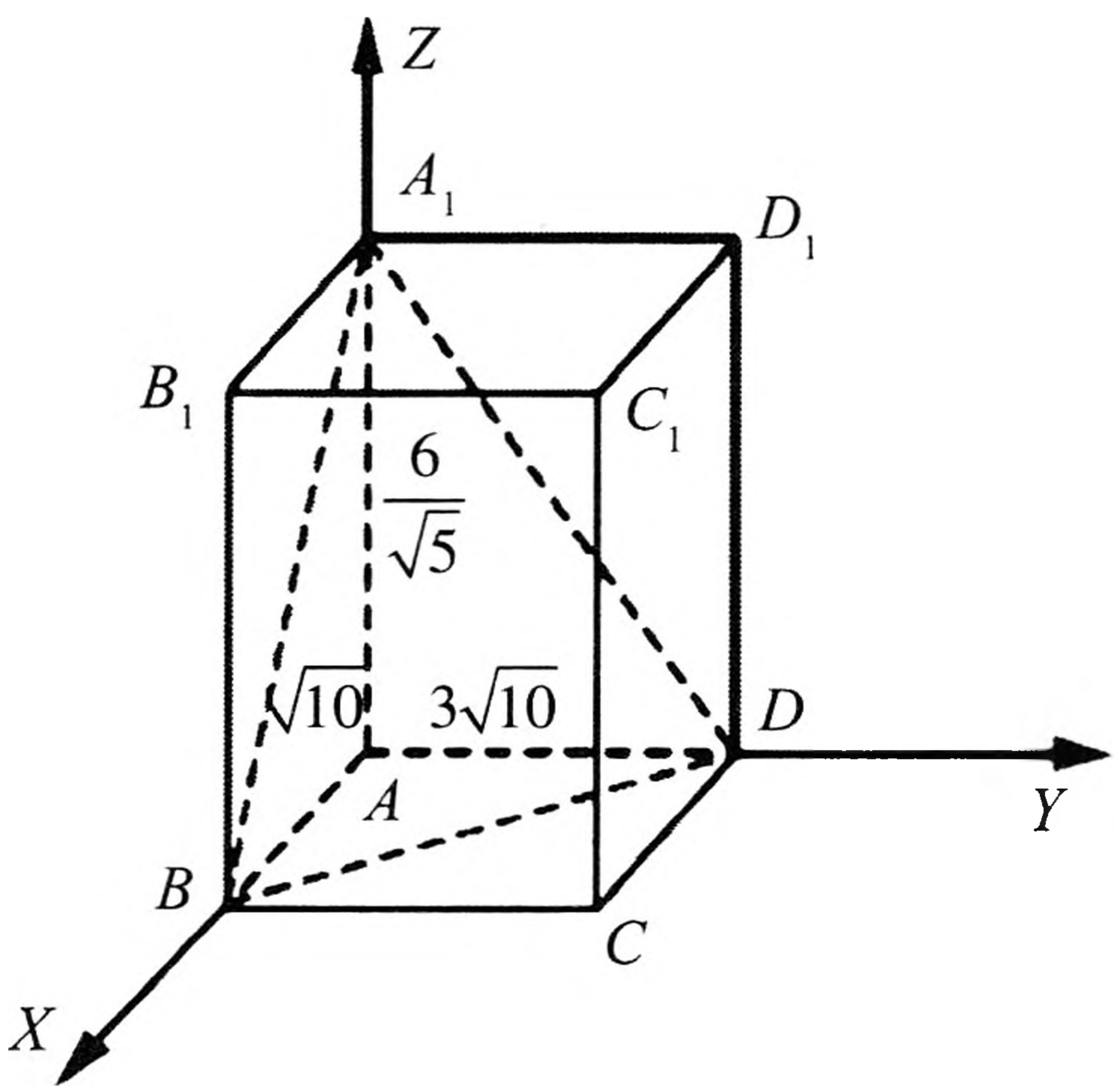
Расстояние от точки M с координатами x_0, y_0 и z_0 до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{10}, AD = 3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1DB.

Построим чертеж и выпишем координаты точек.



$$A(0;0;0);\ A_1\left(0;0;\frac{6}{\sqrt{5}}\right);\ B\left(\sqrt{10};0;0\right);\ D\left(0;3\sqrt{10};0\right).$$

Запишем уравнение плоскости A_1DB. Вы помните, как это делается, — по очереди подставляем координаты точек A_1, D и B в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{array}{l|l} A_1 & \dfrac{6}{\sqrt{5}}C + D = 0, \\ B & \sqrt{10}A + D = 0, \\ D & 3\sqrt{10}B + D = 0. \end{array}$$

Решим эту систему. Выберем

$$D = -6\sqrt{10}.$$

Тогда

$$C = 5\sqrt{2},\ A = 6,\ B = 2.$$

Уравнение плоскости A_1DB имеет вид:

$$6x + 2y + 5\sqrt{2}z - 6\sqrt{10} = 0.$$

Дальше все просто. Находим расстояние от точки A до плоскости A_1DB:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{50 + 36 + 4}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = 2.$$

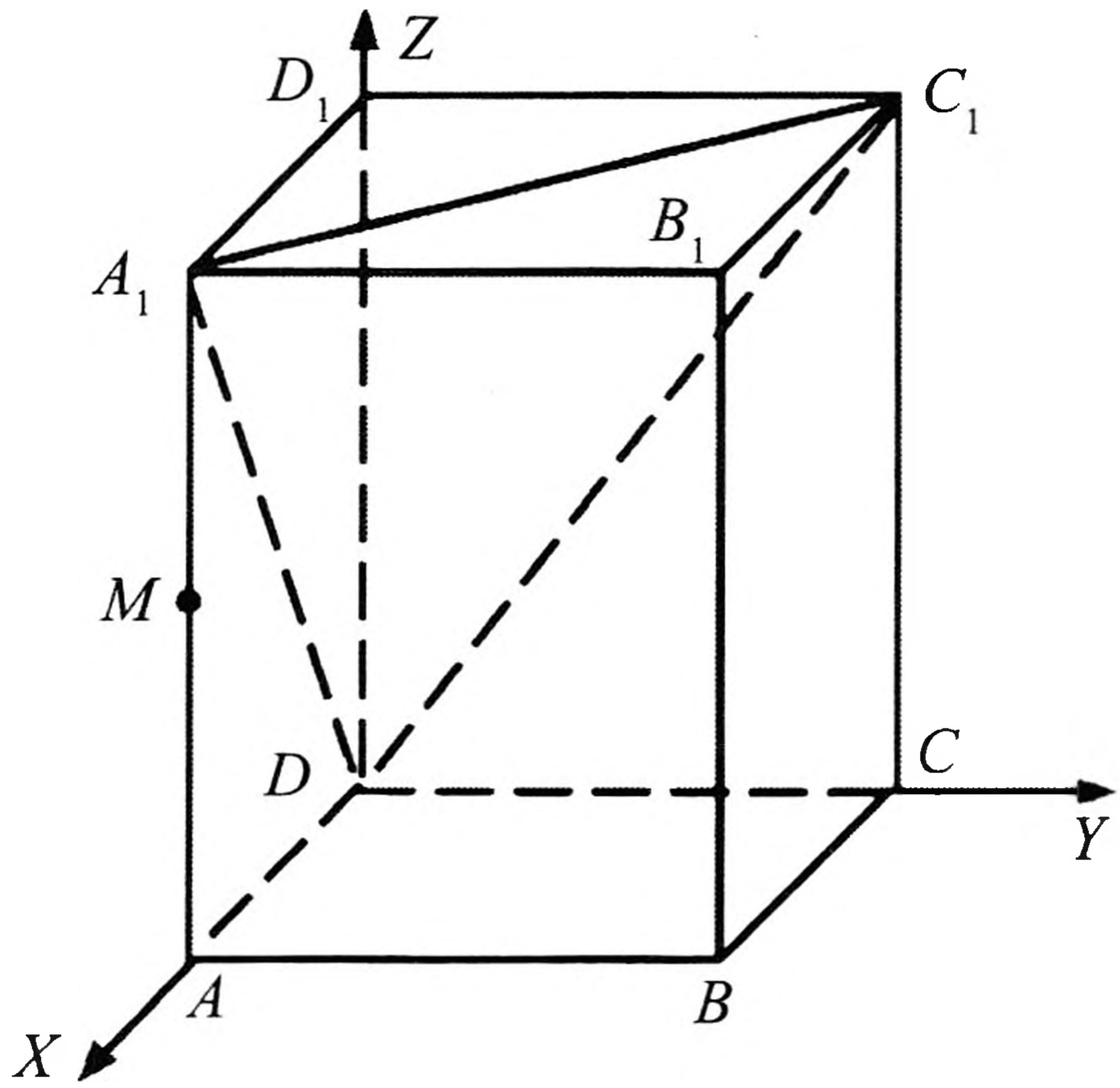
Ответ: 2.

В некоторых задачах требуется найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. В этом случае можно выбрать любую точку, принадлежащую данной прямой.

8. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота равна 1, а стороны основания равны $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

Введем систему координат с началом в точке D. Запишем координаты точек в этой системе координат.

$$D(0;0;0);\ A_1(\sqrt{2};0;1);\ C_1\left(0;\sqrt{2};1\right);\ M\left(\sqrt{2};0;\frac{1}{2}\right).$$



Составим уравнение плоскости A_1C_1D, зная общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставив в него координаты точки D, получим: $D = 0$

Подставив в него координаты точки A_1, получим: $A\sqrt{2} + C = 0.$

Подставив в него координаты точки C_1, получим: $B\sqrt{2} + C = 0.$

Подберем значения A, B и C. Можно заметить, что при $C = -\sqrt{2}$ $A = 1$ и $B = 1$.

Нормаль к плоскости будет иметь вид $\vec{n}\left(1;\ 1;\ -\sqrt{2}\right)$.

Подставим все данные в формулу для расстояния от точки до плоскости

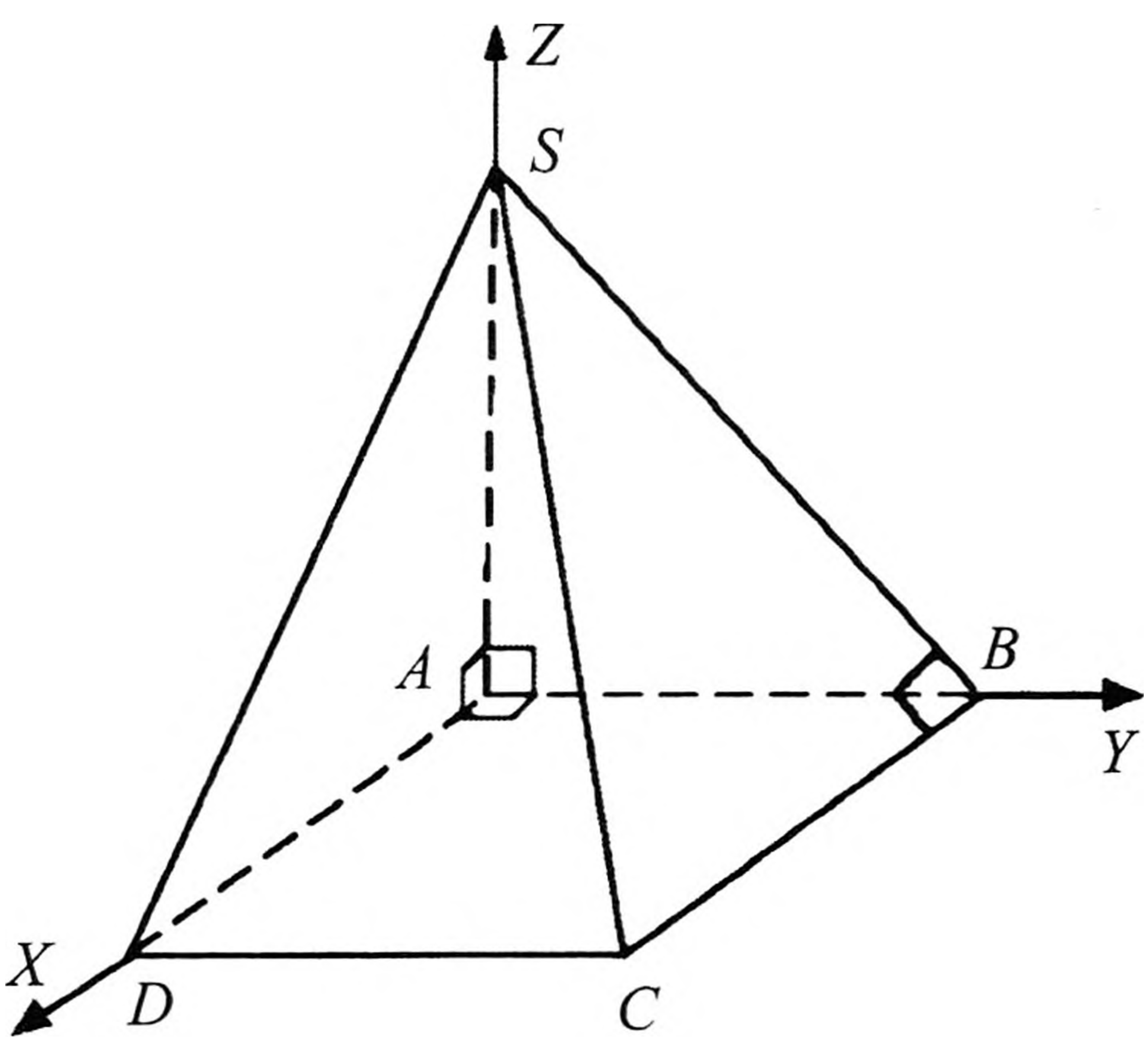
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d = \frac{1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Сейчас задача по стереометрии в вариантах ЕГЭ состоит из двух пунктов, причем первый из них – на доказательство.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых ребер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SA=2\sqrt{3}$, $SA=\sqrt{11}$.
а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.



а) Заметим, что $SA^2+AB^2=SB^2$, так как $\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$.
Значит, по теореме Пифагора, угол SAB — прямой и $SA\perp AB$.

Аналогично, $SA^2+AD^2=SD^2$, так как $\left(\sqrt{7}\right)^2+2^2=\left(\sqrt{11}\right)^2$.

Значит, по теореме Пифагора, угол SAD — прямой и $SA\perp AD$.
Но $AD\in(ABC)$, $AB\in(ABC)$, $AD\cap AB=A$.
Значит, $SA\perp(ABC)$, SA — высота пирамиды $SABCD$.
б) Угол между прямой SC и плоскостью ASB легко найти как классическим, так и координатным методом.

Первый способ (классический)

$AB\perp BC$ (так как $ABCD$ — прямоугольник), $SA\perp AB$ (по доказанному), значит, по теореме о трех перпендикулярах $CB\perp SB$.

При этом $SB \in (SBC)$, $AB \in (SBC)$, $AB \cap SB = B$. Значит, $SB \perp (SAB)$, SB — проекция SC на плоскость. Угол CSB — искомый угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Из прямоугольного треугольника SCB (угол B — прямой):

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{BC}{SB},$$

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{2}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{tg}\angle CSB = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\angle CSB = 30°.$$

Второй способ (координатный)

Введем систему координат с началом в точке A. Запишем координаты точек в этой системе координат.

$$S\left(0, 0, \sqrt{7}\right); C\left(2, \sqrt{5}, 0\right).$$

Плоскость SAB является координатной плоскостью YZ, поэтому коэффициенты $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, и нормаль к плоскости имеет вид $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Координаты вектора $\overline{SC}\left(2, \sqrt{5}, -\sqrt{7}\right)$, направляющие коэффициенты $m = 2$, $n = \sqrt{5}$, $p = -\sqrt{7}$.

Угол между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin\angle SCB = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\sin\angle SCB = \frac{\left|1 \cdot 2 + 0 \cdot \sqrt{5} + 0 \cdot \left(-\sqrt{7}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 30°.

Планиметрия на ЕГЭ по математике. Часть 2

Геометрическая задача — одна из тех, которые абитуриенты считают сложными. С чего начать? Как вообще к ней подступиться? В этой книге я не смогу рассказать вам **всё**, потому что для освоения геометрии нужен не один месяц. Зато я укажу вам путь и помогу сделать первые шаги.

Мы традиционно начинаем курс геометрии с простых задач первой части ЕГЭ. Формулы площадей, основные свойства геометрических фигур, основы тригонометрии — все это учите наизусть. Для того чтобы идти дальше, надо вспомнить школьный курс геометрии. То, чем вы в школе занимались на уроках геометрии в 7–9 классах, надо повторить, как при подготовке к экзамену.

Лучше всего сделать это по обычному школьному учебнику геометрии А. В. Погорелова или Л. С. Атанасяна. Купите его или возьмите в школьной библиотеке.

Кроме учебника вам понадобится тетрадь в клетку.

В эту тетрадь аккуратно и внимательно выпишите ответы на каждый из вопросов. Можно записывать ответы кратко, на уровне идеи, и лучше всего сопровождать записи рисунками.

Эта тетрадь послужит вам «шпаргалкой» для подготовки к ЕГЭ.

Краткий курс геометрии (задание выполняется самостоятельно)

1. Треугольники. Элементы треугольника. Вершины, стороны, высоты, медианы, биссектрисы.

2. Построение треугольника

а) по трем сторонам;

б) по двум сторонам и углу между ними;

в) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Три признака равенства треугольников.

Неравенство треугольника. Может ли существовать треугольник со сторонами 3, 4, 10? Если нет, то почему?

3. Построения с помощью циркуля и линейки.

а) серединного перпендикуляра к отрезку;

б) биссектрисы угла.

4. Углы при параллельных прямых и секущей. Вертикальные, смежные, соответственные, односторонние и накрест лежащие углы.

5. Сумма углов треугольника. С доказательством.

6. Задачи на построение. Постройте в одном и том же треугольнике

а) три высоты. Рассмотрите также случай **тупоугольного** треугольника;

б) три биссектрисы;

в) три медианы.

7. Свойство медиан. В каком отношении делятся медианы треугольника, считая от вершины?

8. Свойство биссектрисы. В каком отношении биссектриса делит противолежащую сторону?

9. Равнобедренный треугольник.

Свойство высоты равнобедренного треугольника.

10. Средняя линия треугольника и ее свойство.

11. Подобие треугольников, признаки подобия. Чему равно отношение площадей подобных фигур?

12. Окружность. ВСЕ теоремы:

— о радиусе, проведенном в точку касания;

— о величине вписанного угла;

— о свойствах вписанных углов;

— о пересекающихся хордах;

— о секущей и касательной.

13. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность описанная — построение. Где находятся центры этих окружностей?

14. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора.

15. Определения синуса, косинуса и тангенса острого угла.

16. Теоремы синусов и косинусов.

17. ВСЕ формулы площади треугольника. Вам понадобится 5 формул, выражающих площадь треугольника:

— через основание и высоту:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h;$$

— через две стороны и синус угла между ними:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \angle C;$$

— через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S_\Delta = p \cdot r;$$

— через три стороны и радиус описанной окружности:

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R};$$

— формула Герона:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

17. Четырехугольники. Виды четырехугольников и их свойства. Все о трапеции и параллелограмме.

18. Виды параллелограммов и их свойства. (ромб, прямоугольник, квадрат).

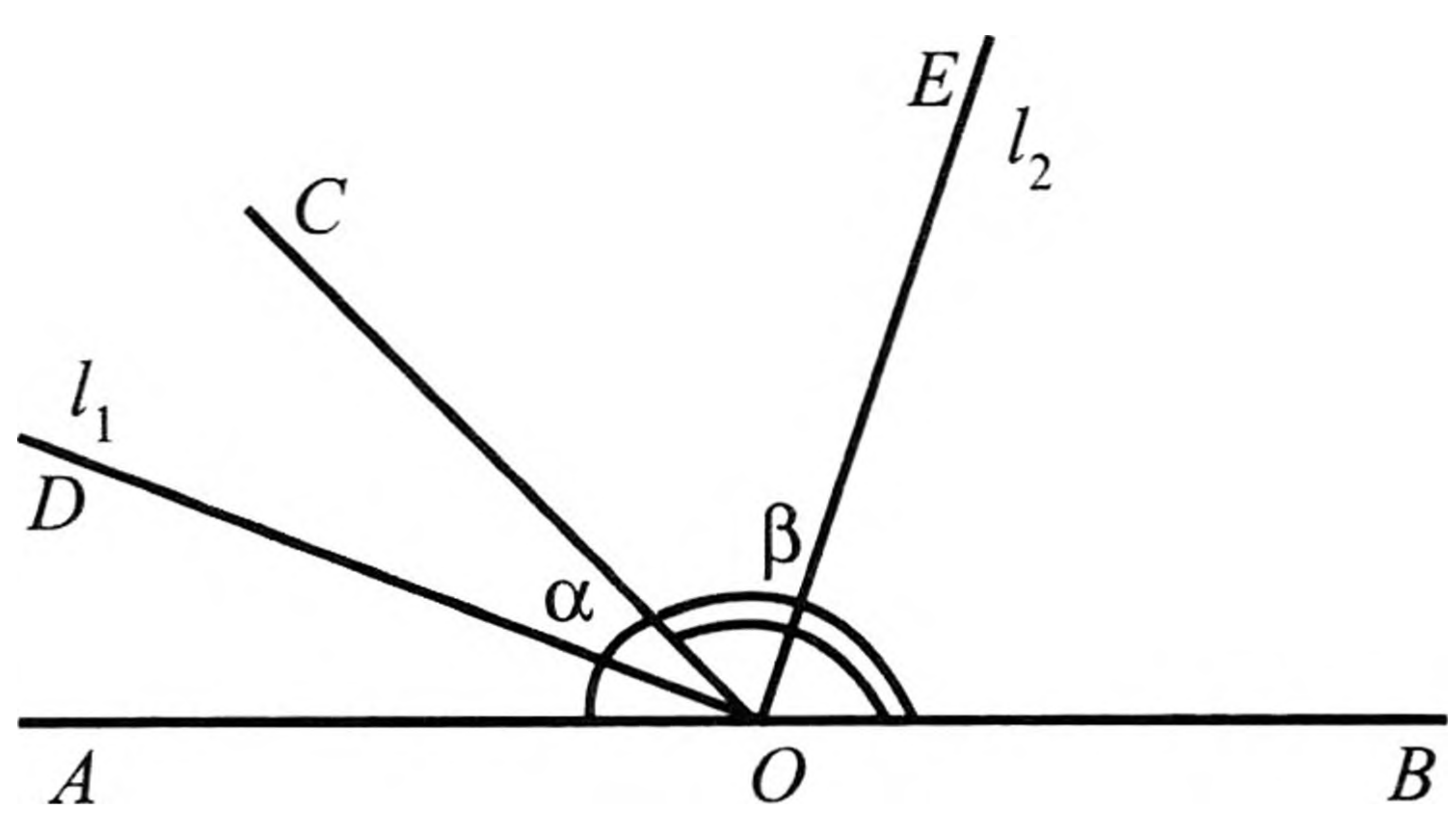
19. Площадь параллелограмма, площадь трапеции. Как выражается площадь выпуклого четырехугольника через его диагонали?

20. Вписанные и описанные четырехугольники. Когда можно вписать окружность в треугольник? Когда — описать?

После того, как все необходимые определения, формулы, свойства и теоремы аккуратно выписаны в тетрадь, а вы их запомнили, мы можем приступать к задачам на доказательство.

Задачи на доказательство

1. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



Пусть α и β — смежные углы, l_1 — биссектриса угла α, l_2 — биссектриса угла β. Нужно доказать, что $l_1 \perp l_2$.

Доказательство

Смежные углы — это углы, имеющие общую сторону. Так как углы α и β — смежные, то $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

$$\angle DOC = \frac{1}{2}\alpha,$$

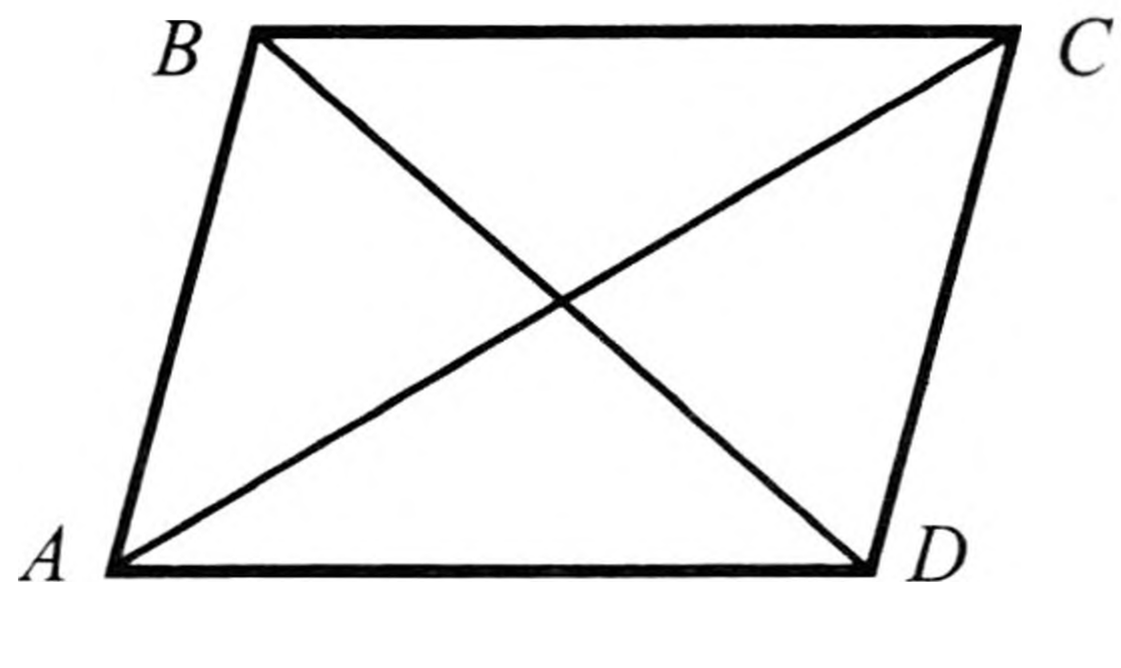
$$\angle COE = \frac{1}{2}\beta,$$

$$\angle DOC + \angle COE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°,$$

$$\angle DOE = 90^0 \Rightarrow l_1 \perp l_2,$$

что и требовалось доказать.

2. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



Пусть дан параллелограмм $ABCD$ с диагоналями AC и BD.

Докажем, что $BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Противоположные стороны параллелограмма равны ($AB = CD$, $DC = AD$), поэтому равенство, которое нужно доказать, можно записать в виде:

$$BD^2 + AC^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right).$$

Самый простой способ — воспользоваться теоремой косинусов.

Из треугольника ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC.$$

Из треугольника BDC:

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2 \cdot CD \cdot BC \cdot \cos\angle BCD.$$

Сложим полученные равенста

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2BC^2-2\cdot AB\cdot BC\times$$
$$\times\cos\angle ABC-2\cdot CD\cdot BC\cdot\cos\angle BCD.$$

$AB = CD$, $DC = AD$ (по свойству параллелограмма)

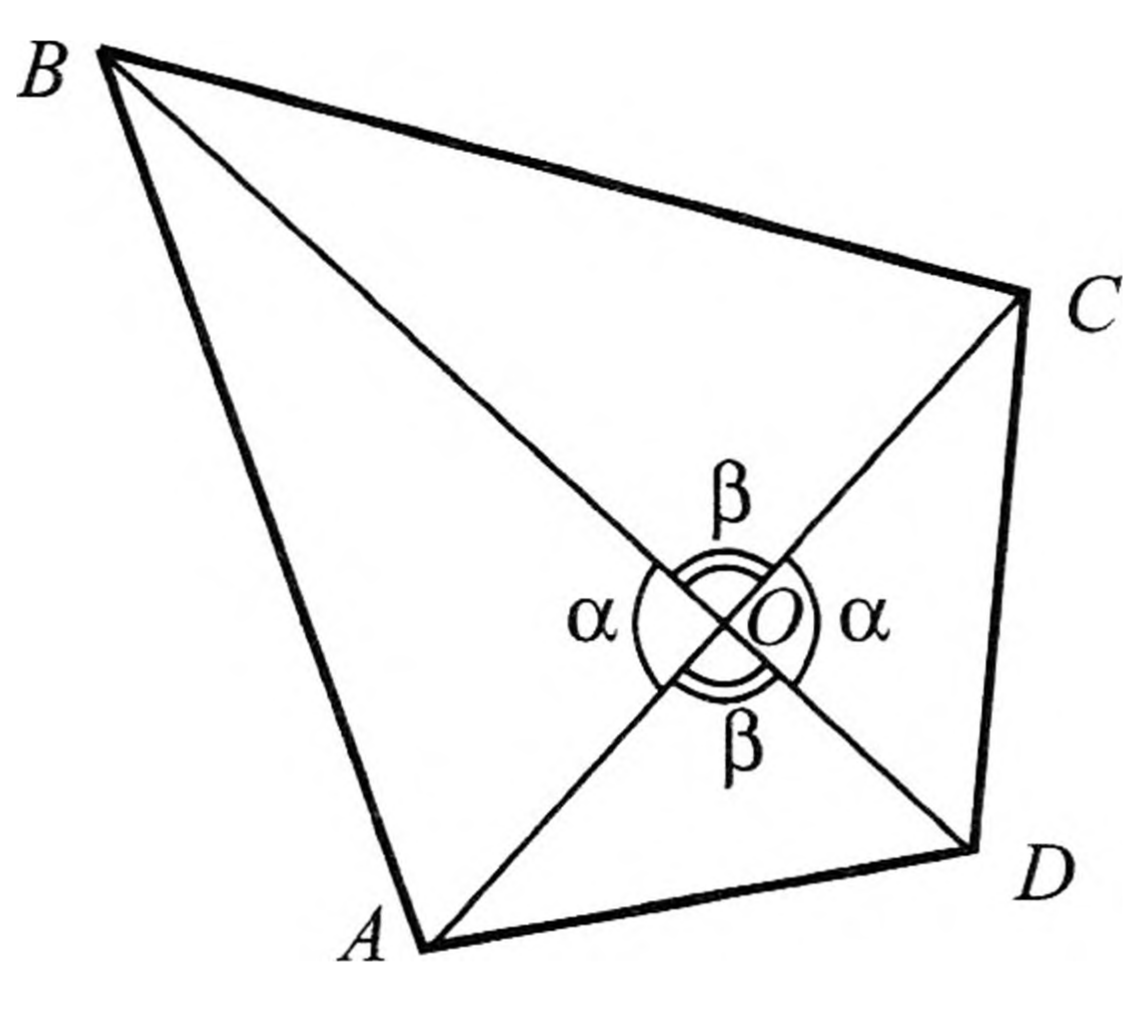
$$AC^2+BD^2=2AB^2+2BC^2-2\cdot AB\cdot BC\times$$
$$\times\cos\angle ABC-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle BCD.$$

$\angle ABC + \angle BCD = 180°$ (как односторонние углы при параллельных сторонах AB и CD), поэтому $\cos\angle BCD=-\cos\angle ABC.$

$$AC^2+BD^2=2AB^2+2BC^2-2\cdot AB\cdot BC\times$$
$$\times\cos\angle ABC+2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC.$$

$AC^2+BD^2=2\left(AB^2+BC^2\right)$, что и требовалось доказать.

3. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.



Дан четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD, $AC\cap BD=O$.

Докажем, что его площадь $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle BOA.$

Напомним, что в качестве угла между прямыми мы берем острый угол.

Доказательство

Четырехугольник $ABCD$ можно разбить на четыре треугольника (AOD, COD, BOC, BOA). Мы знаем, что площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними. Обозначим для удобства равные вертикальные углы $\angle BOA = \angle COD = \alpha$, $\angle BOC = \angle AOD = \beta$.

Тогда площади треугольников

$$S_{\Delta BOA} = \frac{1}{2} BO \cdot AO \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\beta$$

$$S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\beta$$

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников, на которые он разбивается диагоналями

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BOA} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta OCD} + S_{\Delta AOD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha(AO \cdot BO + OC \cdot OD) + \frac{1}{2}\sin\beta(CO \cdot BO + AO \cdot OD)$$

Так как $\alpha + \beta = 180°$, то $\sin\alpha = \sin\beta$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(AO \cdot BO + OC \cdot OD + CO \cdot BO + AO \cdot OD\right)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(AO \cdot \left(BO + OD\right) + OC \cdot \left(OD + BO\right)\right)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(AO + OC\right)\left(BO + OD\right)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin\alpha$$

Давайте сформулируем, что вообще такое математическое доказательство. Обратите внимание: в каждой из трех решенных выше задач мы получали некий новый факт из уже известных нам.

Можно сказать, что **математическое доказательство — это цепочка последовательных логических утверждений, позволяющая вывести новый факт из уже имеющихся.**

При этом, если я вас очень-очень попрошу: «Ну пожалуйста, ну поверьте мне, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны», — это не будет математическим доказательством! Если я скажу: «Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, потому что в Википедии так написано», — это тоже не является математическим доказательством. Ни приказ, ни подкуп, ни ссылка на авторитет не будут доказательством!

Только за это можно полюбить геометрию и поставить себе цель ее изучить. Кроме практической пользы, в ней есть особый смысл. **Логическое мышление — один из путей к независимости личности**.

Научной и нравственной основой курса геометрии является принцип доказательности всех утверждений. И это единственный школьный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех утверждений. Людьми, понимающими, что такое доказательство, трудно и даже невозможно манипулировать.

Из статьи И. Ф. Шарыгина
«Нужна ли школе 21-го века Геометрия».

Приведем весь список полезных фактов, применяемых в решении задач по геометрии. Мы взяли его из сборников Р. К. Гордина для подготовки к ЕГЭ по математике и очень рекомендуем вам эти сборники.

Эти полезные факты пригодятся вам при решении задач ЕГЭ

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

4. Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

6. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

7. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной линии.

8. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам

9. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

10. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности

11. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния

12. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

13. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

14. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

15. Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.

16. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

17. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

18. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

19. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

20. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

21. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внут-

ренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

22. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

23. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M, а угол BAC равен φ, то угол KLM равен $90° - \frac{1}{2}\varphi$.

24. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

25. Если BM и CK — высоты треугольника ABC, то треугольник AMK подобен треугольнику ABC, причем коэффициент подобия равен $|\cos A|$.

26. Если BM и CK — высоты треугольника ABC, а O — центр описанной окружности, то OA перпендикулярен MK.

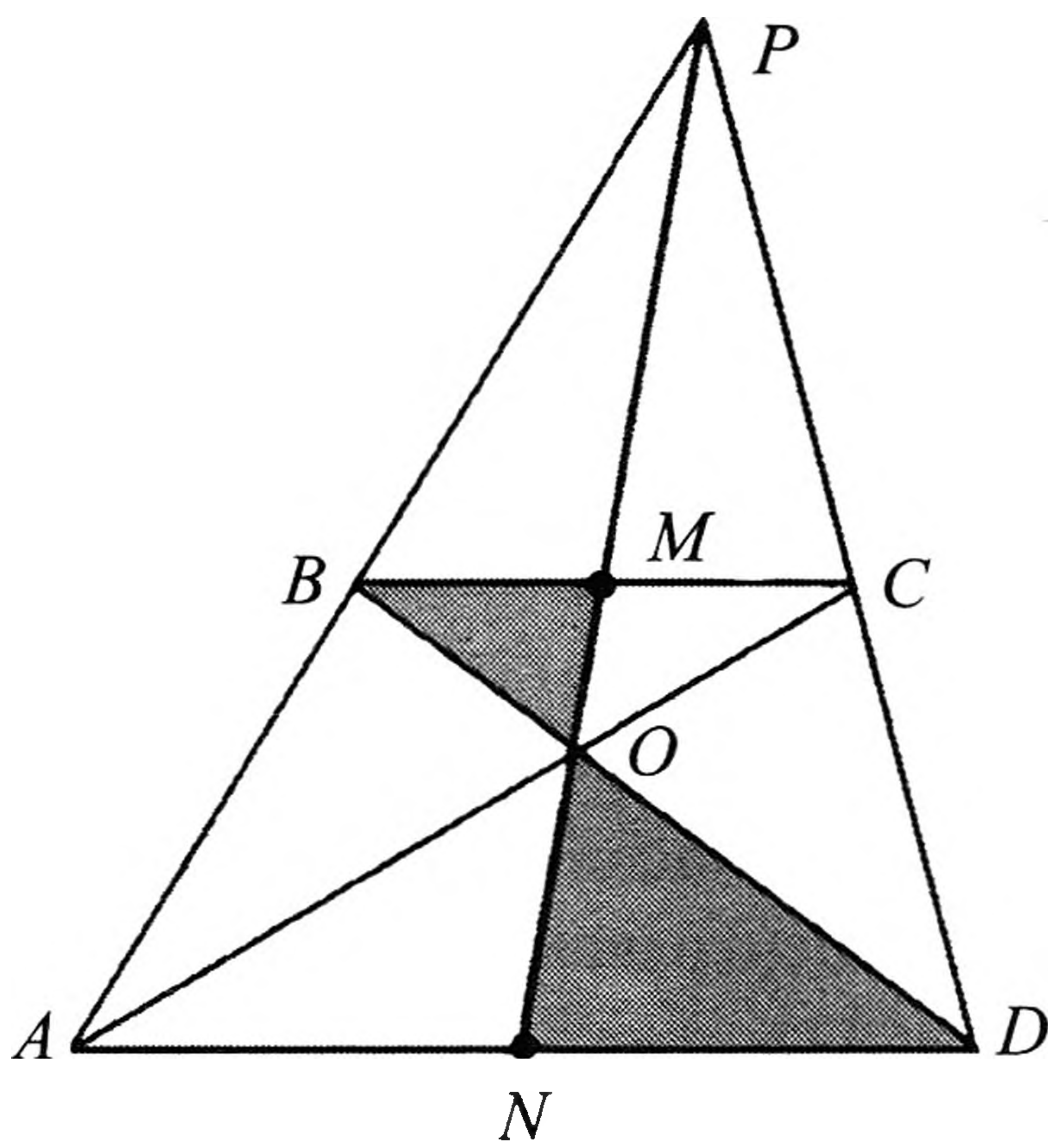
27. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

28. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

Здесь, в книге, мы разберем только несколько доказательств. Остальные докажите самостоятельно. На наших занятиях и интенсивах мы обязательно доказываем каждый из этих полезных фактов.

4. Докажем замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной линии.

Заметьте, что не стоит изображать равнобедренную или прямоугольную трапецию, если в условии об этом не сказано. Не нужно «улучшать» чертеж. Если трапеция произвольная — изображаем ее произвольной.



Итак, дана трапеция $ABCD$, $AC \cap BD = O$, N — середина AD, M — середина BC, $AB \cap CD = P$. Надо доказать, что точки M, N, O, P лежат на одной прямой.

Задача не так уж и проста, да и сама формулировка необычна: доказать, что четыре точки лежат на одной прямой. Как это сделать?

Во-первых, мы можем разбить задачу на две. Во-вторых — немного переформулировать.

1) Докажем, что середина основания AD лежит на прямой, соединяющей середину основания BC и точку пересечения диагоналей.

2) Докажем, что середина основания AD лежит на прямой, соединяющей середину основания BC и точку пересечения продолжений боковых сторон.

Начнем с пункта 1.

Пусть M — середина BC, O — точка пересечения диагоналей трапеции, $MO \cap AD = N$. Докажем, что N — середина AD.

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам ($\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $\angle OBC = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных основаниях трапеции), тогда $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{BC}{AD}$.

Аналогично, $\Delta BOM \sim \Delta DON$ ($\angle BOM = \angle NOD$ как вертикальные, $\angle MBO = \angle ODN$ как накрест лежащие при параллельных основаниях трапеции), отсюда $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{BM}{ND}$.

Значит, $\frac{BC}{AD} = \frac{BM}{ND} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{ND}{AD} = \frac{1}{2}$. Это значит, что N — середина AD.

Теперь пункт 2.

Проведем PM — медиану треугольника BPC. Пусть прямые AD и PM пересекаются в точке N. Докажем, что N — середина AD.

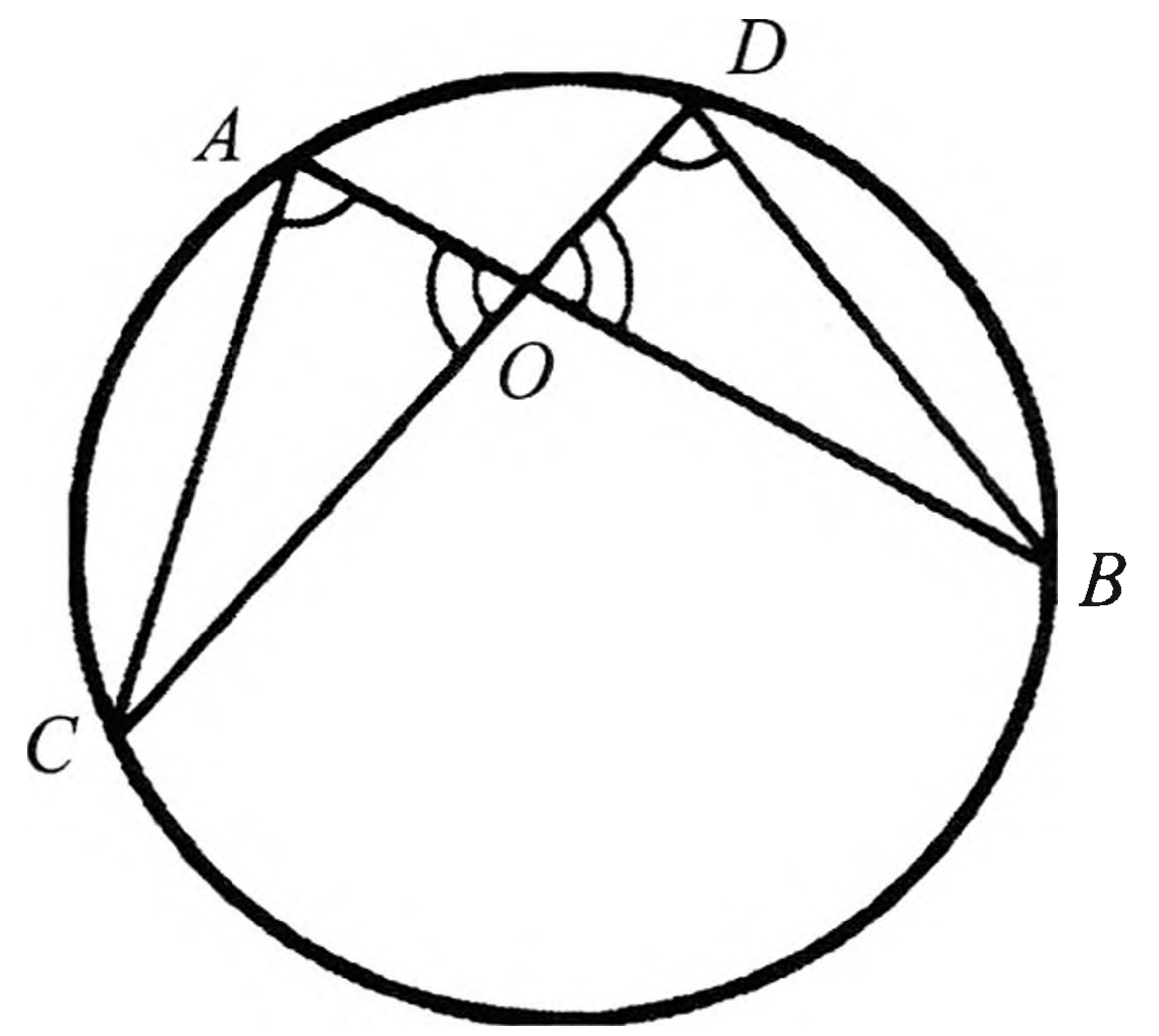
$\Delta BPC \sim \Delta APD$ по двум углам (угол P — общий, $\angle PBC = \angle PAD$ как соответственные при параллельных основаниях трапеции), отсюда $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$.

$\Delta BPM \sim \Delta APN$ аналогично, $\frac{BP}{AP} = \frac{BM}{AN}$.

Получим: $\frac{BC}{AD} = \frac{BM}{AN} \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$, значит, N — середина AD.

Таким образом, точки M, O, N лежат на одной прямой. На прямой MN лежат точки O и P. Значит все четыре точки лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

5. Докажем, что произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.



Пусть AB и CD — хорды окружности, $AB \cap CD = O$. Докажем, что $AO \cdot OB = OC \cdot OD$.

Доказательство

Достроим треугольники AOC и DOB.

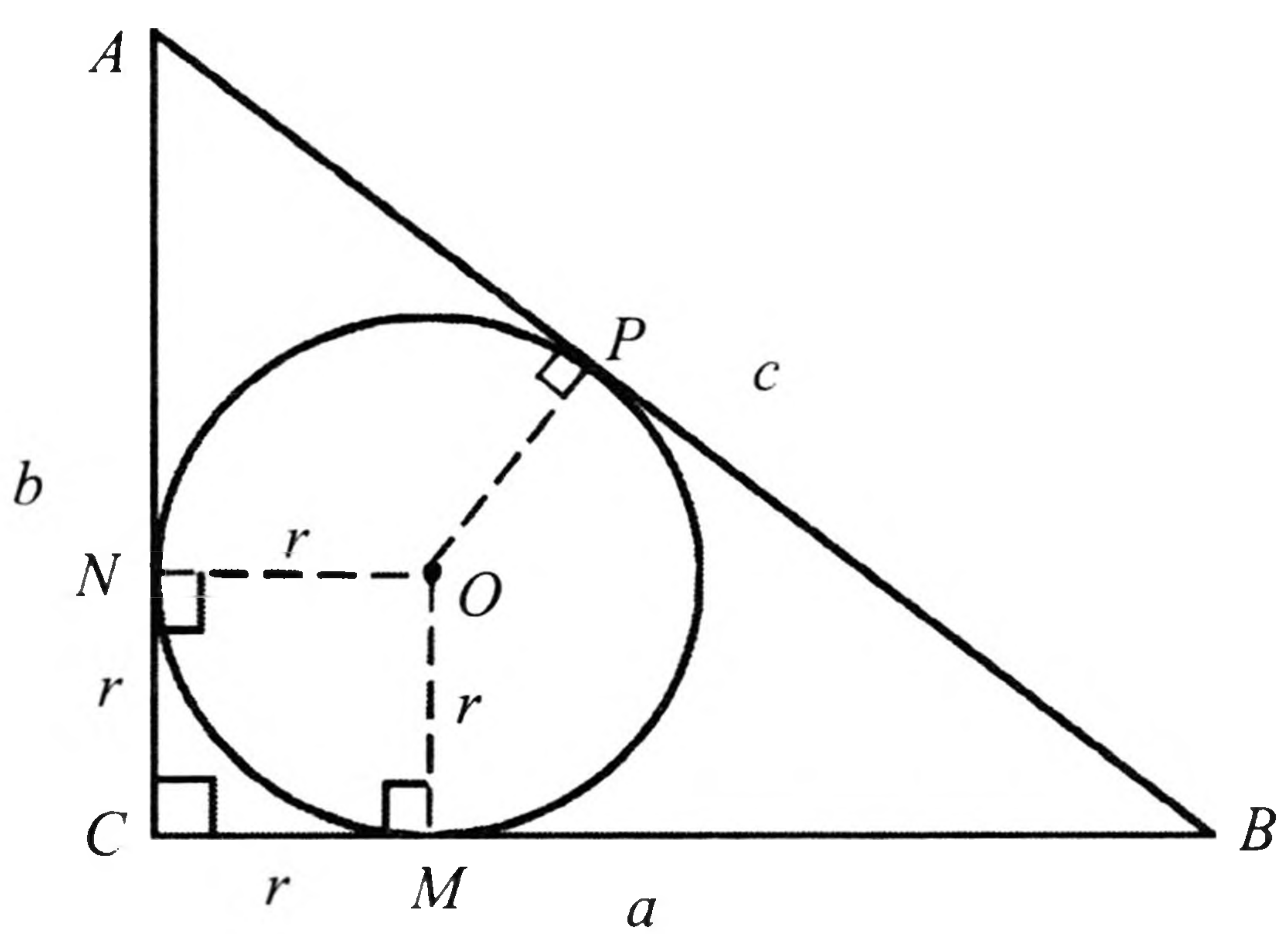
$\angle AOC = \angle DOB$ (вертикальные)

$\angle CAB = \angle CDB = \frac{1}{2} \cup CB$ (как опирающиеся на одну дугу BC).

$\Delta AOC \sim \Delta DOB$ (по двум углам).

Отсюда $\frac{AO}{OD} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow AO \cdot OB = OC \cdot OD$ — что и требовалось доказать.

6. Докажем, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.



Дан прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой) и вписанная в него окружность с центром в точке O и радиусом r. Катеты $AC = a$, $BC = b$, гипотенуза $AB = c$. Надо доказать, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Воспользуемся тем, что отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Проведем $OM \perp a$, $ON \perp b$, $OP \perp c$.

Смежные стороны четырехугольника $CMON$ равны ($ON = OM = r$), все углы прямые ($\angle C = \angle N = \angle M = 90°$), значит, $CMON$ — квадрат.

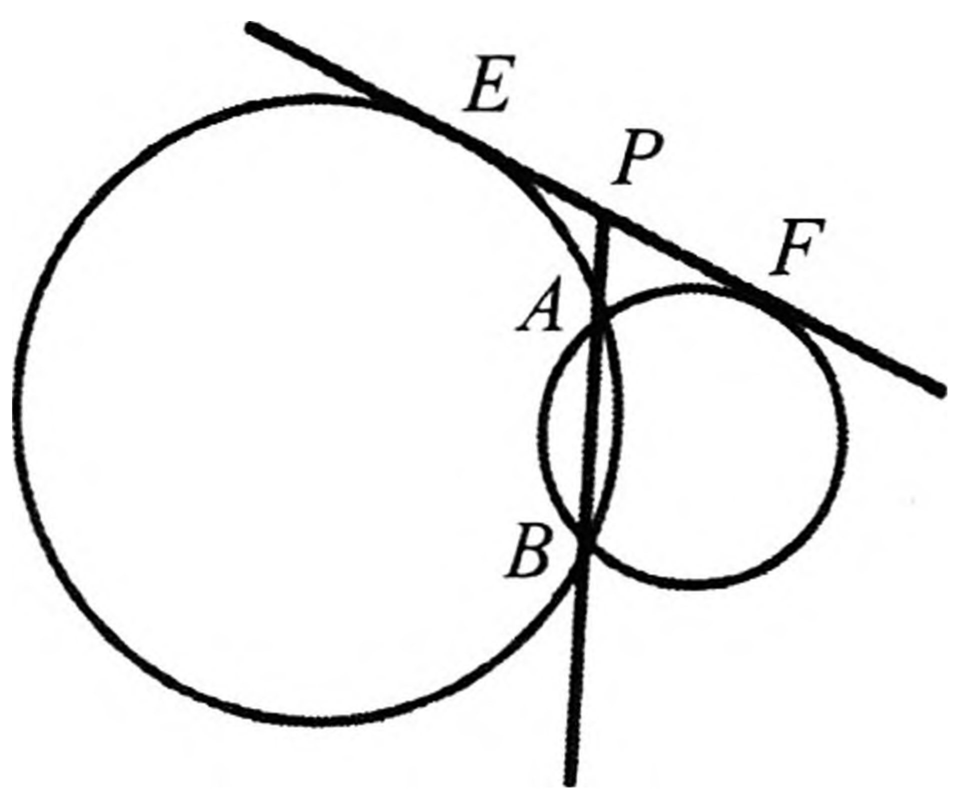
Тогда $NC = CM = r$, $AN = AP = b - r$ (по свойству отрезков длин касательных); аналогично $BM = BP = a - r$.

Получим

$$c = b - r + a - r,$$

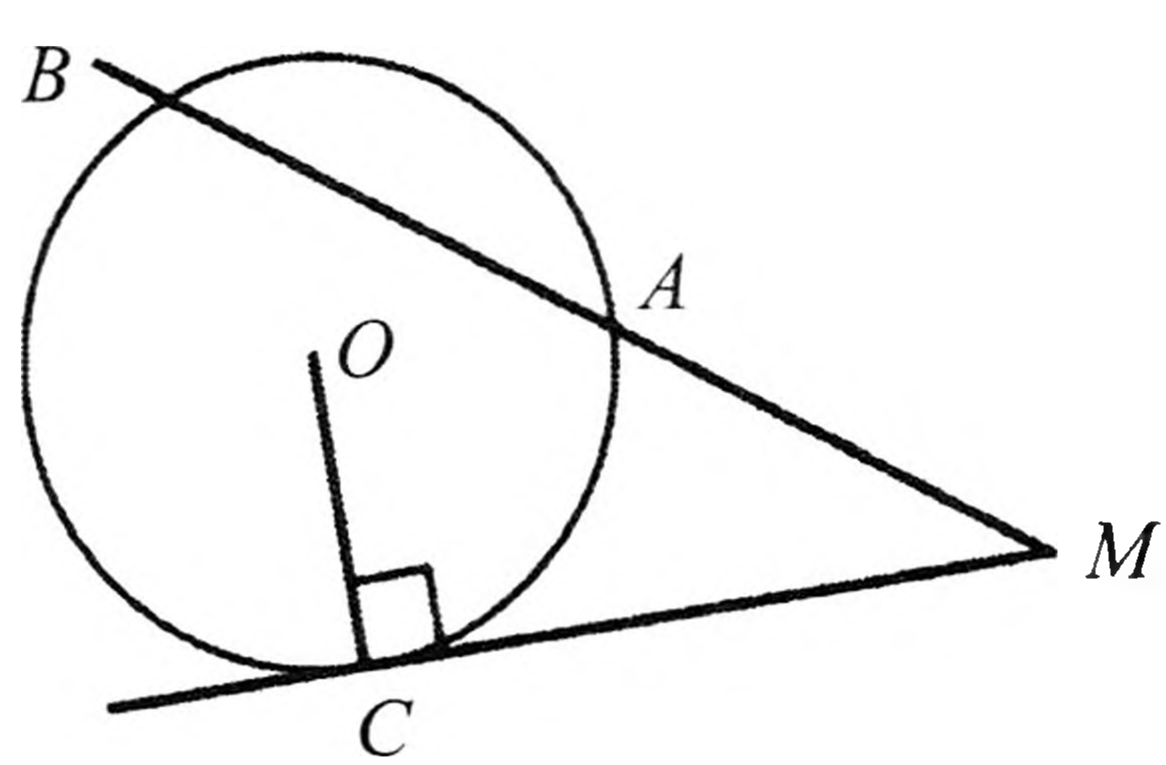
$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

7. Докажем, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.



Пусть две окружности пересекаются в точках A и B. Общая касательная касается этих окружностей в точках E и F. $AB \cap EF = P$. Докажем, что $PE = PF$.

Нам понадобится теорема о секущей и касательной. Ее сложно найти в учебнике, однако она часто помогает при решении задач.



Если к окружности проведены из точки M касательная MC и секущая MB, тогда квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков длин секущей.

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

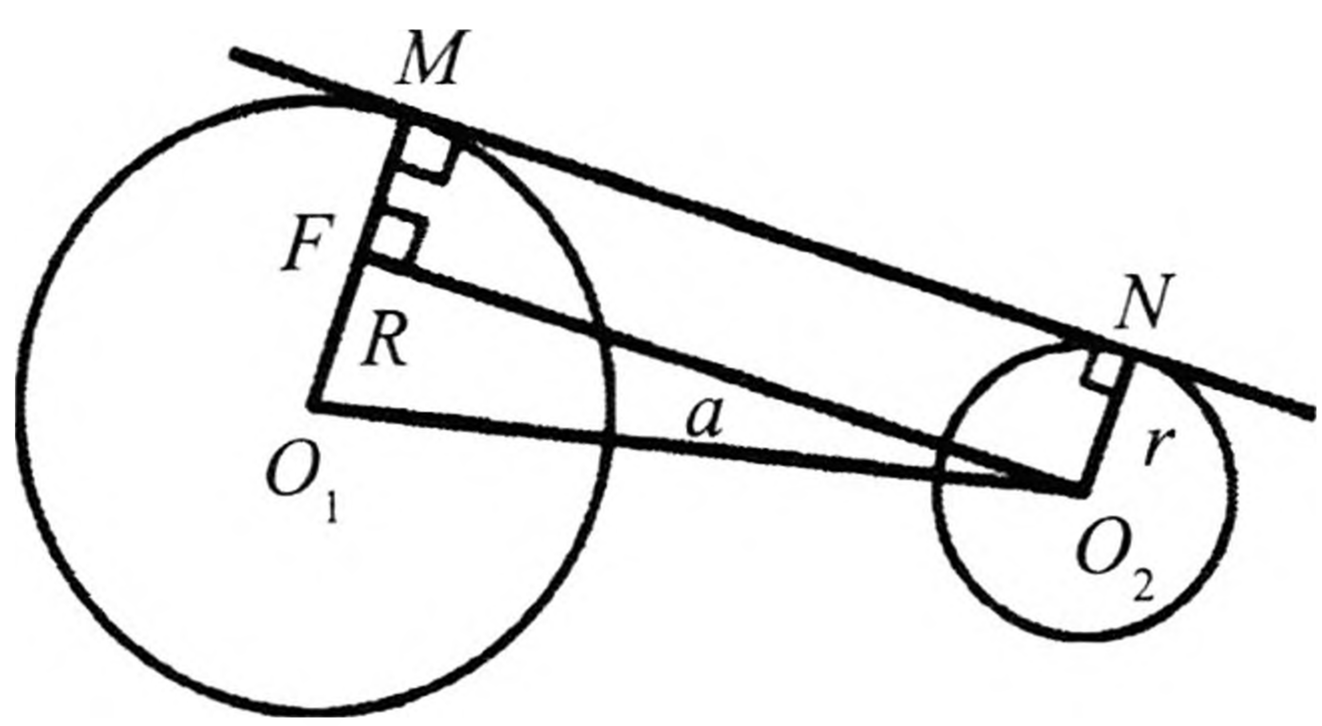
Вернемся к задаче. По теореме о секущей и касательной

$$\left.\begin{aligned} PE^2 &= PA\cdot PB, \\ PF^2 &= PA\cdot PB, \end{aligned}\right\} \Rightarrow PE^2 = PF^2 \Rightarrow PE = PF,$$ что и требовалось доказать.

Вот еще одно часто используемое в задачах утверждение.

8. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{(a^2-(R-r)^2)}$ и $\sqrt{(a^2-(R+r)^2)}$.

Вначале рассмотрим случай внешнего касания.



Даны окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r. Точки касания общей внешней касательной — M и N соответственно, расстояние между центрами окружностей $a = O_1O_2$. Докажем, что $MN = \sqrt{a^2-(R-r)^2}$.

Доказательство

Задача решается в одно действие, а схему желательно запомнить — она пригодится в задачах ЕГЭ.

Четырехугольник O_1O_2NM — прямоугольная трапеция, так как $O_1M \perp MN$, $O_2N \perp MN$ (как радиус и касательная) $\Rightarrow O_1M \parallel O_2N$.

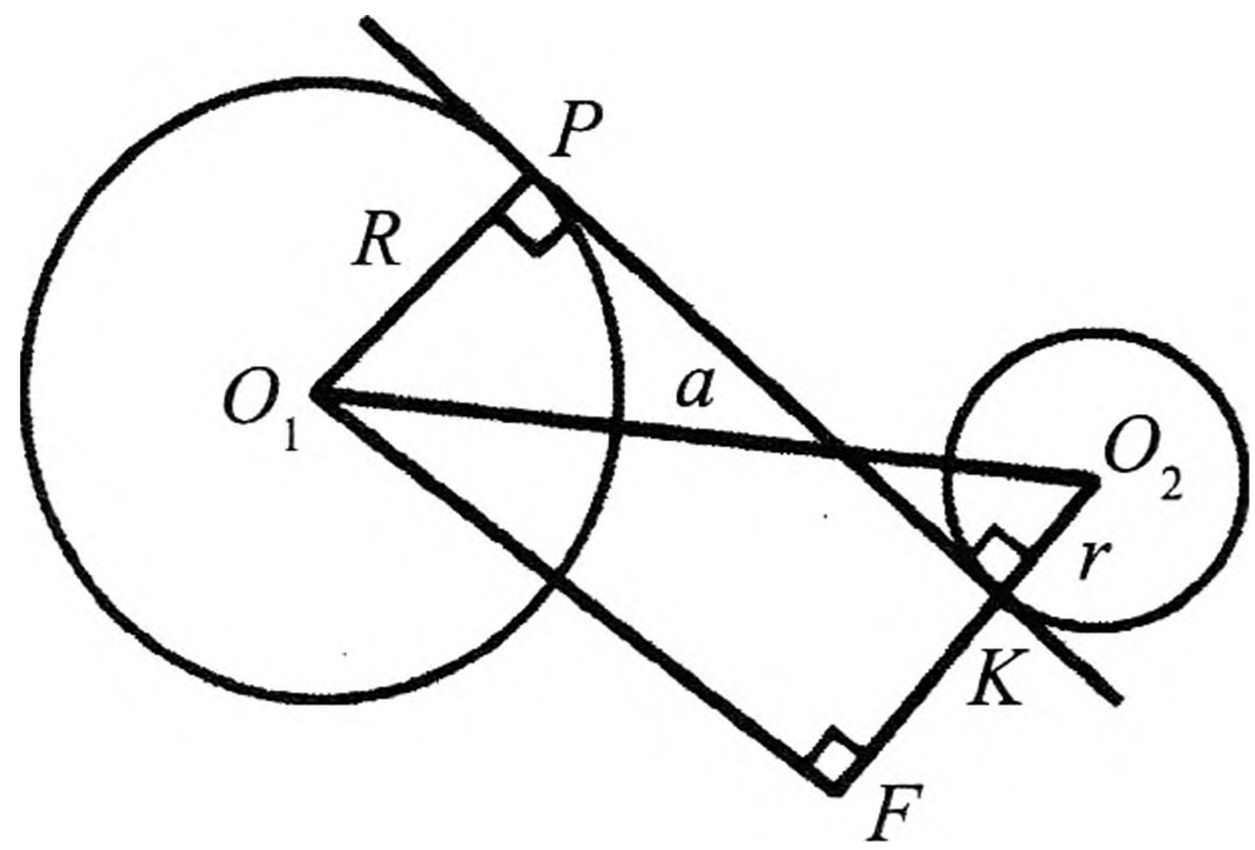
Проведем $O_2F \parallel MN$, $\angle F = 90°$.

Из $\Delta O_1O_2F : FO_2 = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_1F^2}$ (по теореме Пифагора).

Но $O_1F = R - r$, $O_2F = MN$ (так как $FMNO_2$ — прямоугольник по построению). Получаем:

$$MN = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}.$$

Теперь внутреннее касание.



Даны окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r. Точки касания общей внутренней касательной — P и K соответственно, расстояние между центрами окружностей $a = O_1O_2$. Докажем, что $PK = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Посмотрим на чертеж. Сразу видны два треугольника, подобных по двум углам. Мы можем использовать их подобие, но проще поступить по-другому: свести задачу к одному прямоугольному треугольнику.

Продолжим O_2K (радиус меньшей окружности). Из точки O_1 опустим перпенидуляр $O_1F \perp O_2K$. $FKPO_1$ — прямоугольник $(O_1F \parallel PK,\ \angle P = 90°)$.

В треугольнике O_1O_2F имеем:

$$O_1O_2 = a,\ O_2F = r + KF = r + R.$$

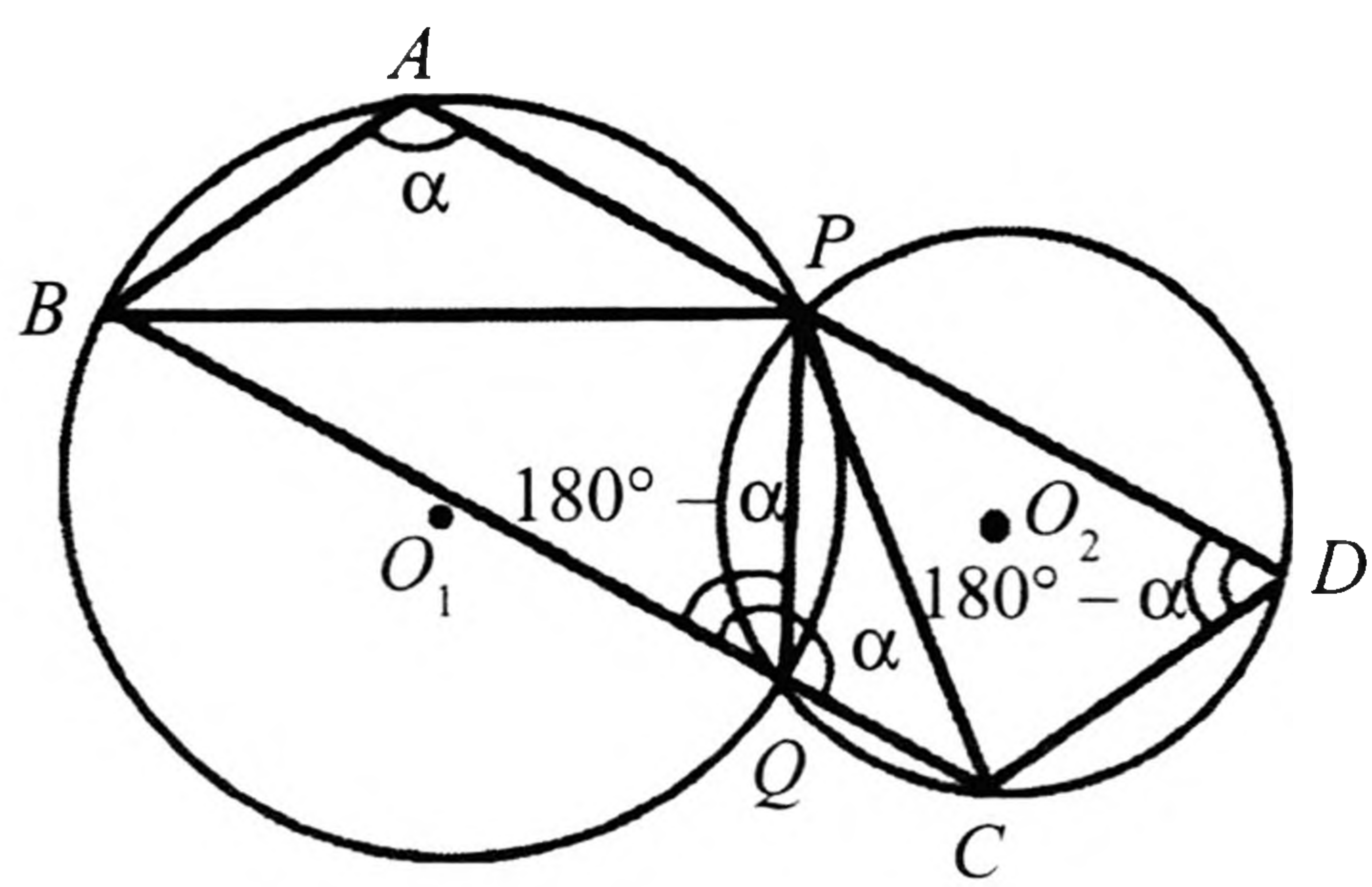
$FO_1 = \sqrt{a^2 - (r+R)^2}$ (по теореме Пифагора).

Поскольку $FPKO_1$ — прямоугольник, $O_1F = PK$.

$PK = \sqrt{a^2 - (r+R)^2}$, что и требовалось доказать.

Задачи по геометрии формата ЕГЭ

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.
а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.



Решение

а) Пусть $\angle BAP = \alpha$. Тогда $\angle BQP = 180° - \alpha$ (по свойству вписанного в окружность четырехугольника $PABQ$). $\angle BQC = \alpha$ (смежный с $\angle BQP$). $\angle PDC = 180° - \alpha$ (по свойству вписанного в окружность четырехугольника $PQCD$).

$\angle BAP + \angle PDC = 180°$ (односторонние углы при прямых AB и CD и секущей AD), значит, $AB \parallel CD$.

$AD \parallel CB$ (по условию), $AB \parallel CD$ (по доказанному), значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдем отношение $BP : PC$, если $R = 2r$.

Из ΔAPB по теореме синусов: $\dfrac{BP}{\sin\alpha} = 2R$,

Из ΔPQC по теореме синусов: $\dfrac{PC}{\sin\alpha} = 2r$,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{2\cdot 2r}{2r} = 2.$$

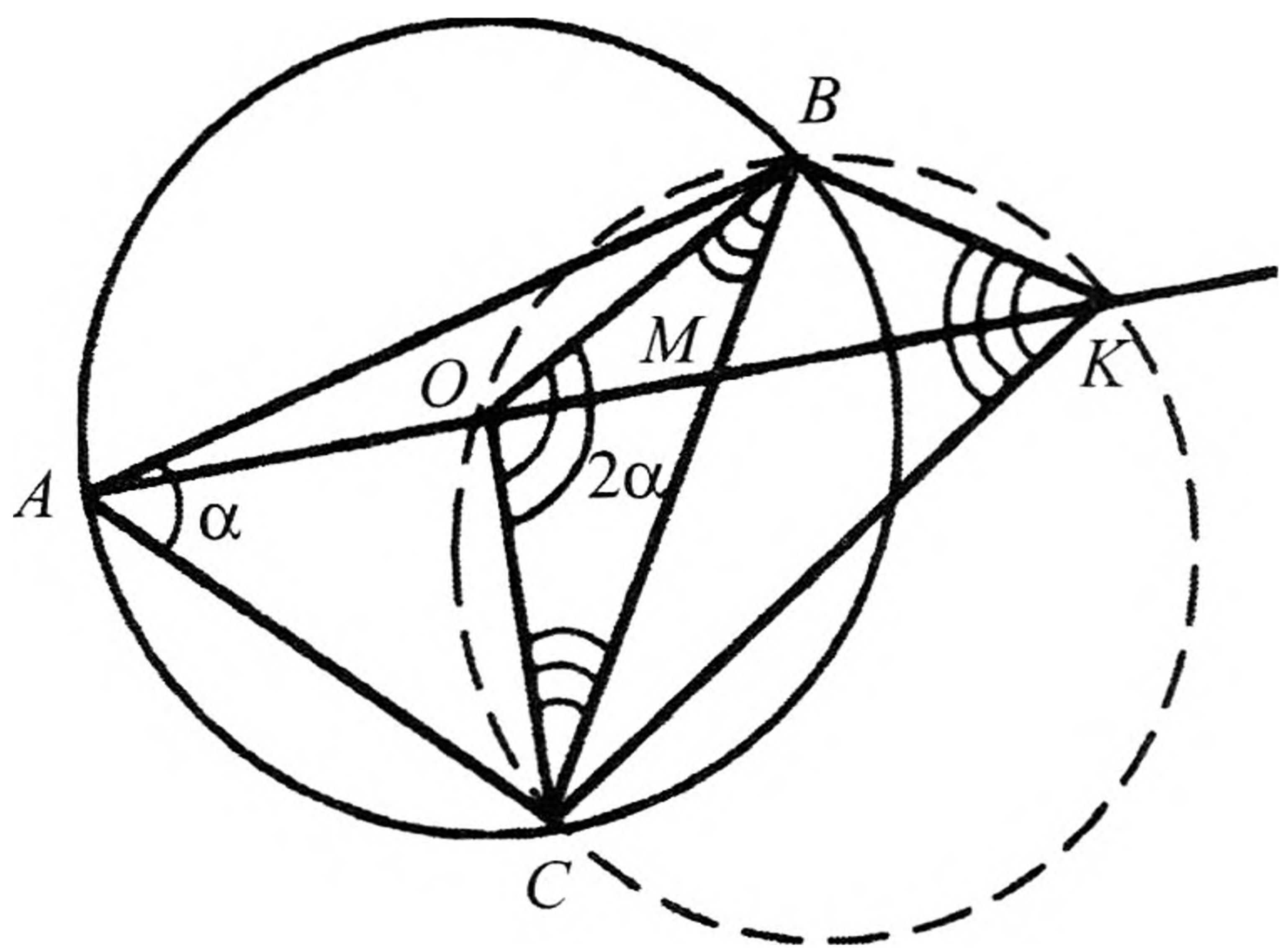
Ответ: $BP : PC = 2$.

2. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

Решение



Углы, данные в задаче, не являются углами какого-либо треугольника. В этом и состоит некоторая сложность. Допустим, вам попадется на экзамене такая задача, где не сразу удается сделать пункт а) (на доказательство). В этом случае вы можете начать с более простого пункта б) и получить за него балл. А мы начнем с пункта а).

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов 180 градусов.

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$ (BAC — вписанный угол, BOC — центральный, и они опираются на одну дугу BC). $\angle OKC = 90° - \alpha$.

Треугольник OBC — равнобедренный, так как $OB = OC = R$. Значит, $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.

Пусть $OK \cap BC = M$. $\Delta BOM \sim \Delta KCM$ по двум углам ($\angle OBM = \angle MKC = 90° - \alpha$, $\angle BMO = \angle CMK$ как вертикальные). Значит, $\frac{OM}{MC} = \frac{BM}{MK} \Rightarrow \frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MK}$.

Тогда $\Delta OMC \sim \Delta BMK$ по двум сторонам и углу между ними ($\frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MK}$, $\angle OMC = \angle BMK$ как вертикальные). Значит, $\angle OCB = \angle OKB = 90° - \alpha$. Значит, $\angle BKC = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$.

$\angle BKC + \angle BOC = 180°$, значит, четырехугольник $OBKC$ — вписанный.

б) Найдем радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника $OBKC$. Если окружность описана около четырехугольника $OBKC$, то она описана и около треугольника OCK. Найдем OC и $\sin \angle OKC$. Затем радиус окружности, описанной около ΔOKC, найдем по теореме синусов.

OC — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Найдем его.

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC:

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R,$$

$$48 : \frac{4}{5} = 2OC,$$

$$OC = 30.$$

Теперь вернемся к треугольнику OKC.

Пусть радиус описанной окружности треугольника OKC равен x. Из треугольника OKC по теореме синусов:

$$\frac{OC}{\sin \angle OKC} = 2x,$$

$$30 : \frac{3}{5} = 2x,$$

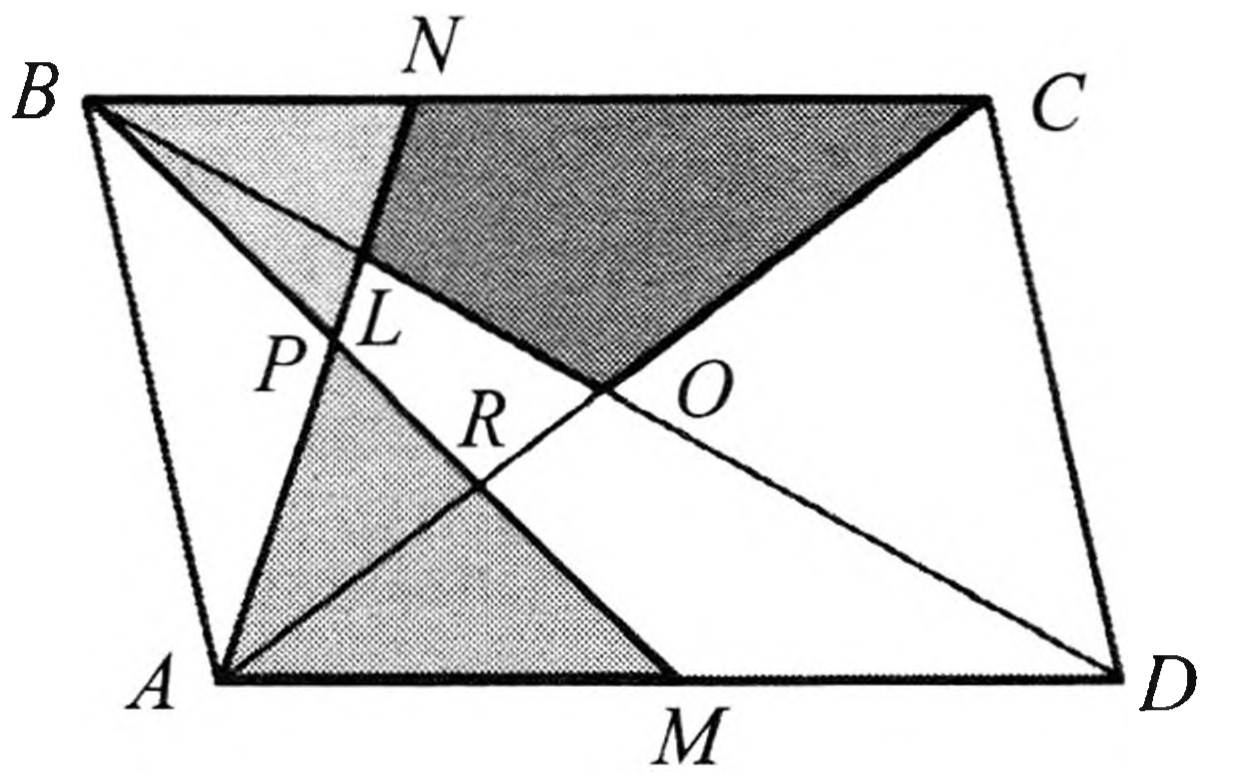
$$x = 25.$$

Ответ: 25.

3. Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части.

а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.

б) Найдите площадь четырехугольника, ограниченного двумя проведенными лучами и прямыми BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.



а) Пусть точки P и R делят отрезок BM на 3 равные части. Фактически, надо доказать, что $R \in AC$.

Рассмотрим ΔBAD. В этом треугольнике BM — медиана по условию.

Пусть $AC \cap BD = O$. Тогда AO — также медиана в ΔBAD, поскольку диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Пусть $AO \cap BM = F$. Тогда $\dfrac{BF}{FM} = \dfrac{2}{1}$. Но по условию $\dfrac{BR}{RM} = \dfrac{2}{1}$, значит, точки F и R совпадают. Получили, что $R \in AC$.

б) Найдем площадь четырехугольника $NCOL$.

$$S_{NCOL} = S_{\Delta BOC} - S_{\Delta BNL}.$$

$S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{4} S_{ABCD} = \dfrac{40}{4} = 10$ (поскольку диагонали параллелограмма делят его на четыре равных по площади треугольника).

$\Delta BNP \sim \Delta MPA$ по двум углам ($\angle BPN = \angle APM$ как вертикальные, $\angle BNP = \angle PAM$ как накрест лежащие при параллельных сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ и секущей AN). Значит, $\dfrac{BN}{AM} = \dfrac{BP}{PM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BN = \dfrac{1}{2} AM = \dfrac{1}{4} AD.$

$\Delta BNL \sim \Delta DLA$ по двум углам ($\angle BLN = \angle DLA$ как вертикальные, $\angle BNL = \angle LAD$ как накрест лежащие при параллельных сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ и секущей AN). Значит, коэффициент подобия $k = \dfrac{BN}{AD} = \dfrac{1}{4}$. Высота этого треугольника $h_{\Delta BNL} = \dfrac{1}{4} h_{\Delta ALD}$.

$$h_{\Delta BNL} + h_{\Delta ALD} = h_{ABCD} \Rightarrow h_{\Delta BNL} = \frac{1}{5} h_{ABCD}.$$

$$S_{ABCD} = h_{ABCD} \cdot AD = 40,$$

$$S_{\Delta BNL} = \frac{1}{2} h_{\Delta BNL} \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot AD \cdot h_{ABCD} = \frac{1}{40} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{40} \cdot 40 = 1,$$

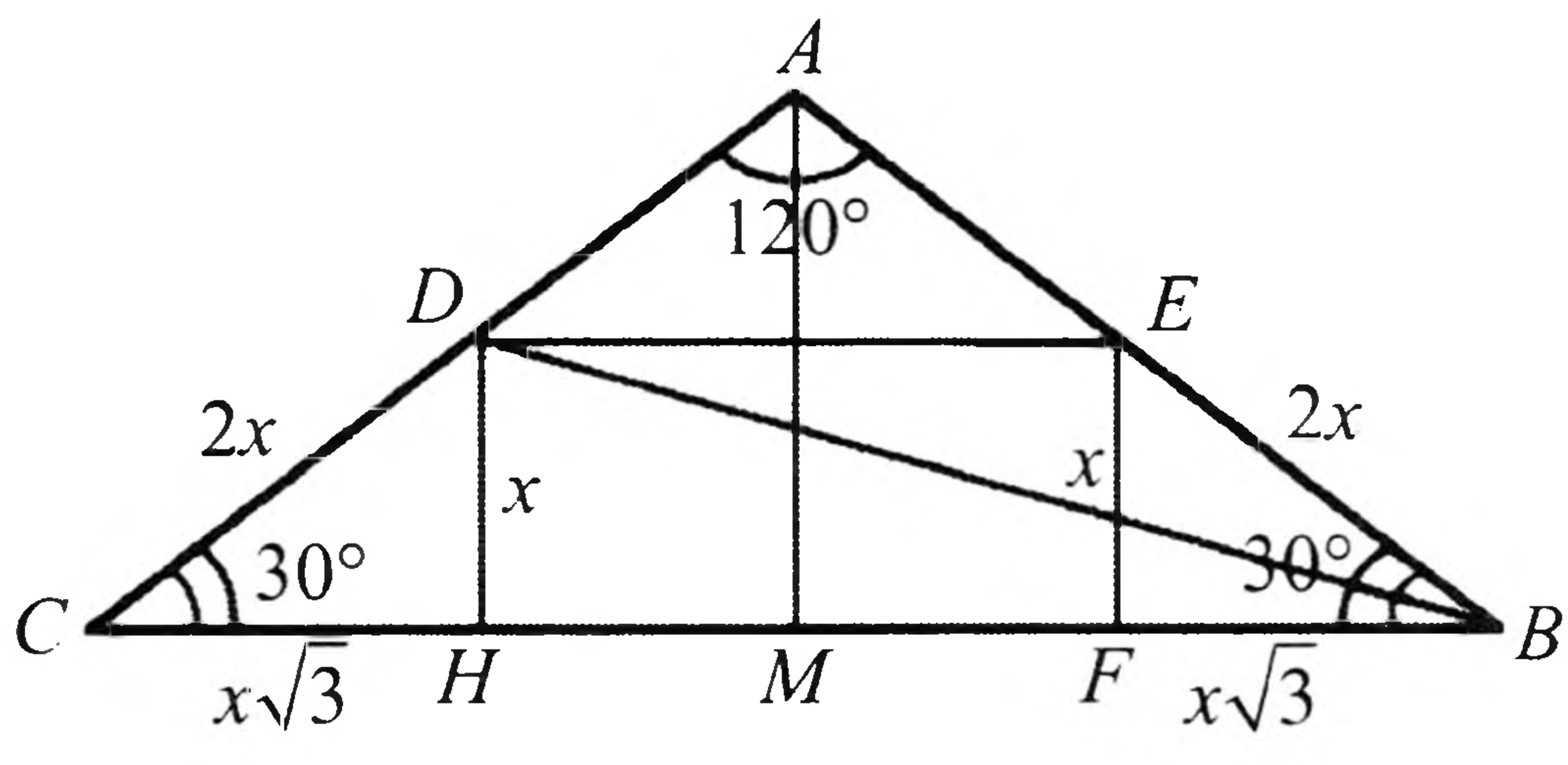
$$S_{NCOL} = 10 - 1 = 9.$$

Ответ: 9.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.



Решение

а) Очевидно, что углы ACB и ABC равны 30 градусов, поскольку ΔABC — равнобедренный.

Пусть AM — высота треугольника ABC.

Пусть $DH = x$. Докажем, что $FH = 2x$.

Из ΔCDH: $CD = 2x$ (угол H прямой, так как $DEFH$ — прямоугольник, а катет напротив угла в 30 градусов равен половине гипотенузы).

Тогда $CH = x\sqrt{3}$.

$EF = DH = x$ (противоположные стороны прямоугольника).

Аналогично, из ΔEFB: $EB = 2x$, $FB = x\sqrt{3}$.

Из ΔDHB:

$$\operatorname{tg}\angle DBH = \frac{DH}{HB},$$

$$\operatorname{tg}15^\circ = \frac{x}{HB},$$

$$HB = \frac{x}{\operatorname{tg}15^\circ}.$$

Итак, нам понадобилось значение тангенса 15 градусов. Для многих абитуриентов это оказалось препятствием. Но почему же так? Ведь это значение можно найти из формул тригонометрии.

$$\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}\left(45^\circ - 30^\circ\right) \text{ или } \operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}\frac{30^\circ}{2}.$$

Еще один способ — использовать универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\sin 30^\circ = \frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}.$$

Обозначим $\operatorname{tg} 15^\circ = t$ и решим уравнение.

$$\frac{1}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0,$$

$$t = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Так как $15^\circ < 45^\circ$, и при x $[0, 90^\circ)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, то $\operatorname{tg} 15^\circ < \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ < 1$.

Поэтому $\operatorname{tg}15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

$HB = \dfrac{x}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow HF = HB - FB \Rightarrow HF = \dfrac{x}{2-\sqrt{3}} - x\sqrt{3} = 2x$, что и требовалось доказать.

б) $\Delta DAE \sim \Delta CAB$ по двум углам ($\angle A$ — общий, $\angle AED = \angle ABC$ как соответственные при параллельных сторонах DE и HF прямоугольника $DEHF$ и секущей EF). Значит, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4-2x}{4} = \frac{2x}{2x+2x\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Отсюда $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{-2} = -\sqrt{3}(1-\sqrt{3}) = 3-\sqrt{3}.$

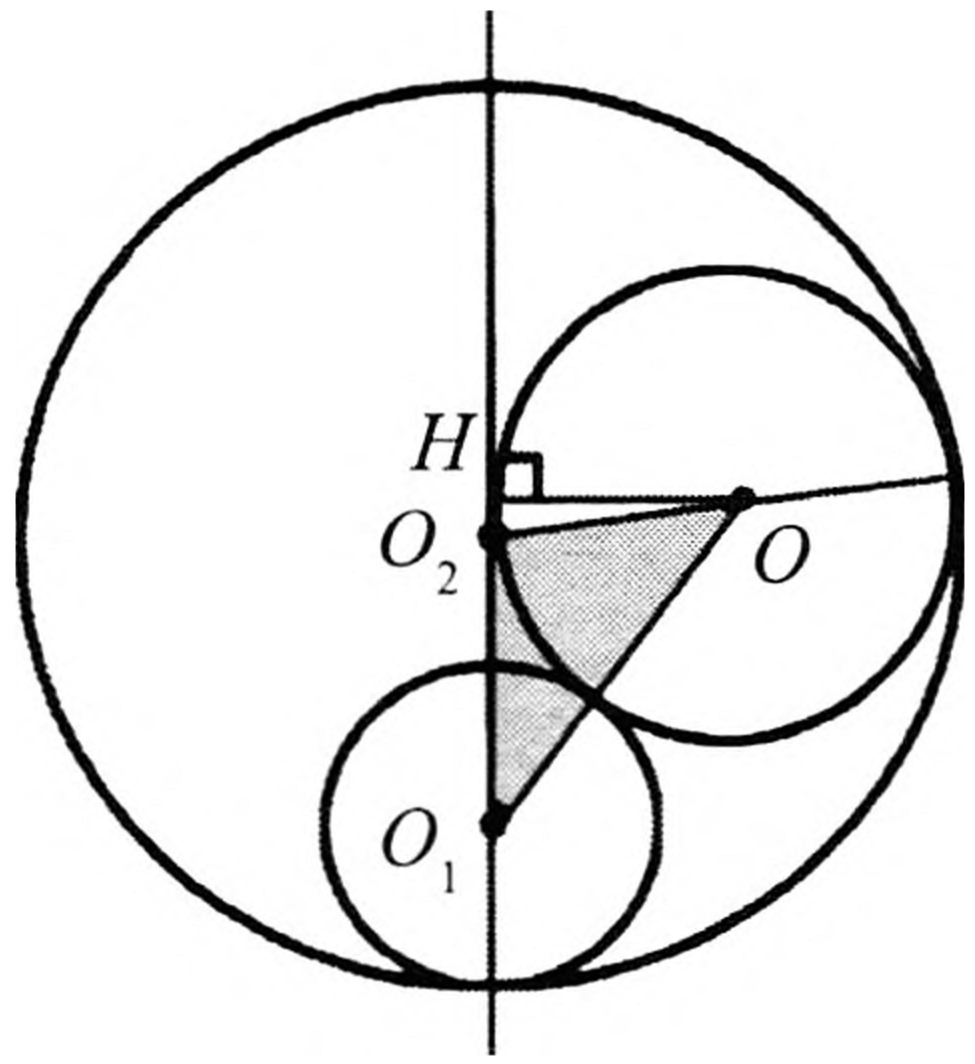
$$S_{DEFH} = DH \cdot HF = 2x^2 = 2(3-\sqrt{3})^2 = 24-12\sqrt{3}.$$

Ответ: $24-12\sqrt{3}$.

5. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.



Пусть центр большей окружности O_2, меньшей — O_1, а той, которая касается их обеих и линии их центров — O.

Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов окружностей. Это означает, что их центры и точка касания лежат на одной прямой.

Пусть радиус третьей окружности равен x. Радиус малой окружности равен r, а большой окружности — R.

Из ΔOO_1O_2 : $OO_1 = r + x$, $OO_2 = R - x$, $O_1O_2 = R - r$.

$$P_{\Delta OO_2O_1} = OO_2 + O_1O_2 + OO_1,$$

$$P_{\Delta OO_2O_1} = R - x + R - r + r + x = 2R.$$

б) Найдем x.

Пусть H — точка касания окружности радиуса x и прямой O_1O_2.

Рассмотрим ΔHOO_2 и ΔHOO_1 (углы H — прямые).

$$OO_1 = 2 + x,\ OO_2 = 6 - x,\ O_1O_2 = 4.$$

По теореме Пифагора из ΔHOO_2: $HO_2 = \sqrt{OO_2^2 - OH^2}$.

По теореме Пифагора из ΔHOO_1: $HO_1 = \sqrt{OO_1^2 - OH^2}$.

$$O_1O_2 = HO_1 - HO_2,$$

$$4 = \sqrt{(2+x)^2 - x^2} - \sqrt{(6-x)^2 - x^2},$$

$$\sqrt{4+4x} - \sqrt{36-12x} = 4,$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{9-3x} = 2.$$

Как решать такое уравнение? Сделаем замену.

Пусть $\sqrt{1+x} = t,\ t \ge 0,$

$\sqrt{9-3x} = z,\ z \ge 0.$

Тогда $t - z = 2$.

При этом:

$$1 + x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1.$$

$$9 - 3x = z^2 \Rightarrow x = \frac{9 - z^2}{3}.$$

Приравняем выражения для x.

$$\begin{cases} t = z + 2, \\ t^2 - 1 = \dfrac{9 - z^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = z + 2, \\ 3t^2 - 3 = 9 - z^2. \end{cases}$$

Подставим t из первого уравнения во второе

$$3(z^2+4z+4)-3=9-z^2.$$

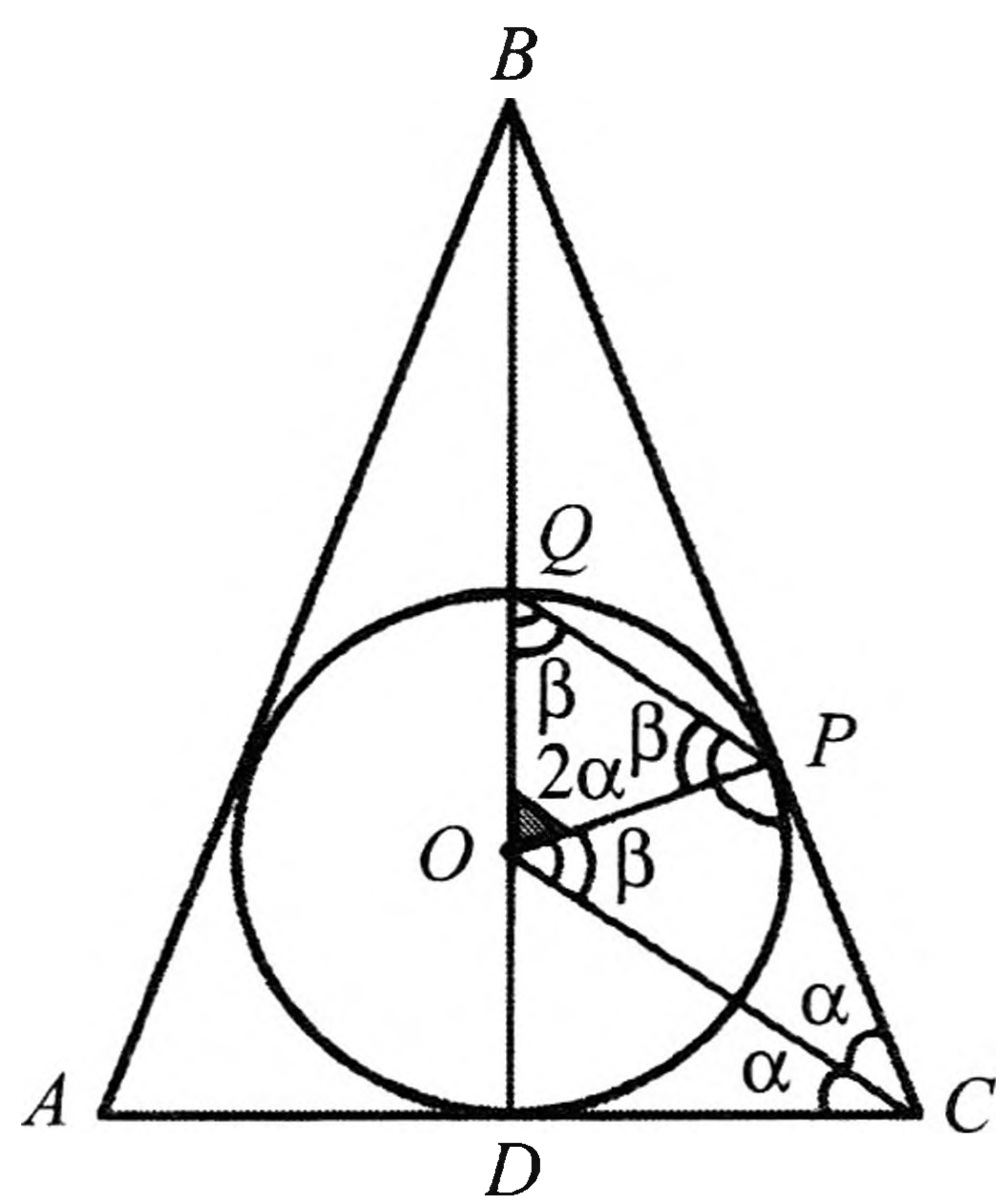
$$4z^2+12z=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

6. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.



Решение

а) Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Значит, BO — биссектриса. Пусть $BO \cap AC = D$. Нужно доказать, что $BD \perp AC$ и BD является также высотой треугольника ABC.

CO — также биссектриса треугольника ABC. Пусть $\angle DCO = \angle OCB = \alpha$. Пусть $\angle COP = \beta$.

$QP \parallel OC$ по условию, значит, $\angle COP = \angle OPQ = \beta$ как накрест лежащие при параллельных прямых QP и OC и секущей OP.

$OP \perp BC$, поскольку касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Из треугольника OPC ($\angle P$ — прямой): $\beta = 90° - \alpha$. Из равнобедренного треугольника QOP ($OP = OQ = R$): $\angle OQP = \angle OPQ$, $\angle QOP = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$.

$\Delta BOP \sim \Delta BCD$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BOP = \angle BCD = 2\alpha$). Значит, $\angle BPO = \angle BDC = 90°$, $BD \perp AC$. Тогда BD — биссектриса и высота треугольника ABC, и треугольник ABC — равнобедренный.

б) BD также является медианой треугольника ABC, значит, $AD = DC = a$. OC — биссектриса, и по свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{DO}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BC = 3DC = 3a$.

$\Delta ODC = \Delta OPC$ по гипотенузе и острому углу ($\angle OCP = \angle OCD = \alpha$, OC — общая), значит, $DC = PC = a$.

$$BP = BC - PC = 3a - a = 2a.$$

Из ΔBDC по теореме Пифагора:

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Коэффициент подобия треугольников BCD и BOP

$$k = \frac{BD}{BP} = \frac{2a\sqrt{2}}{2a} = \sqrt{2}.$$

Тогда $\dfrac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta BOP}} = k^2 = 2 \Rightarrow S_{\Delta BOP} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta BDC}$.

$$S_{DOPC} = S_{\Delta BDC} - S_{\Delta BOP} = S_{\Delta BDC} - \frac{1}{2} S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} S_{\Delta BDC}.$$

$$S_{\Delta OPC} = \frac{1}{2} S_{DOPC} = \frac{1}{4} S_{\Delta BDC}.$$

$$S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BOP} + S_{\Delta OPC} = \frac{1}{2} S_{\Delta BDC} + \frac{1}{4} S_{\Delta BDC} = \frac{3}{4} S_{\Delta BDC}.$$

$\Delta BQP \sim \Delta BOC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BQP = \angle BOC$ как соответственные при параллельных прямых QP и OC и секущей

PC). Коэффициент подобия $\frac{BP}{BC}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$. Значит, $\frac{S_{\Delta BQP}}{S_{\Delta BOC}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=$

$=\frac{4}{9}\Rightarrow S_{\Delta BQP}=\frac{4}{9}S_{\Delta BOC}=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}S_{\Delta BDC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BDC}$.

Однако $S_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{4}\cdot 2a\sqrt{2}\cdot 2a=a^2\sqrt{2}$.

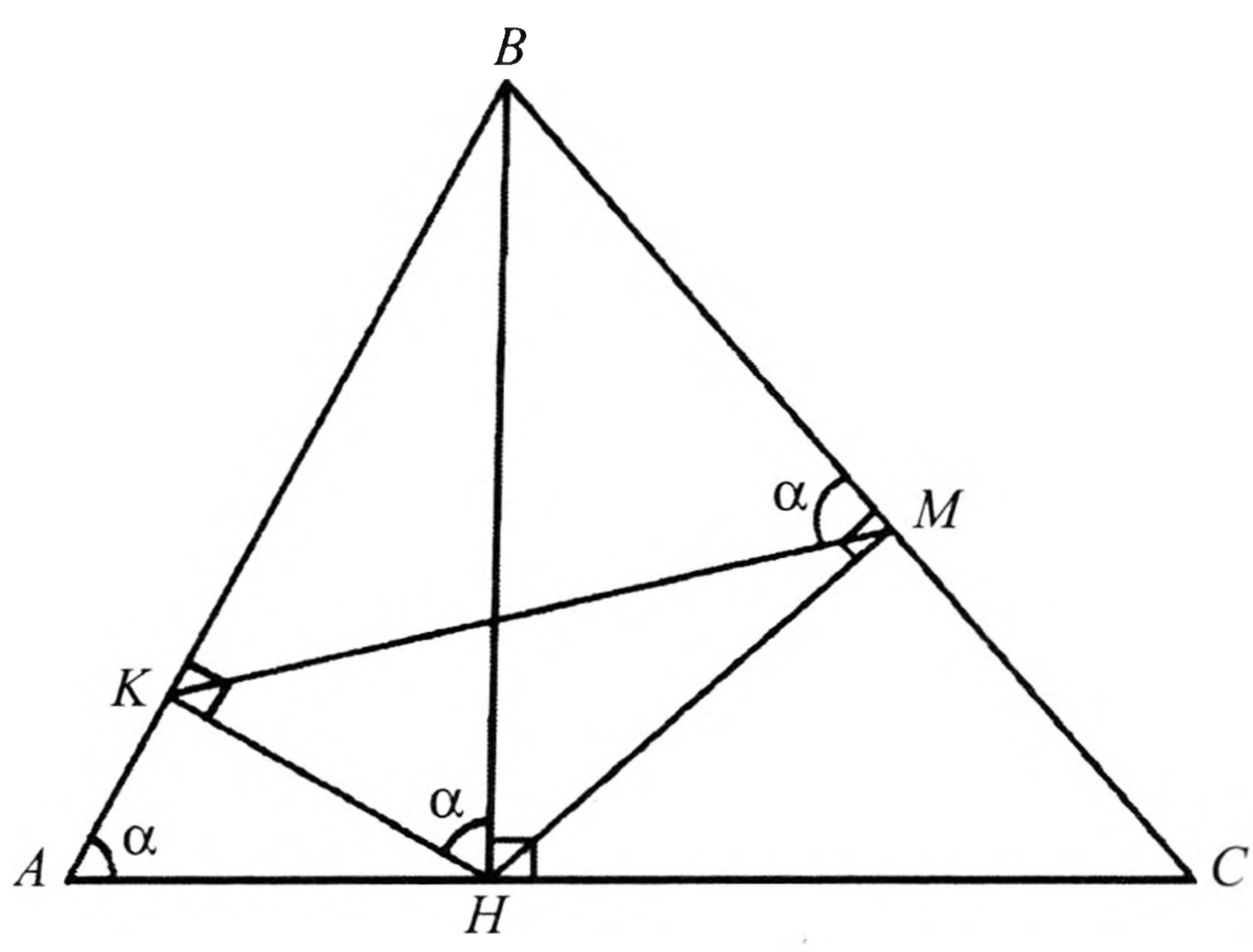
Поэтому $S_{\Delta BQP}=\frac{1}{3}S_{\Delta BDC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.



Решение

а) $\Delta KHB \sim \Delta HAB$ по двум углам ($\angle H$ и $\angle K$ — прямые, $\angle B$ — общий).

Тогда $\angle BAH = \Delta KHB = \alpha$.

Рассмотрим четырехугольник $KBMH$. В нем $\angle K + \angle M = 180°$. Это значит, что вокруг четырехугольника $KBMH$ можно описать окружность. Такая вспомогательная окружность часто оказывается полезной при решении задач. Тогда: $\angle KHB = \angle KMB = \alpha$ (как опирающиеся на одну дугу KB) $\Rightarrow \Delta KBM \sim \Delta CBA$ по двум углам ($\angle B$ — общий).

б) R — радиус описанной окружности треугольника ABC, $R = 4$. Пусть r — радиус описанной окружности треугольника KMB. Поскольку четырехугольник $KBMH$ — вписанный, точка H тоже лежит на этой окружности. Угол HKB — прямой, значит, он опирается на диаметр окружности, описаной вокруг $KBMH$.

$$BH = 2r = 1.$$

Отсюда $r = 0{,}5$.

Треугольники ABC и MBK подобны.

Коэффициент подобия $k = \dfrac{R}{r} = \dfrac{4}{0{,}5} = 8.$

Отношение площадей

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBK}} = k^2 = 64,$$

$$S_{\Delta ABC} = 64 S_{\Delta MBK},$$

$$S_{AKMC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MBK} = 64 S_{\Delta MBK} - S_{\Delta MBK} = 63 S_{\Delta MBK},$$

$$\frac{S_{\Delta MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{1}{63}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{63}$.

Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике

Элементарные функции и их графики

В этой главе мы соберем воедино знания об элементарных функциях и их графиках. Они необходимы даже для решения уравнений и неравенств первой части ЕГЭ. И конечно, в задачах части 2, особенно в задачах с параметрами, без них не обойтись. А если вы выбрали технический или экономический вуз — первая же лекция по матанализу будет посвящена именно элементарным функциями и их графикам.

Но это не все. Математические функции, изучением которых мы занимаемся, — это не что-то такое выдуманное или существующее только в замкнутом пространстве учебника. Они отражают реальные взаимосвязи и процессы, происходящие в природе и обществе.

Существует всего пять типов элементарных функций:

1. **Степенные**.

Это функции вида $y = x^n$. К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$. С ними вы хорошо знакомы.

2. **Показательные**.

Это функции вида $y = a^x$.

3. **Логарифмические** $y = \log_a x$.

4. **Тригонометрические.**

В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

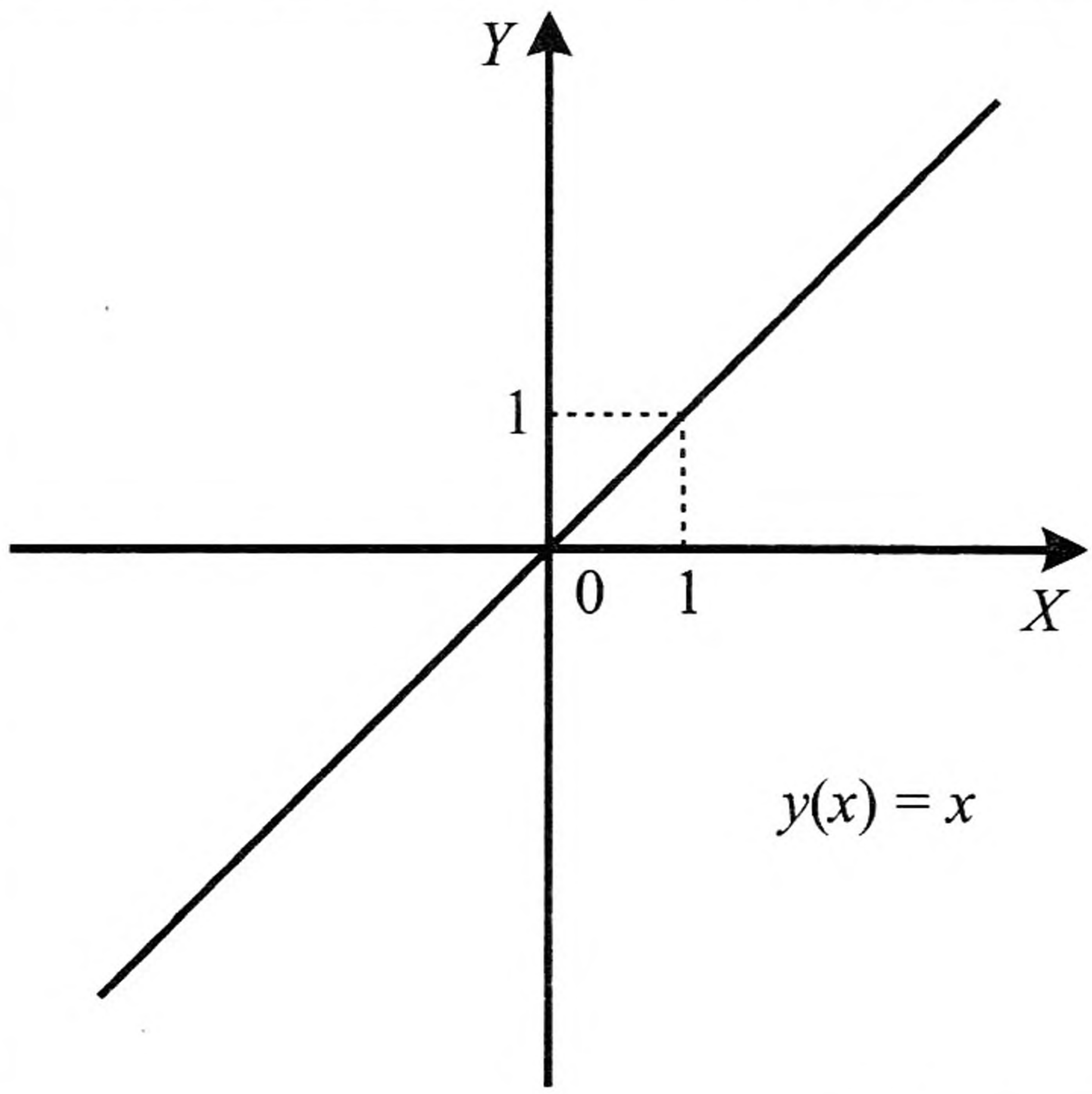
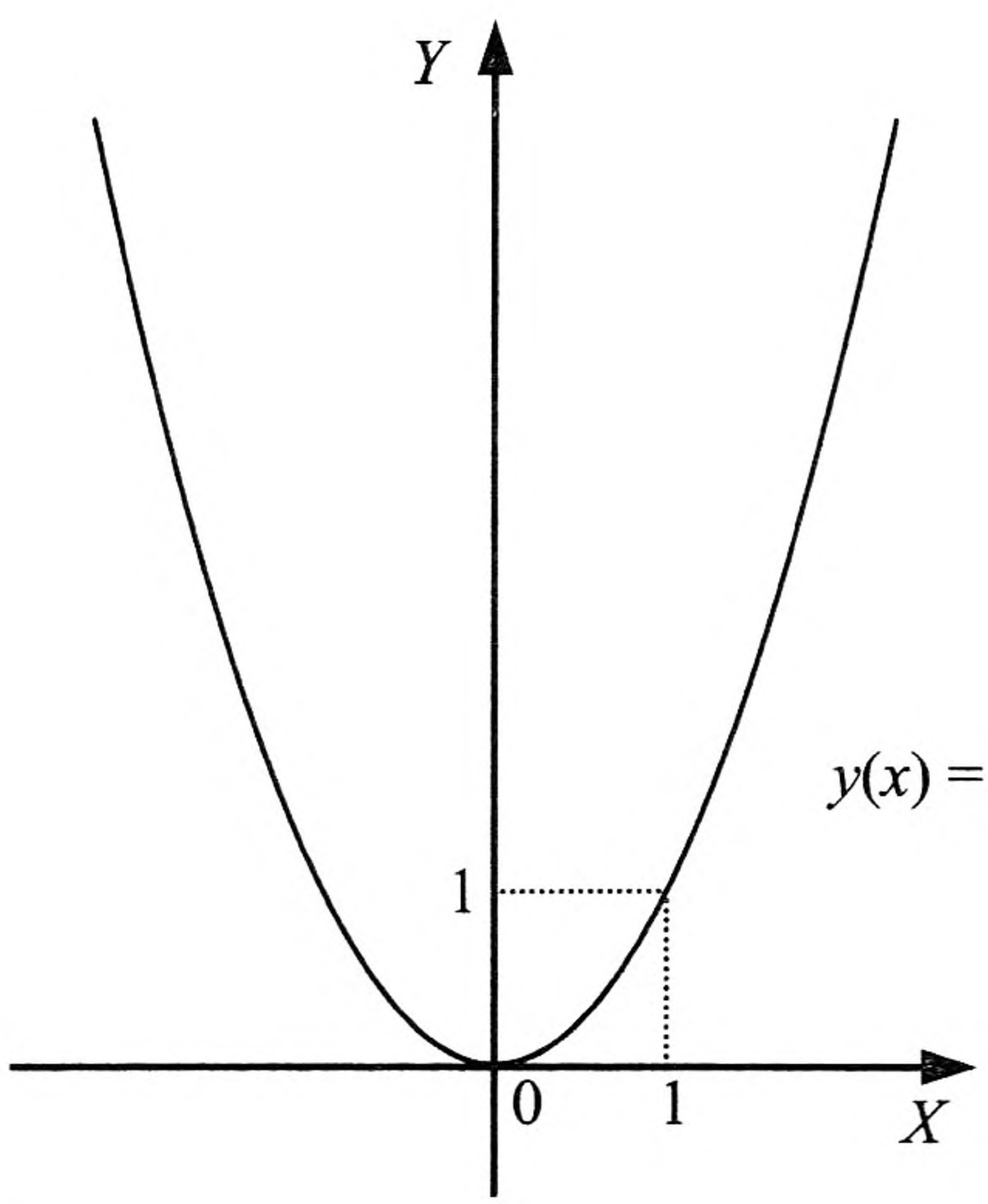
5. **Обратные тригонометрические**. Содержат $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

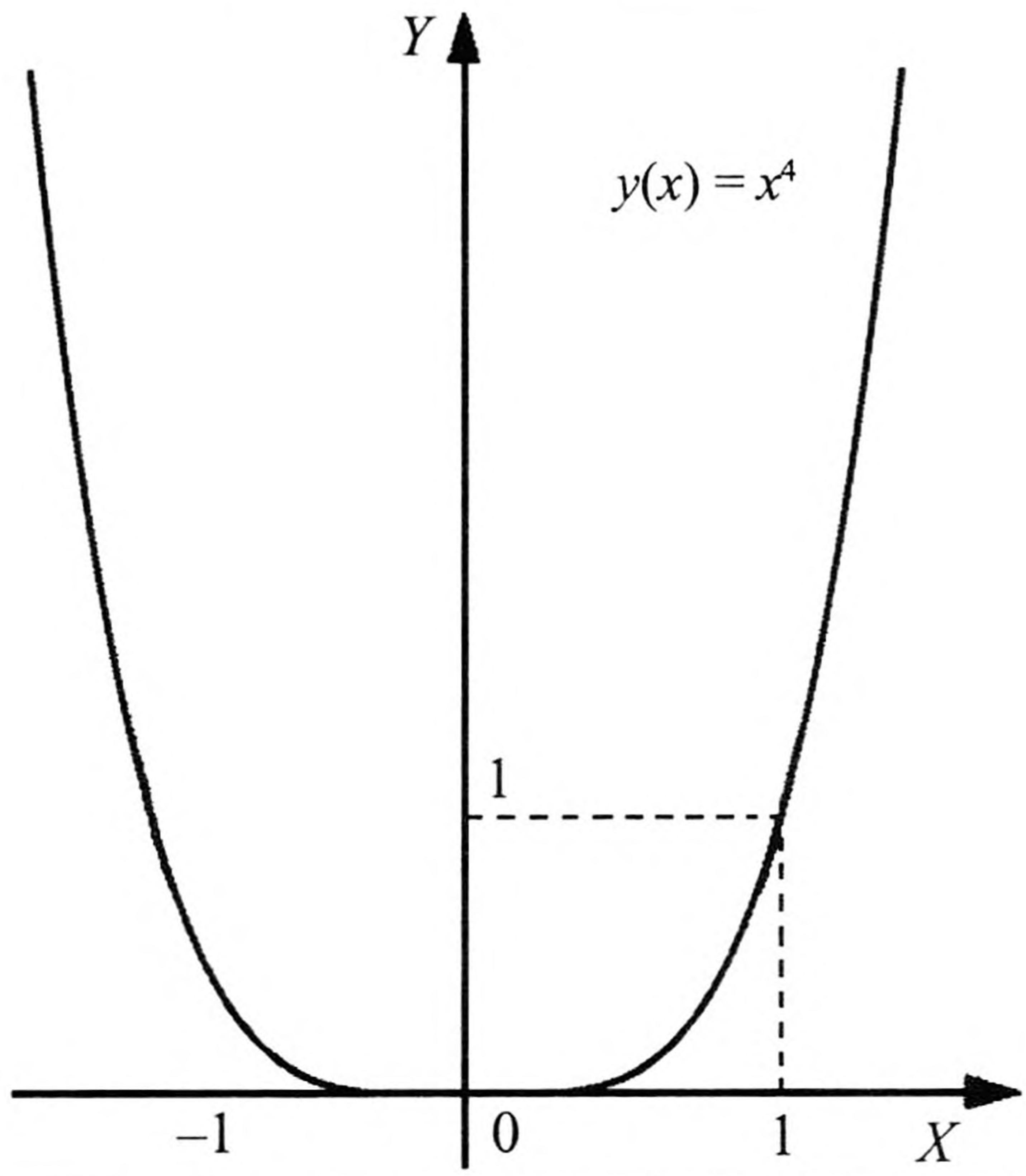
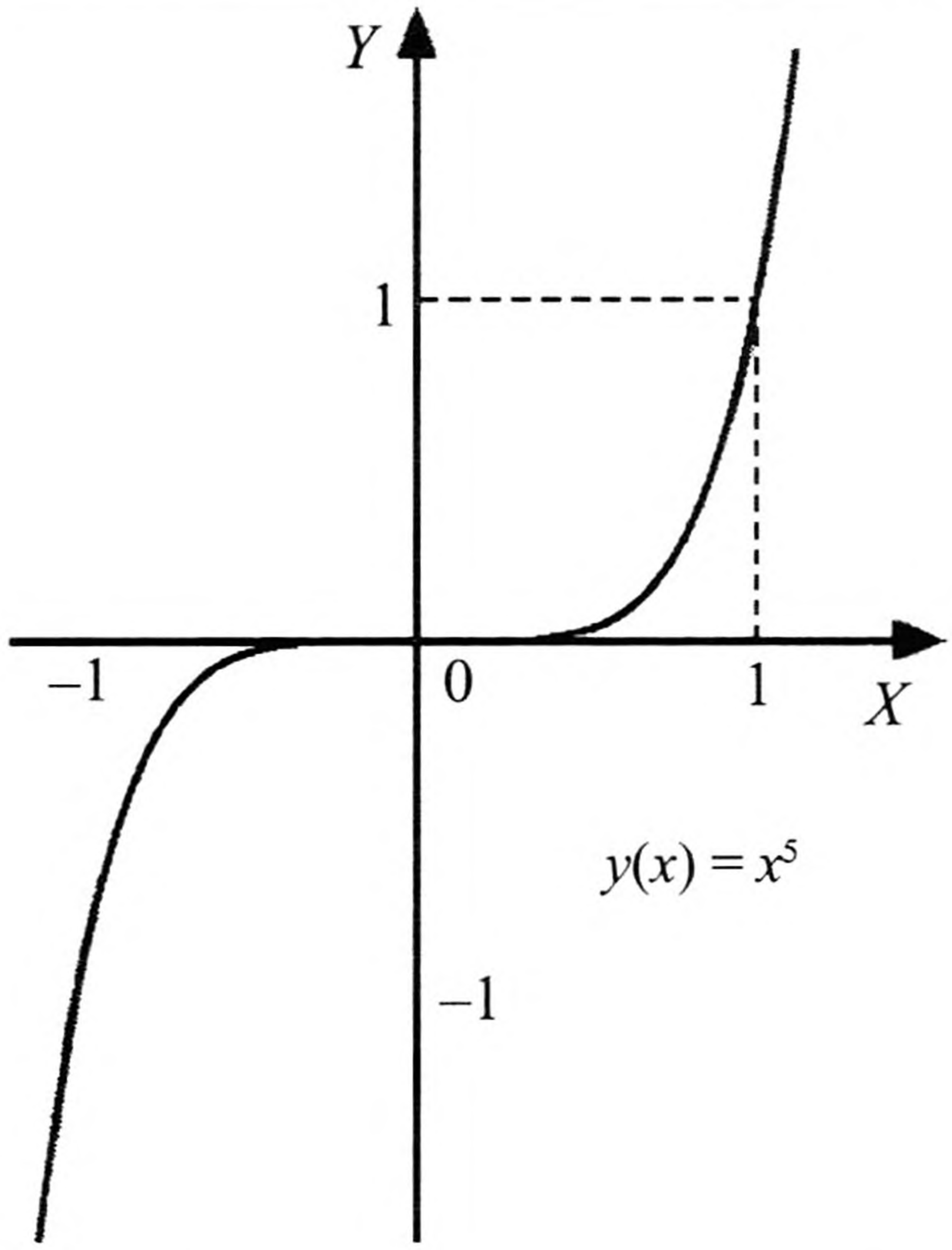
Элементарными все они называются потому, что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2 e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin(a^x)$ — сложная функция, то есть комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

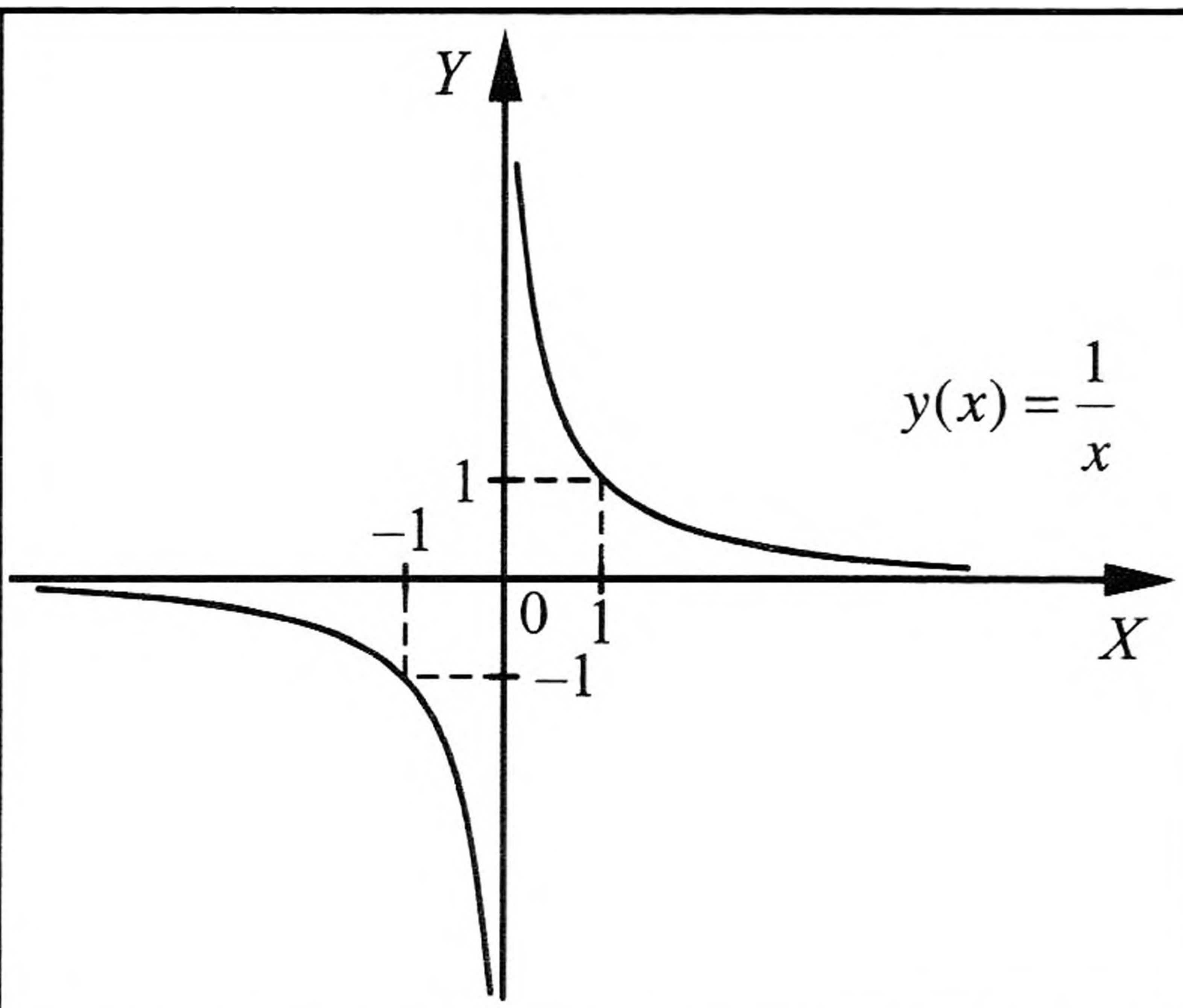
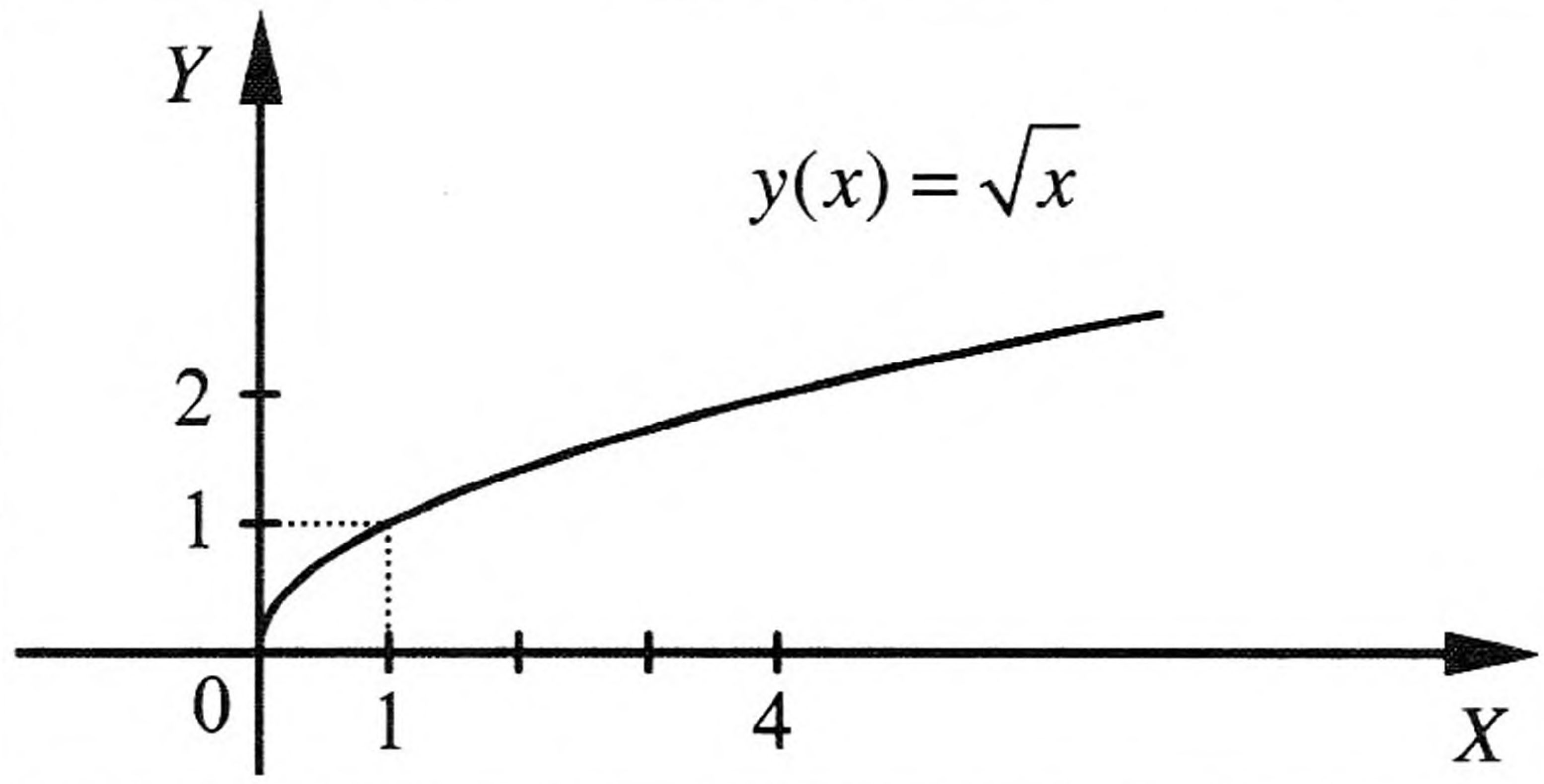
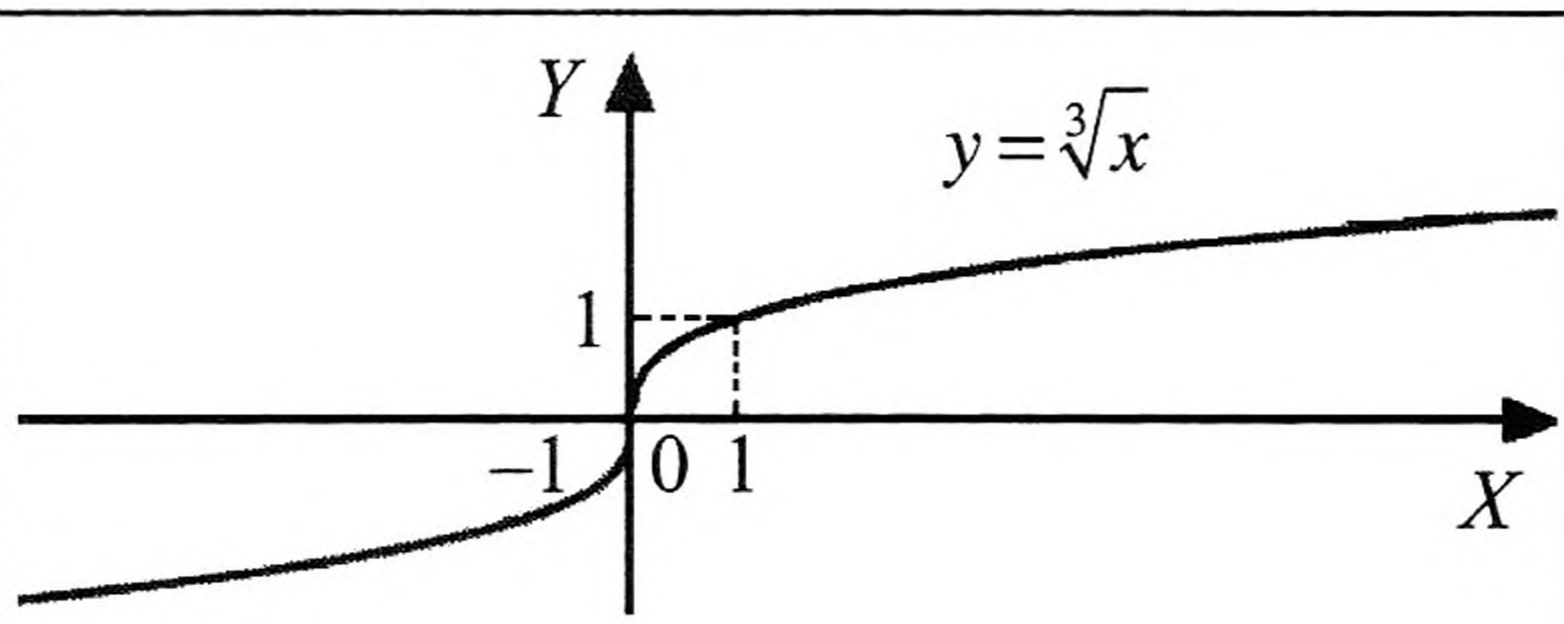
Соберем в одной таблице графики и свойства основных элементарных функций.

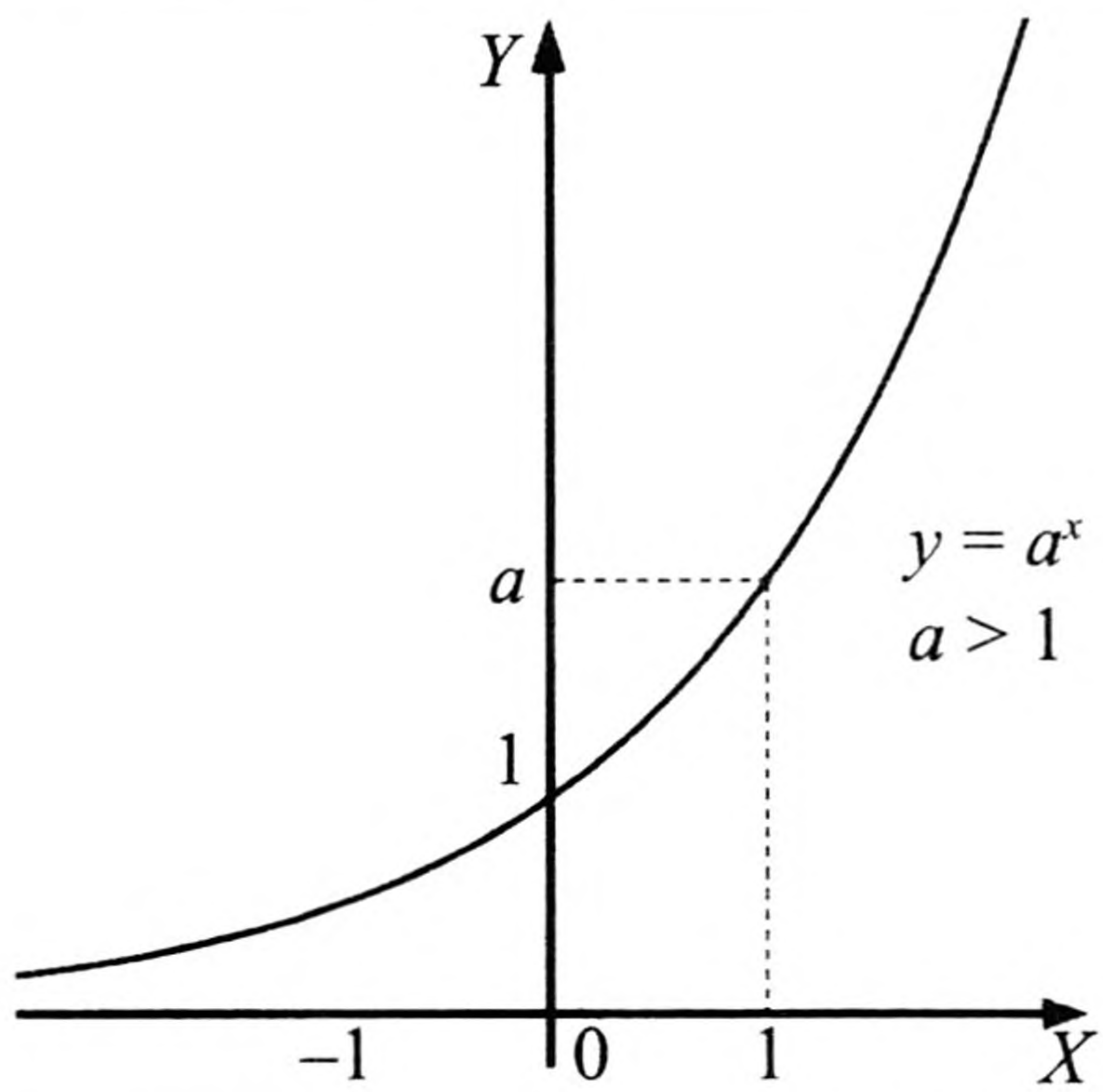
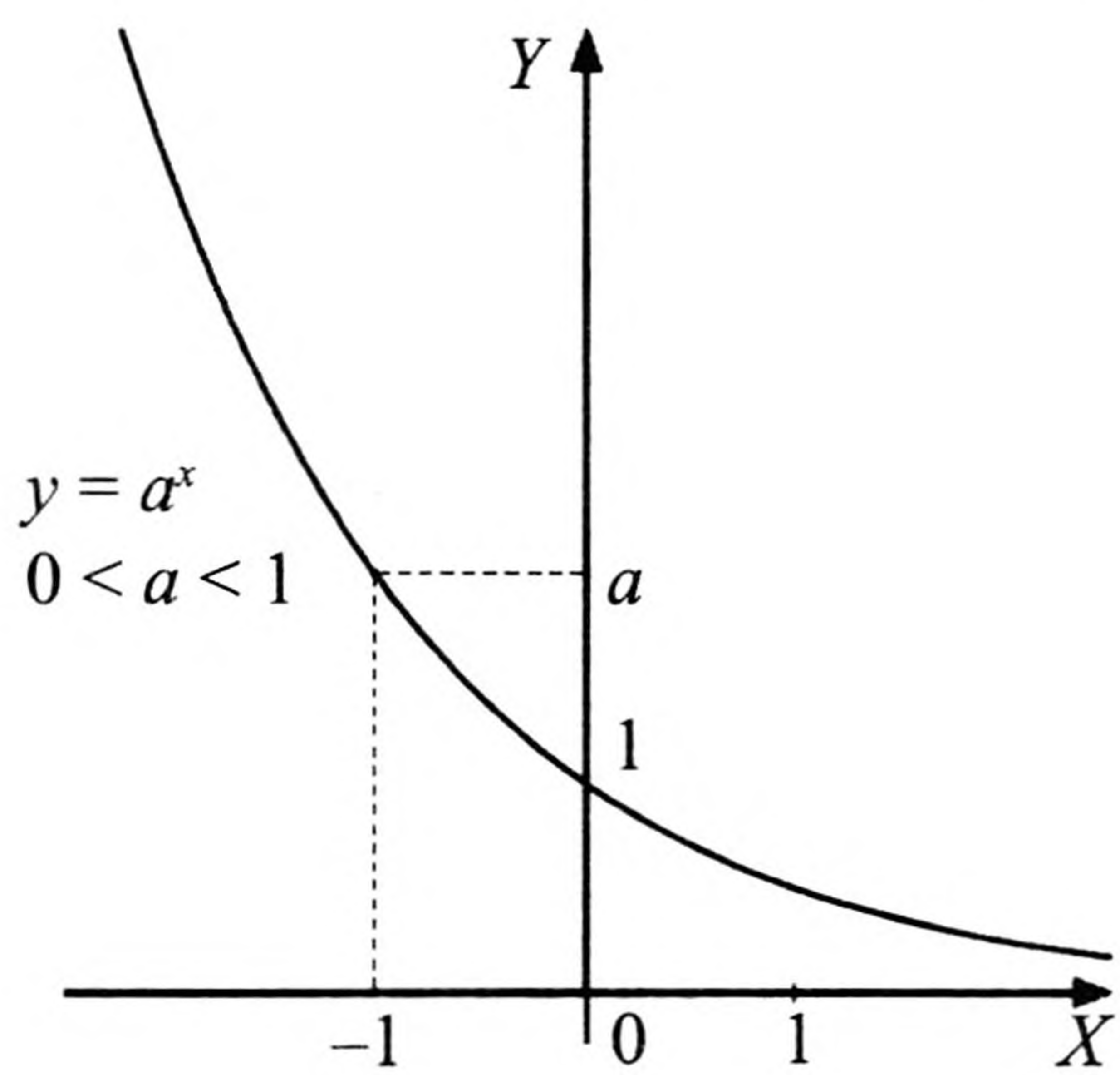
Обратите внимание, что мы приводим самые простые примеры функций каждого типа.

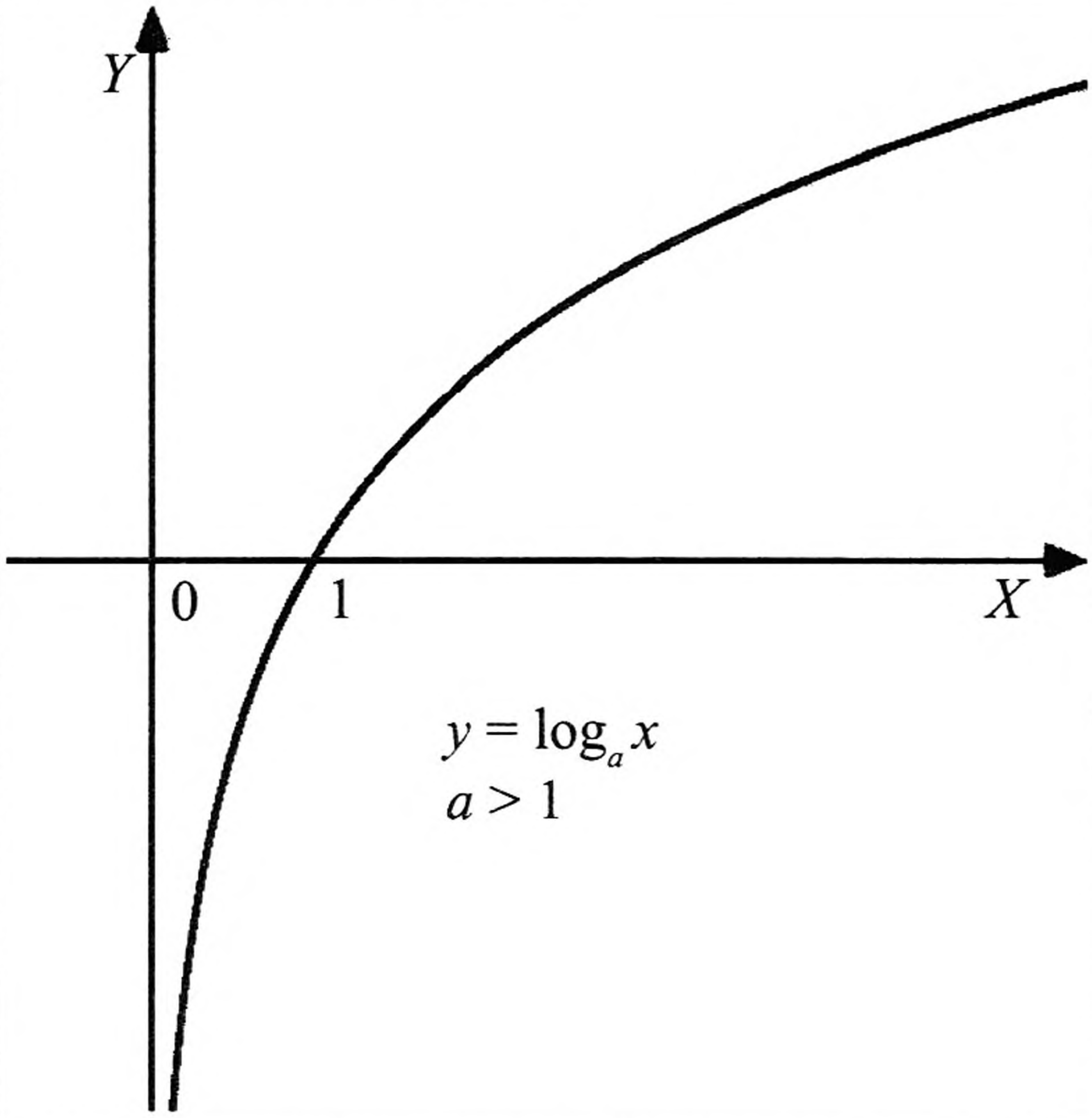
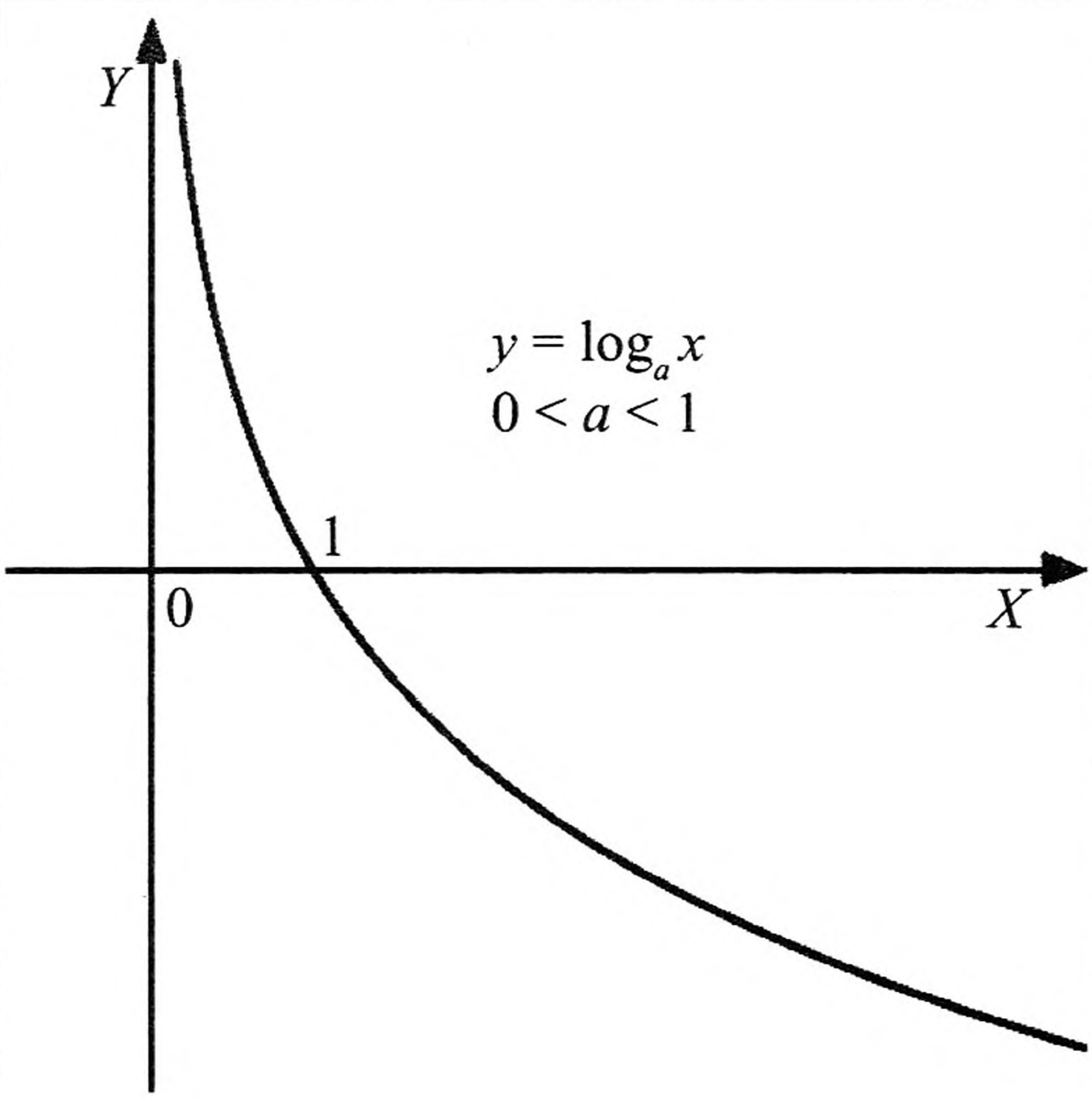
Еще раз проверьте себя. Все ли графики вы помните наизусть и можете нарисовать, не глядя в нашу таблицу?

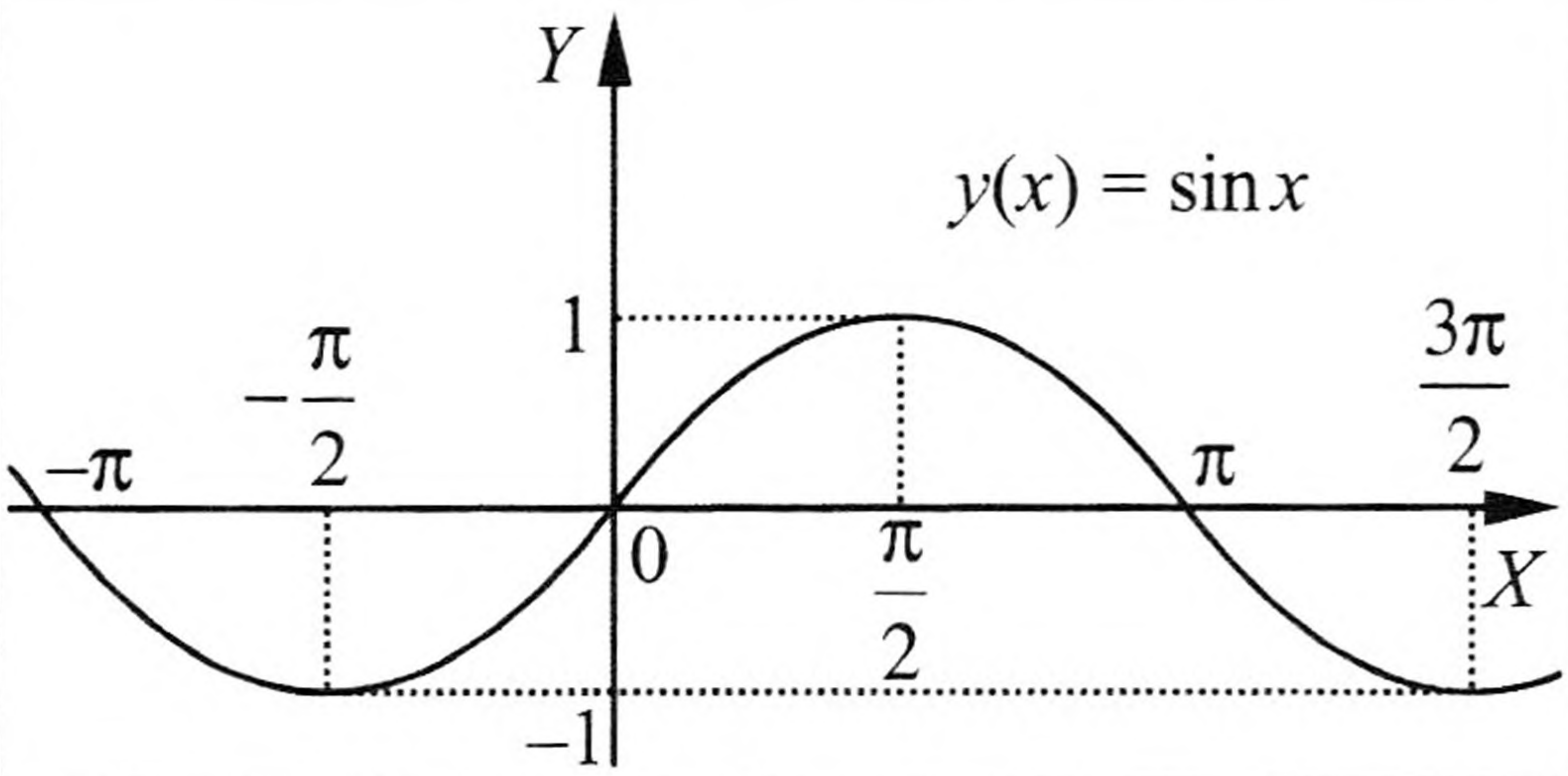
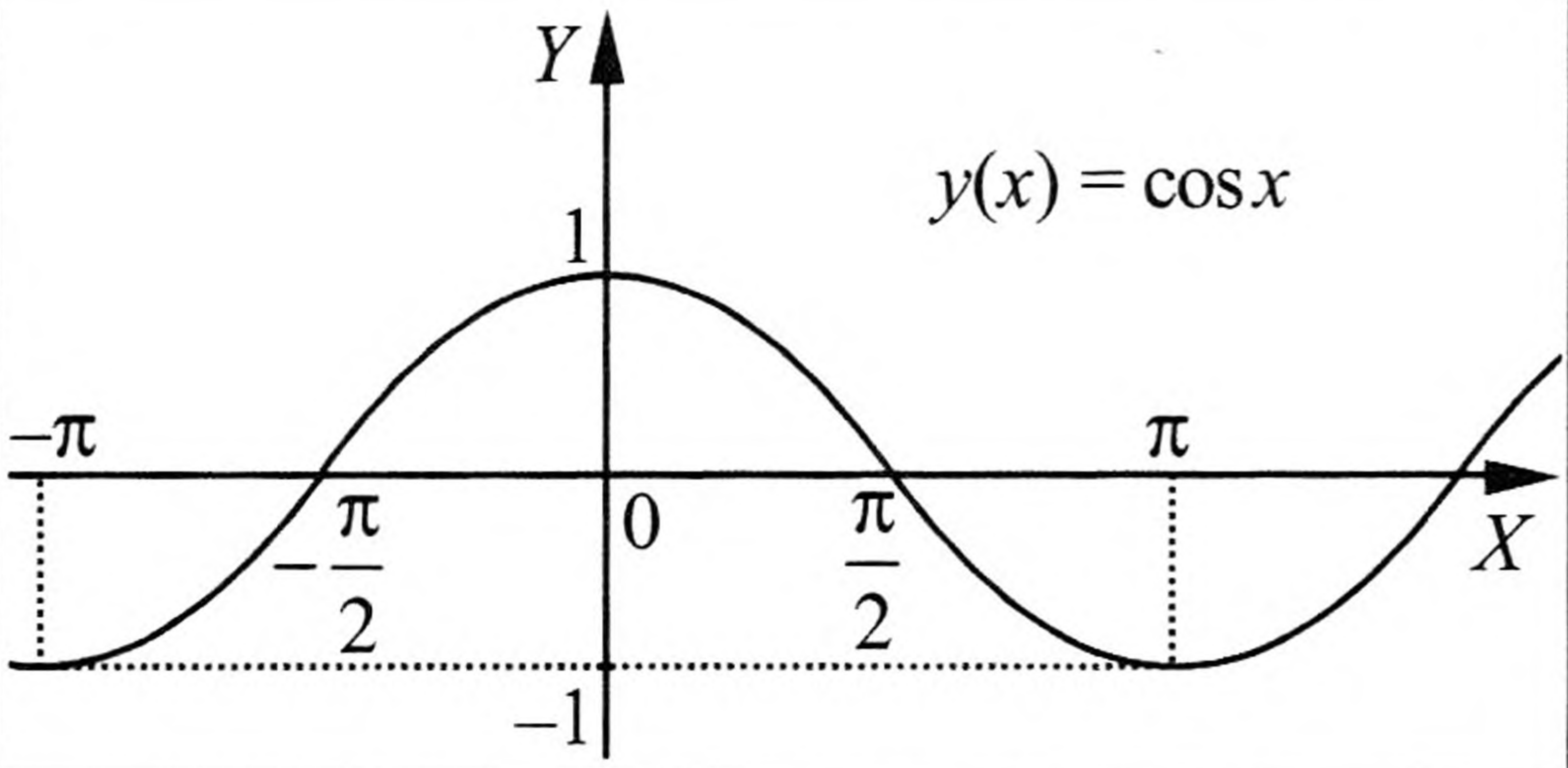
<table>
<tr><th colspan="2">Степенные функции</th></tr>
<tr><td>1. Линейная функция
$y = kx + b$.
Пример: $y = x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Квадратичная парабола
$y = ax^2 + bx + c$.
Пример: $y = x^2$</td><td>
</td></tr>
</table>

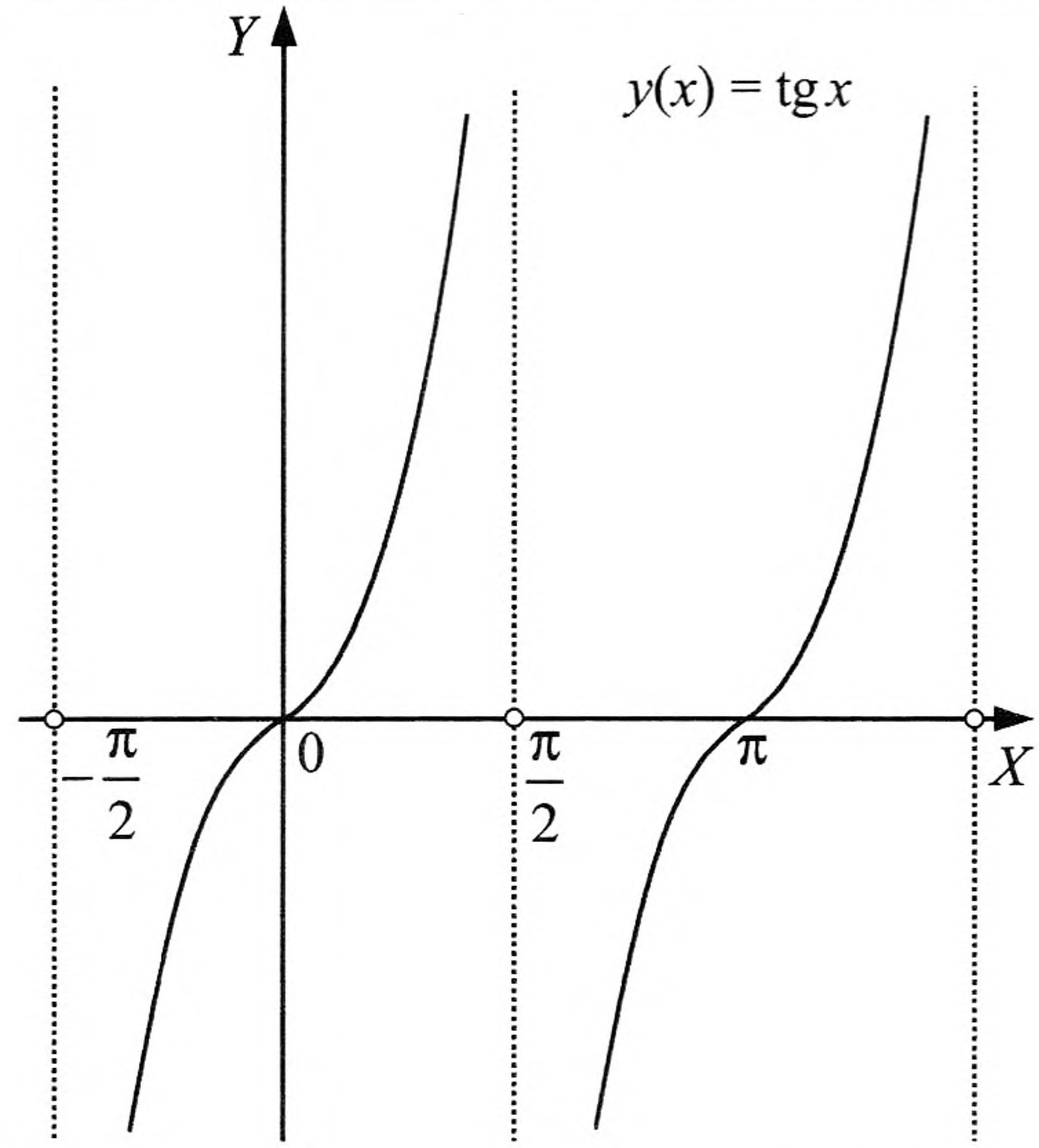
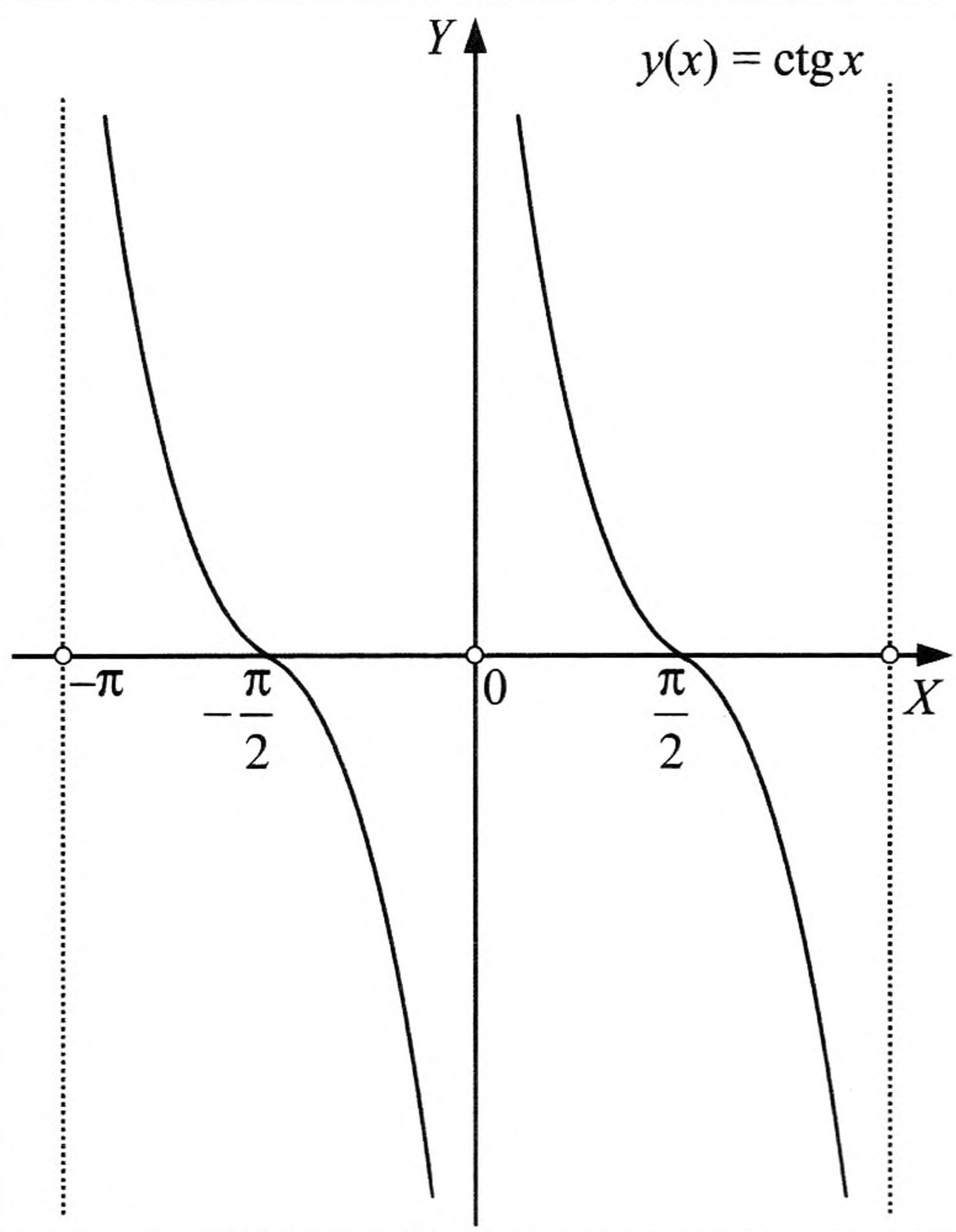
3. Функция $y = x^n$, n — натуральное, $n > 1$ n — четное $n = 2, 4, 6, \ldots$	
n — нечетное $n = 3, 5, 7, \ldots$	

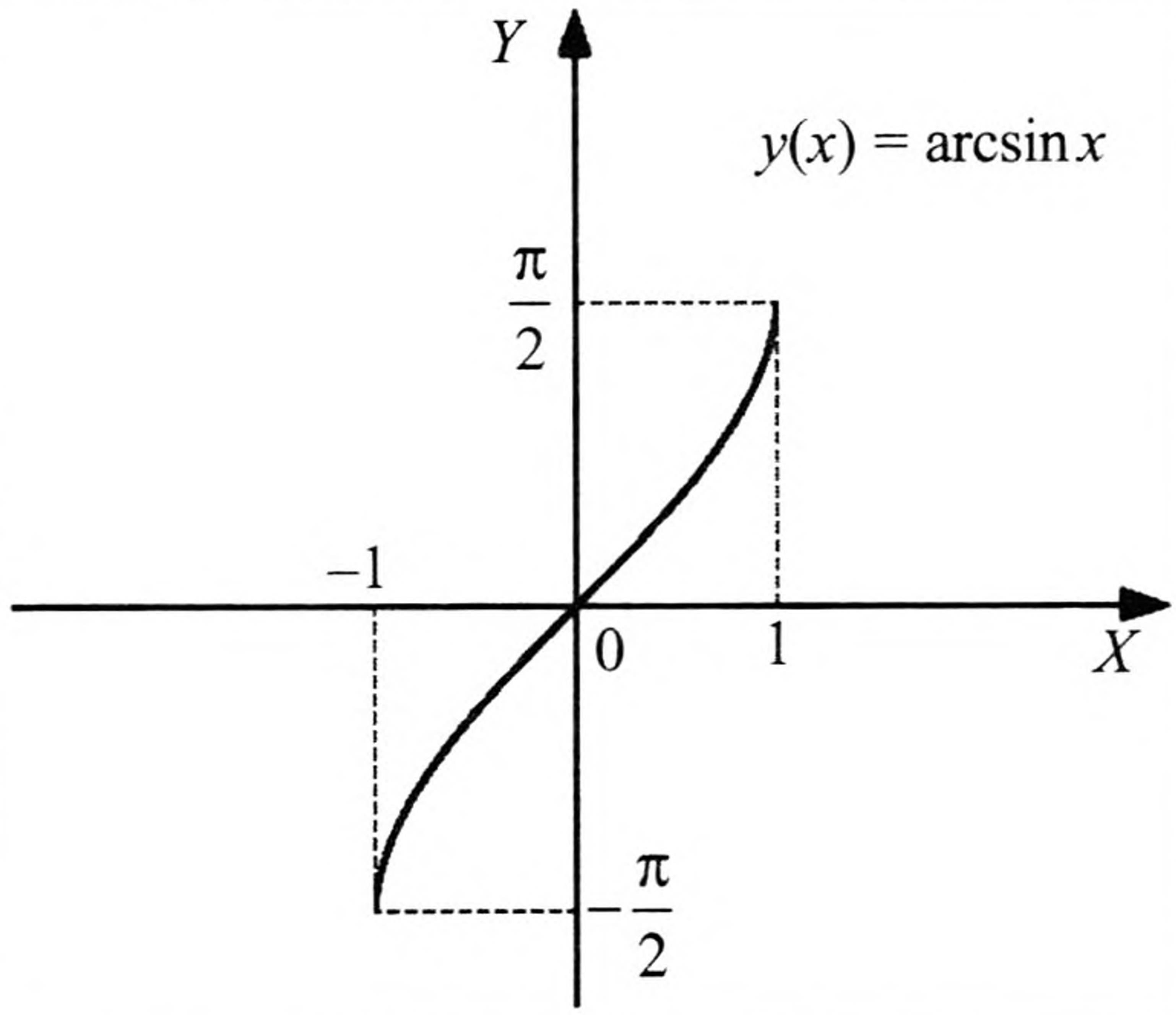
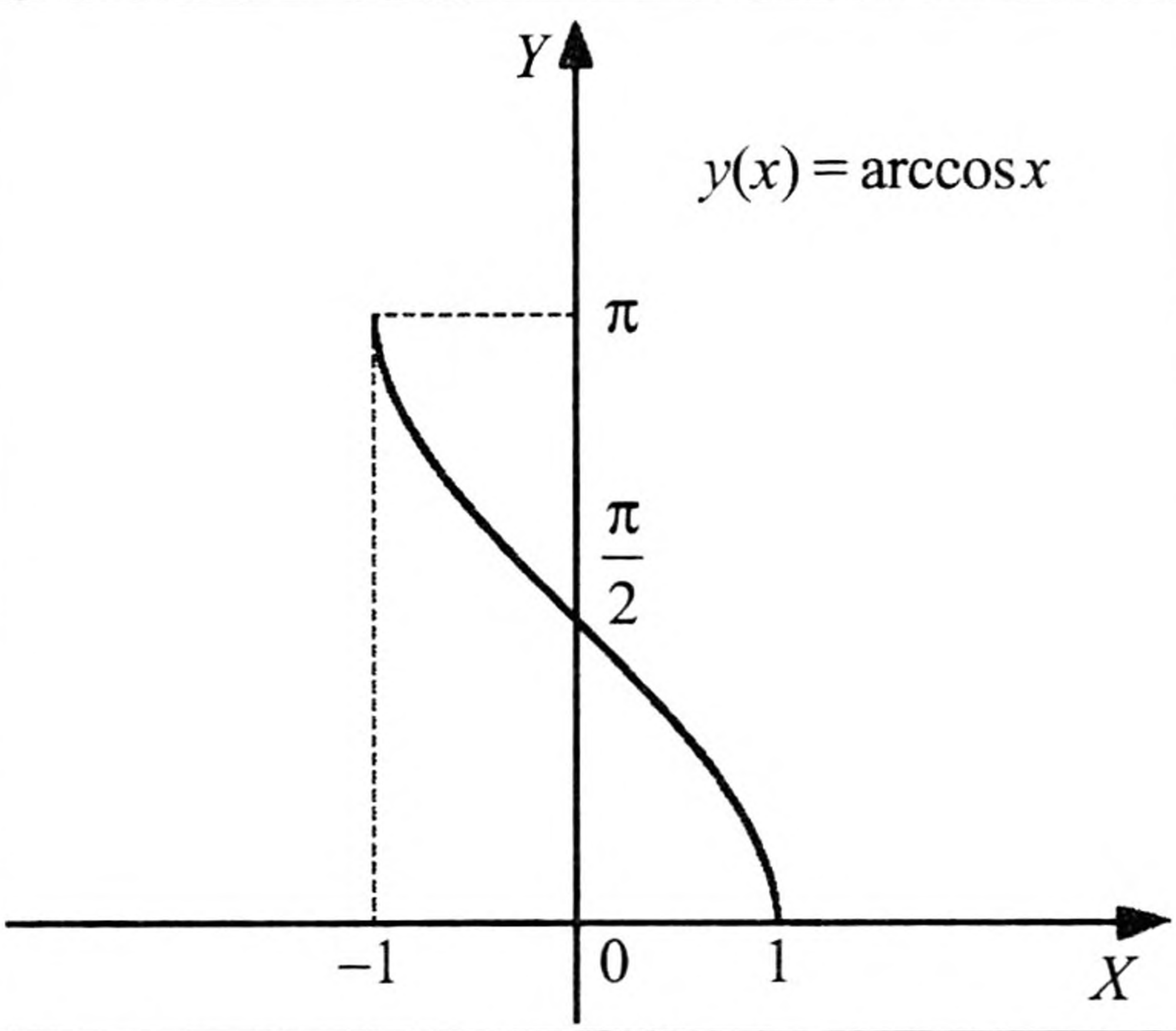
4. Гипербола $y=\dfrac{k}{x}$. Пример $y=\dfrac{1}{x}$	
5. $y=\sqrt{x}$	
6. $y=\sqrt[3]{x}$	

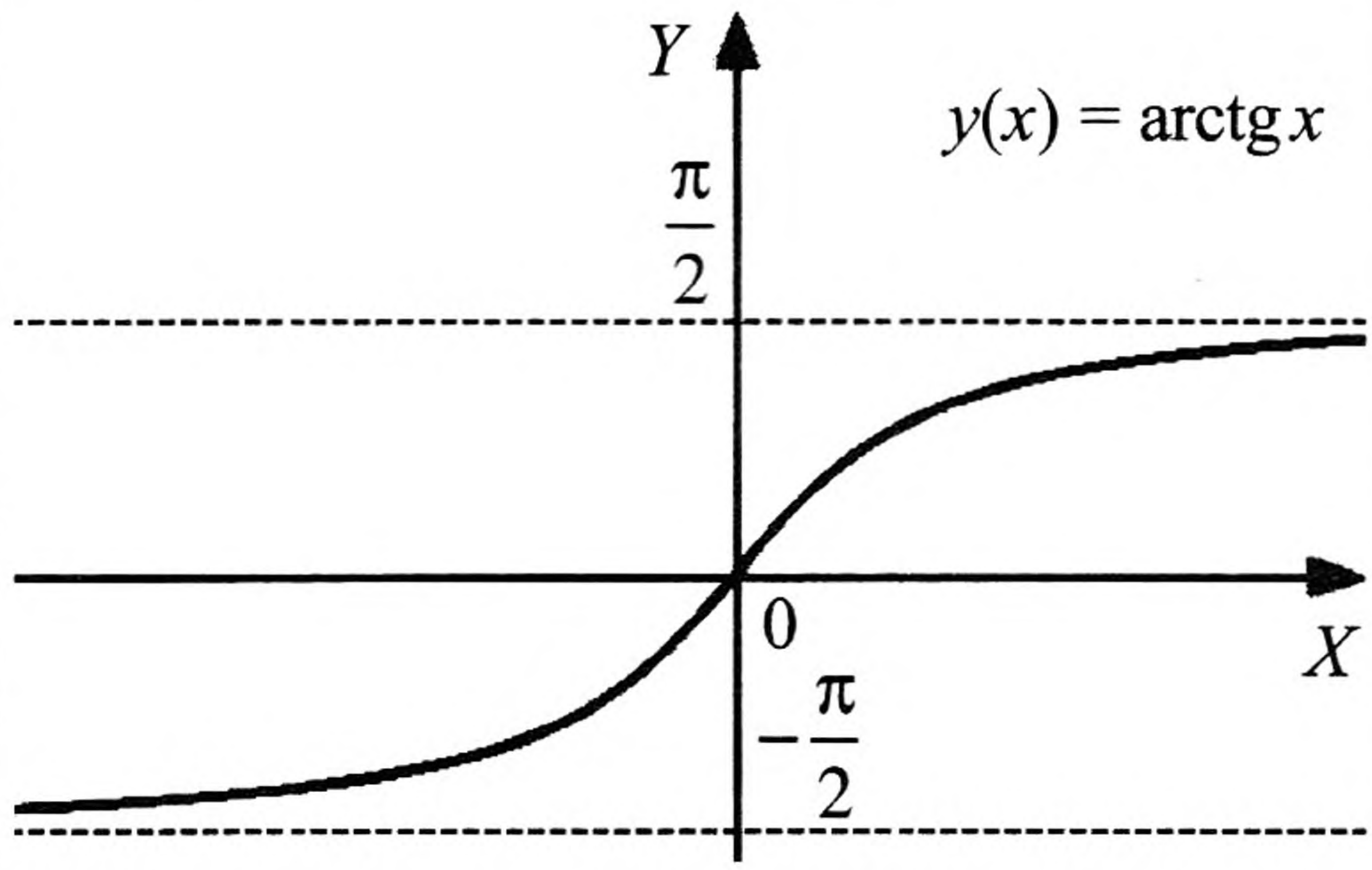
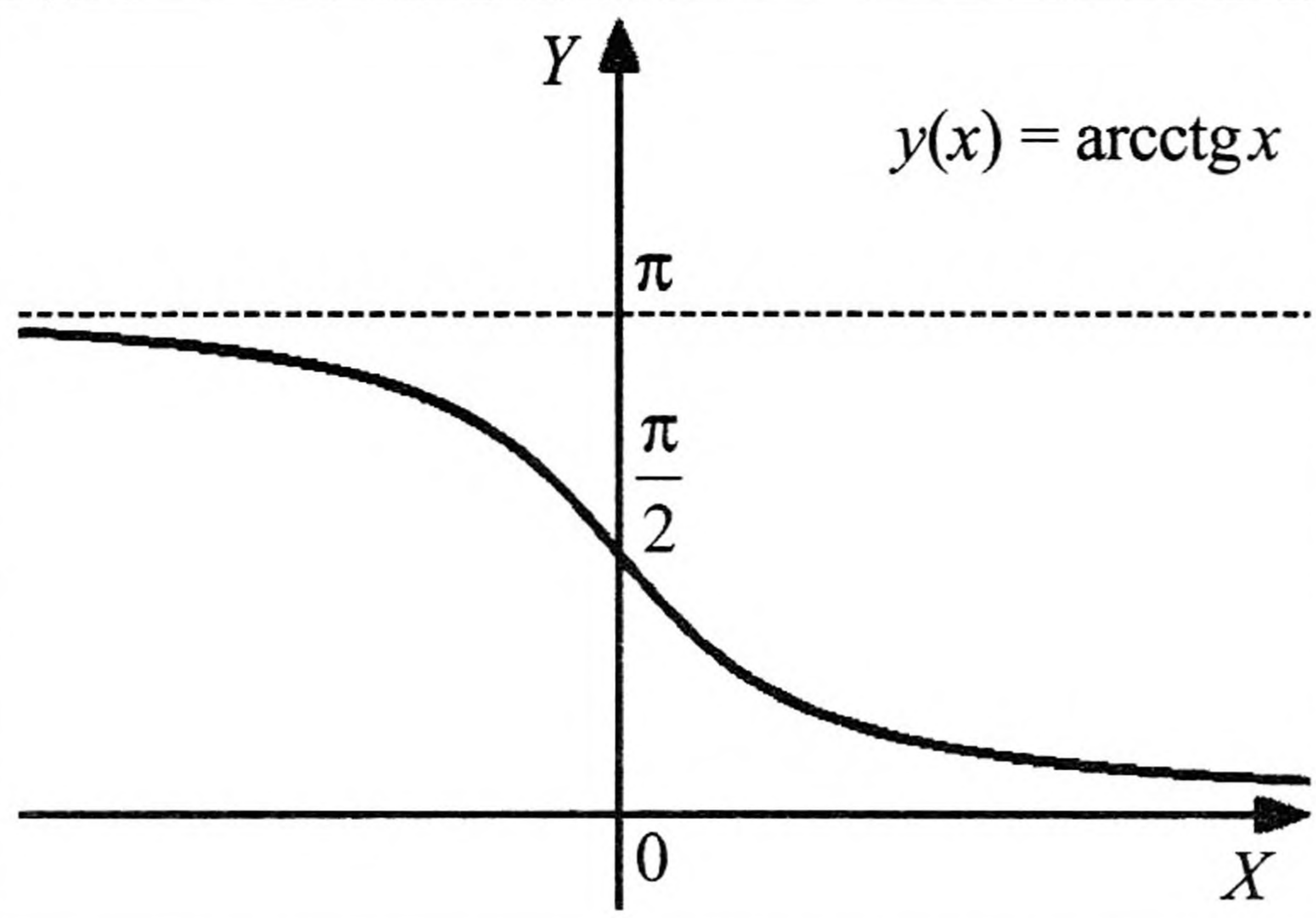
<table>
<tr><th colspan="2">Показательная функция</th></tr>
<tr><td>$y = a^x$
$a > 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y = a^x$
$0 < a < 1$</td><td></td></tr>
</table>

Логарифмическая функция	
$y = \log_a x$ $a > 1$	
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$	

Тригонометрические функции	
$y = \sin x$	
$y = \cos x$	

$y = \operatorname{tg} x$	
$y = \operatorname{ctg} x$	

Обратные тригонометрические функции	
$y = \arcsin x$	
$y = \arccos x$	

$y = \operatorname{arctg} x$	
$y = \operatorname{arcctg} x$	

Здесь приведены основные, «базовые» графики. А как будут выглядеть, например, графики функций $y = \sin(2x)$ или $y = 4x^2 + 5$? Об этом — в главе «Преобразования графиков функций».

Обратите внимание: уравнения, которые вы решаете, обычно относятся к одному из этих пяти типов. И для каждого типа есть свои способы решения. Мы подробно рассматривали методы решения показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений. Теперь понятно, почему: они основаны на тех или иных свойствах функций.

Почему в уравнении $3^x = 3^5$ мы можем «отбросить» основания и записать, что $x = 5$? Да потому что показательная функция $y = 3^x$ возрастает и каждое значение принимает только один раз.

Почему уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много решений, которые записываются в виде серии:

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где n — целое? Потому что функция $y = \sin x$ — периодическая, то есть каждое свое значение принимает бесконечно много раз.

Зная графики элементарных функций, вы уже не запутаетесь с ОДЗ уравнений и неравенств. Вы сможете решать сложные задачи графически — а это часто во много раз легче и быстрее, чем аналитически.

Есть еще и такие уравнения, где слева и справа стоят функции разных типов. Для их решения применяется графический способ, а также метод оценки.

Метод оценки

Сейчас мы рассмотрим мощный метод, который применяется, когда в левой и правой частях уравнения или неравенства стоят функции разных типов. Для того чтобы лучше его запомнить, расскажем историю о том, как птичка и рыбка полюбили друг друга.

1. Рассмотрим уравнение

$$2^{\left(\sqrt{3}-\cos 10\pi x\right)\left(\sqrt{3}+\cos 10\pi x\right)} = 8 + (20x+3)^2.$$

Оно отлично подходит для первого знакомства с методом оценки — конечно, если вы уже уверенно решаете алгебраические, тригонометрические и показательные уравнения.

Что делать с этим уравнением? Конечно же, упростим его. Сделаем те преобразования, которые можно сделать сразу.

$$2^{\left(\sqrt{3}-\cos 10\pi x\right)\left(\sqrt{3}+\cos 10\pi x\right)} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$2^{3-\cos^2 10\pi x} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi x}} = 8 + (20x+3)^2.$$

Смотрим внимательно. В левой и правой части появились восьмерки. И это добрый знак!

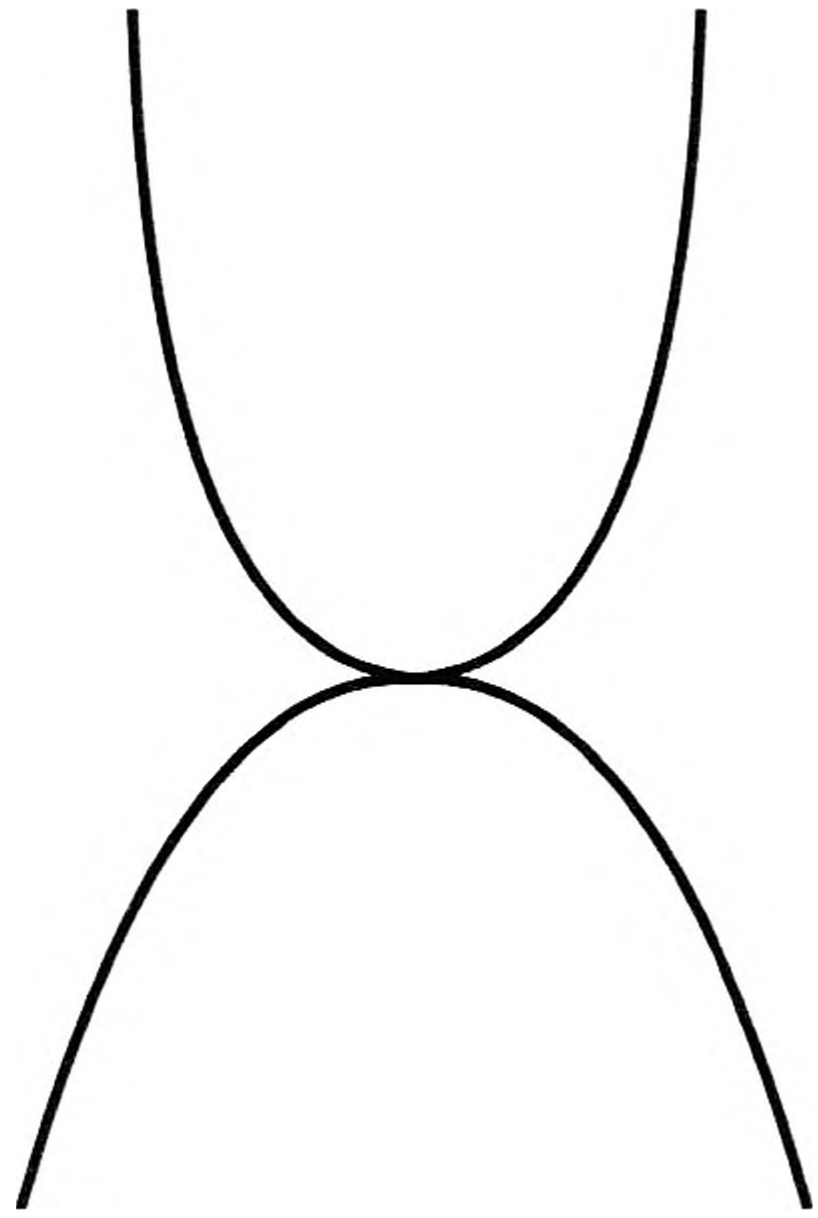
Дело в том, что перед составителями заданий второй части ЕГЭ стоит нетривиальная задача: с одной стороны, им надо составить сложные задания. С другой — сделать так, чтобы подготовленный школьник (такой, как вы) все же смог их решить.

Поэтому в сложных задачах части часто оставляют «подсказки» — специально для вас, дорогие друзья! Торчащие ниточки, хвостики, за которые, как в детективном сюжете, можно потянуть и распутать весь клубок. Например, вы вдруг замечаете, что одна из частей уравнения является полным квадратом. Или видите одинаковые коэффициенты в левой и правой частях, что наводит на мысль об удачной замене. А в данном уравнении подсказка — вот эти восьмерки слева и справа.

В левой и правой частях нашего уравнения находятся функции разных типов. Это уравнение бесполезно возводить в квадрат или делать с ним арифметические действия. Бесполезно брать логарифмы от обеих частей — от всего этого оно станет только хуже.

Метод оценки применяется для уравнений и неравенств, где функции, стоящие в левой и правой части, могут быть равны друг другу только в определенной точке, причем одна из них принимает в этой точке наименьшее значение, а другая — наибольшее.

Вот как это выглядит:



А чтобы лучше запомнить суть метода, рассказываем историю.

Глубоко-глубоко в море жила маленькая рыбка. А высоко-высоко в небе жила маленькая птичка. И однажды они полюбили друг друга! А встретиться они могли только в одной точке, на границе моря и неба, до которой рыбке надо подняться, а птичке — спуститься!

О чем эта история? О нашем уравнении, конечно! В левой и правой его частях находятся функции разных типов. И при определенном значении x они оказались равны друг другу. Легко заметить, что значения выражения в левой части всегда больше либо равны восьми («птичка»), значения выражения в правой части — меньше либо равные восьми («рыбка»). И возможно, есть такая точка, где у одной из этих функций будет минимум, а у другой — максимум, причем значение каждой из них станет равно восьми.

Нам осталось только проверить, что эта точка действительно есть. Приравняем правую часть к восьми.

$$8+(20x+3)^2=8;$$

$$(20x+3)^2=0;$$

$$x=-\frac{3}{20}=-0,15.$$

Подставив $x=-0,15$ в левую часть, получим, что и она равна восьми при этом значении x. Значит, $x=-0,15$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: $x=-0,15$.

2. Вот еще одна задача на метод оценки.

$$7^{-|x-3|}\cdot\log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 1.$$

Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $7^{|x-3|}$:

$$\log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 7^{|x-3|}.$$

В левой и правой частях полученного неравенства оказались функции разных типов. Метод оценки!

Выделим под логарифмом полный квадрат:

$$6x-x^2-7=2-\left(x^2-6x+9\right)=2-(x-3)^2.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2\left(2-(x-3)^2\right) \geq 7^{|x-3|}.$$

Наибольшее значение выражения под логарифмом равно 2. Стало быть, наибольшее значение логарифма равно $\log_2 2$, то есть 1, и достигается оно при единственном значении $x = 3$.

В то же время, наименьшее значение выражения $7^{|x-3|}$ также равно 1, и достигается оно при том же единственном значении $x = 3$.

Поэтому последнее неравенство будет выполнено лишь в одном-единственном случае: когда обе его части равны 1, т. е. при $x = 3$. Решением данного неравенства служит единственное число!

Ответ: $x = 3$.

Кратко повторим основные тезисы этой главы:

1. В сложных задачах части 2 вариантов ЕГЭ чаще всего специально для вас оставляют подсказки. Учитесь ими пользоваться!
2. Если в левой и правой частях уравнения находятся функции разных типов — значит, это уравнение надо решать либо графически, либо методом оценки.
3. Как правило, здесь находится единственное значение x, при котором левая и правая части равны друг другу.

Преобразование графиков функций

Покажем, как на основе графика какой-либо элементарной функции построить графики более сложных функций.

Взяв обычную параболу или синусоиду, можно сдвинуть ее вправо, влево, вверх или вниз, растянуть ее или сжать по горизонтали, а также по вертикали. Можно еще отразить ее относительно оси X или оси Y. **С графиком функции мы можем сделать те же действия, что и с изображением в Фотошопе или другом графическом редакторе!**

И все эти преобразования определенным образом задаются в формуле функции.

1. Сдвиг графика по горизонтали.

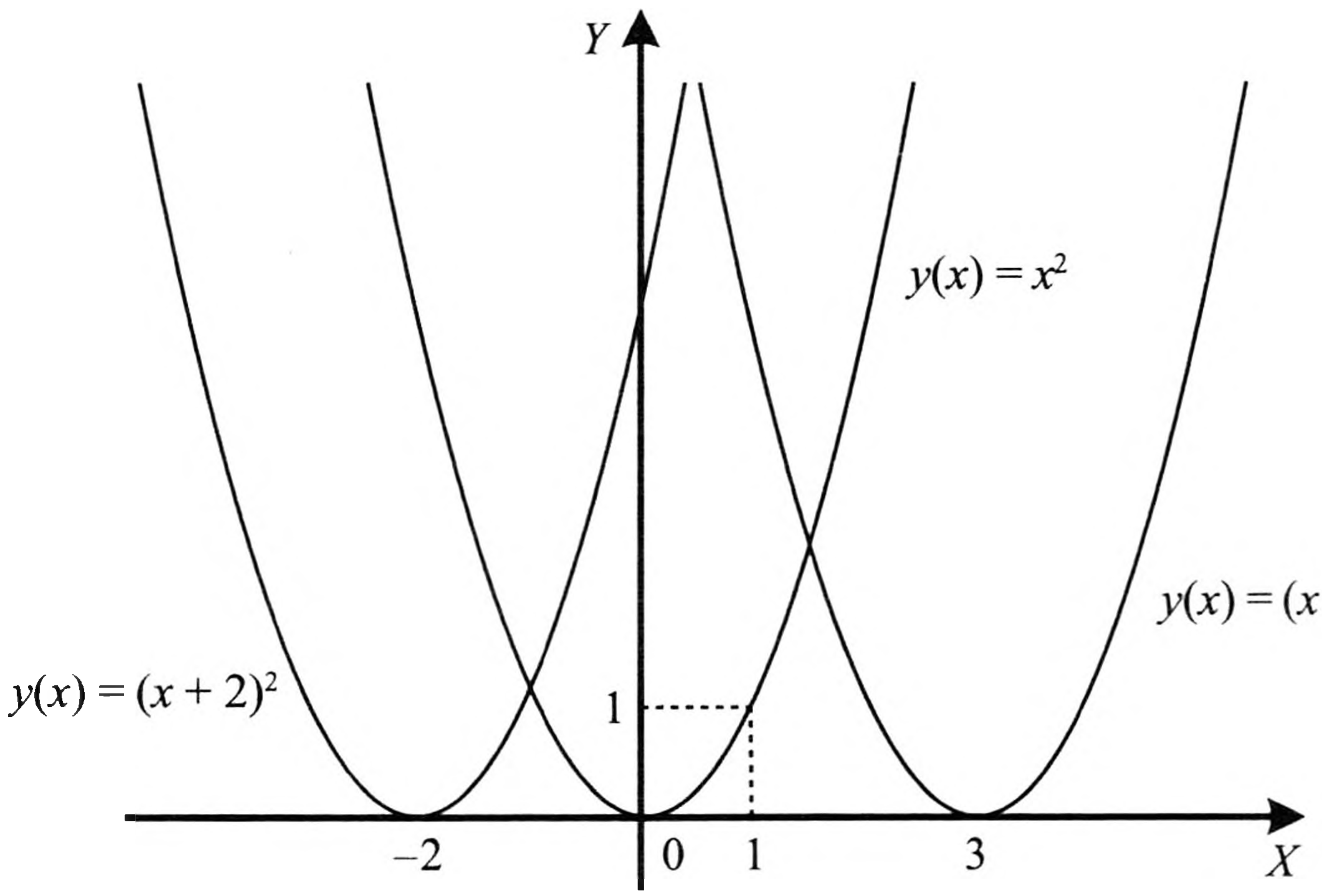
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ будет сдвинут относительно исходного на a вправо. График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходного на a влево.

На рисунке изображены графики трех функций.

$y = x^2$. Знакомая нам парабола, симметричная относительно оси Y.

$y = (x - 3)^2$. Такая же квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вправо.

$y = (x + 2)^2$. Такая же парабола, сдвинутая на 2 влево.



2. Сдвиг графика по вертикали.

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и A — некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x) + A$ будет сдвинут относительно исходного на A вверх. График функции $y = f(x) - A$ сдвинут относительно исходного на A вниз.

Посмотрим на рисунок.

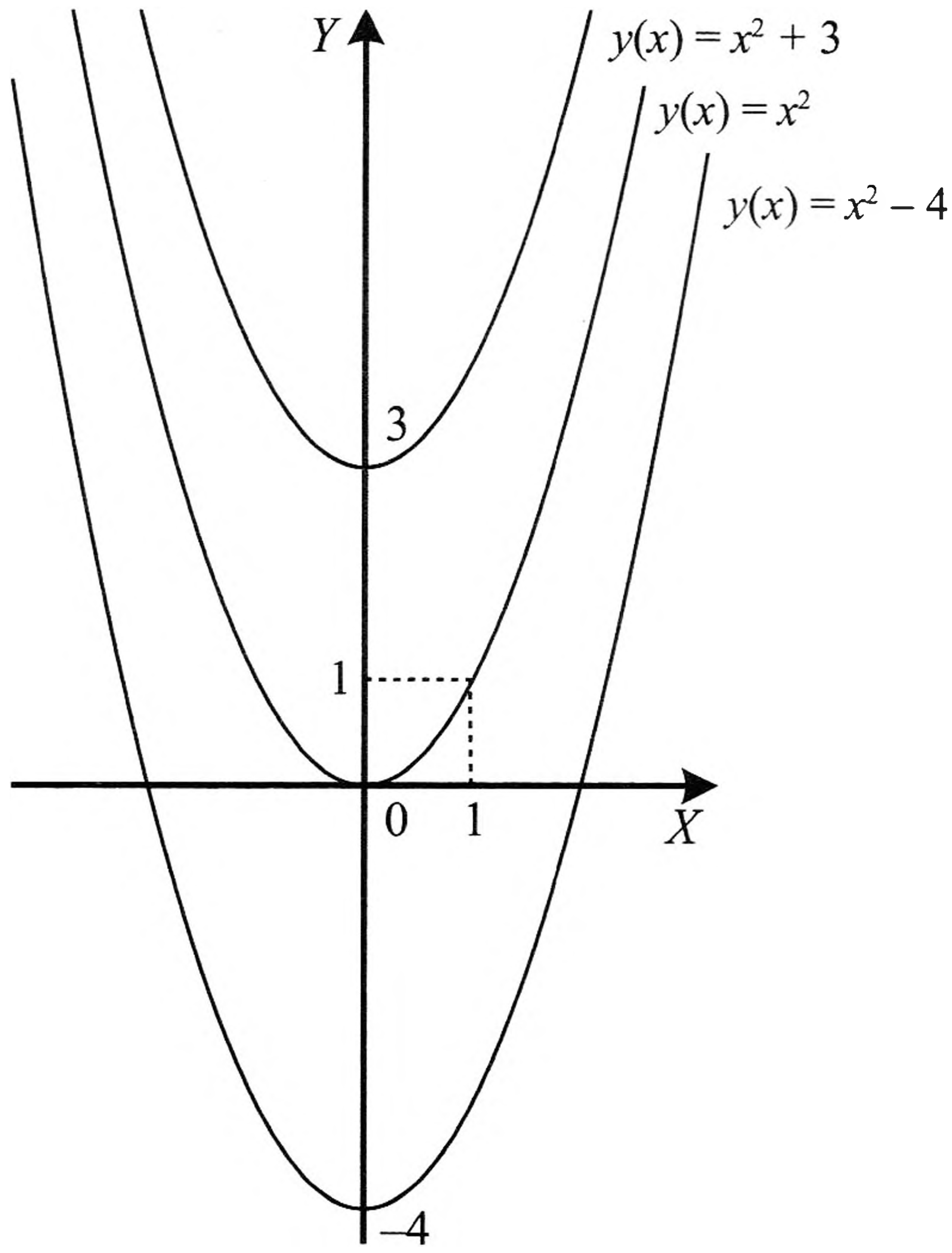
$y = x^2$. Обычная парабола.

$y = x^2 + 3$. Квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вверх.

$y = x^2 - 4$. Квадратичная парабола, сдвинутая на 4 вниз.

Как вы думаете, в чем разница между этим преобразованием и тем, которое мы рассмотрели в пункте 1?

Разница в порядке действий!



Строя график функции $y = (x - 3)^2$, мы сначала вычисляем $x - 3$, потом возводим результат в квадрат. График этой функции — квадратичная парабола, сдвинутая на 3 вправо по X.

Строя график $y = x^2 + 3$, сначала вычисляем x^2, потом к результату прибавляем 3. Получаем квадратичную параболу, сдвинутую на 3 вверх по Y.

Итак, если некоторое число прибавляется к аргументу x (или вычитается из него), то сдвиг будет по оси X. Если сначала вычислили значение функции (в данном случае x^2), а потом прибавили (или вычли) некоторое число, то сдвиг будет по Y.

3. Растяжение (сжатие) по горизонтали.

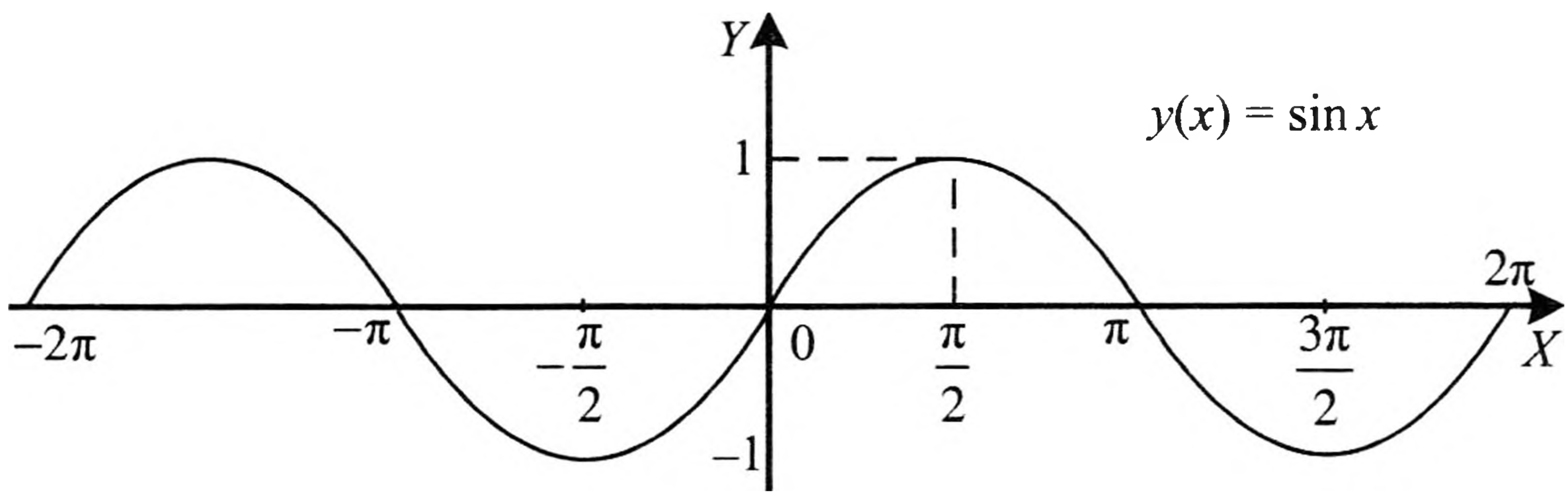
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции $y = f(kx)$ будет растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.

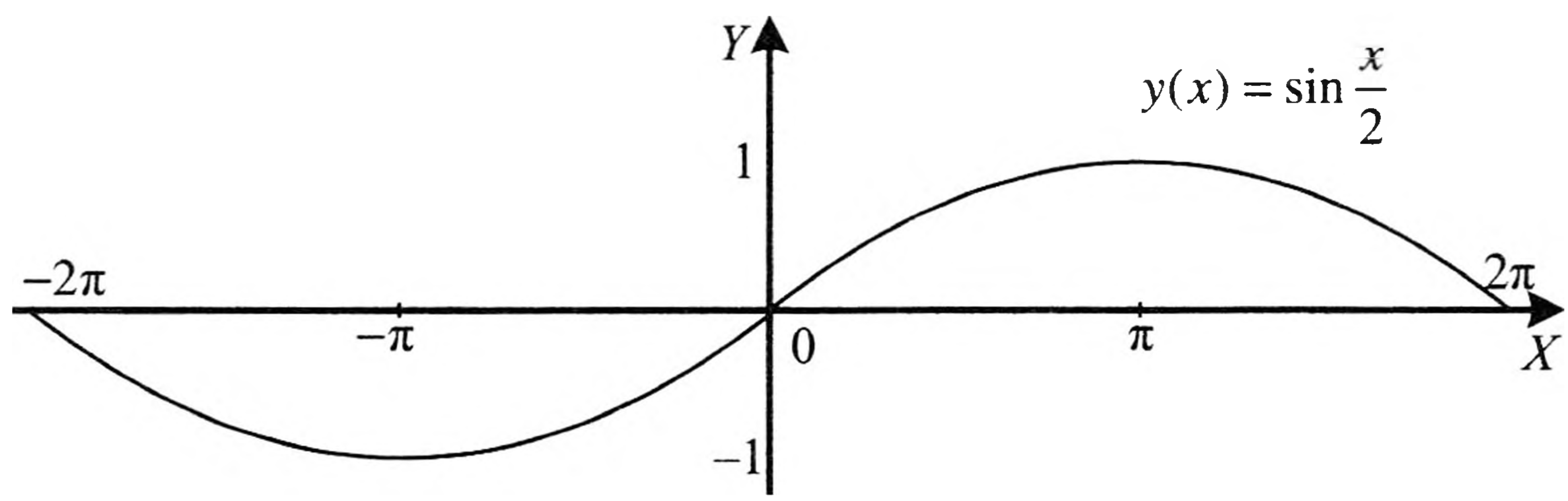
На рисунке изображены графики трех функций.

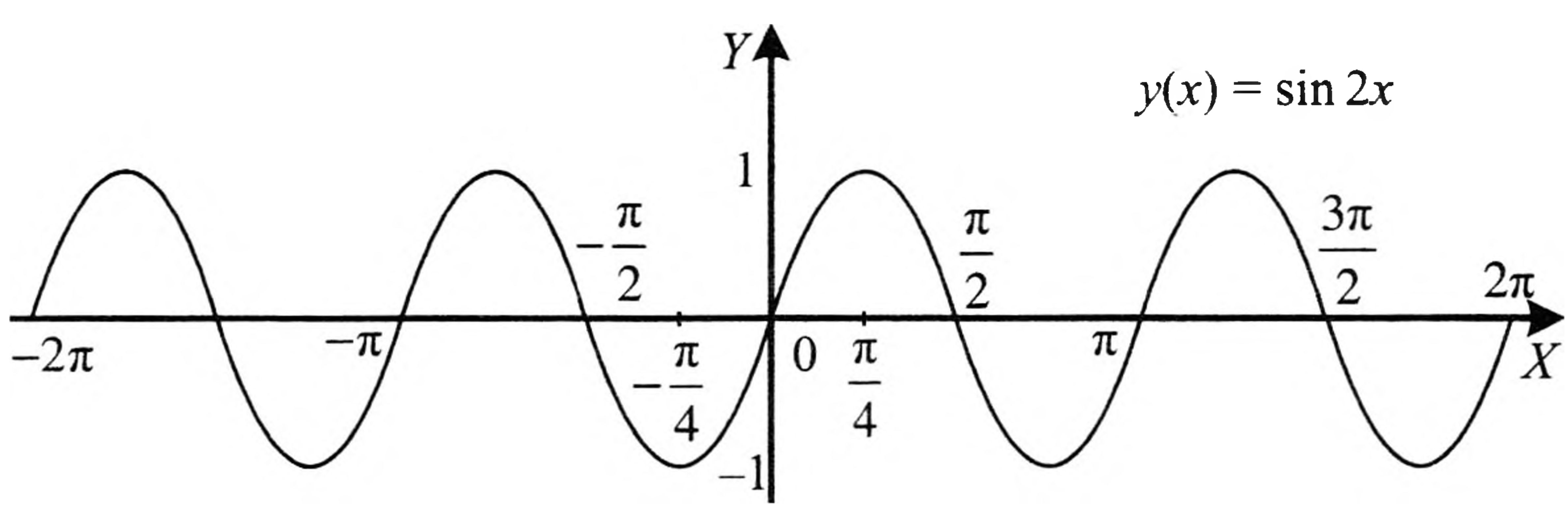
$y = \sin x$ — обычная синусоида,

$y = \sin \frac{1}{2} x$ — синусоида растянута в 2 раза по горизонтали, период для этой функции равен 4π.

$y = \sin 2x$ — синусоида сжата в 2 раза по горизонтали. Физик сказал бы, что здесь по сравнению с функцией $y = \sin x$ частота увеличилась в 2 раза, а период уменьшился в 2 раза.







4. Растяжение (сжатие) по вертикали.

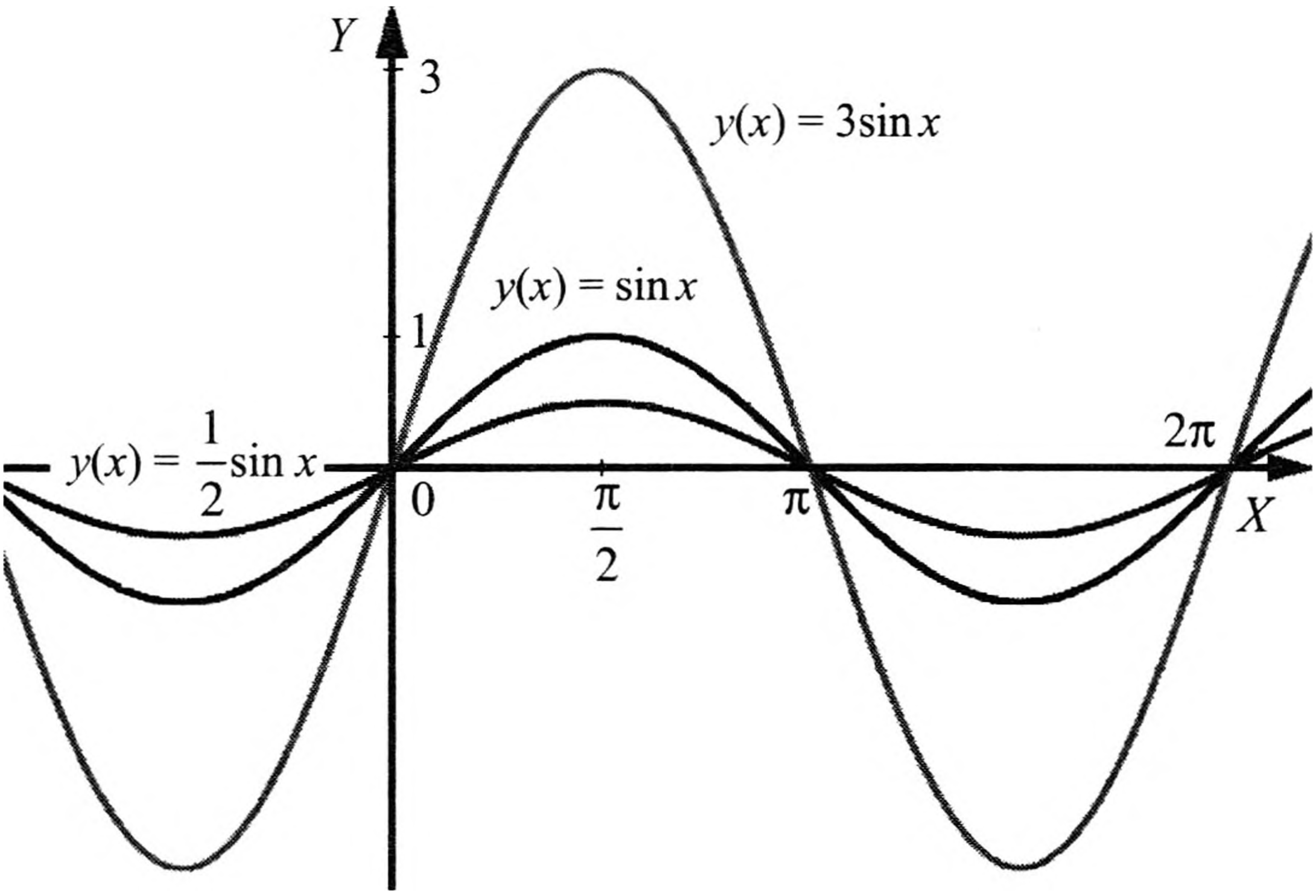
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $C > 0$. Тогда график функции $y = Cf(x)$ будет растянут относительно исходного в C раз по вертикали, если $C > 1$, и сжат относительно исходного в C раз по вертикали, если $0 < C < 1$.

На рисунке изображены графики трех функций.

$y = \sin x$ — обычная синусоида,

$y = \dfrac{1}{2}\sin x$ — синусоида сжата в 2 раза по вертикали. Можно сказать, что ее амплитуда в 2 раза меньше, чем у функции $y = \sin x$.

$y = 3 \sin x$ — синусоида растянута в 3 раза по вертикали. Здесь амплитуда в 3 раза больше, чем у функции $y = \sin x$.



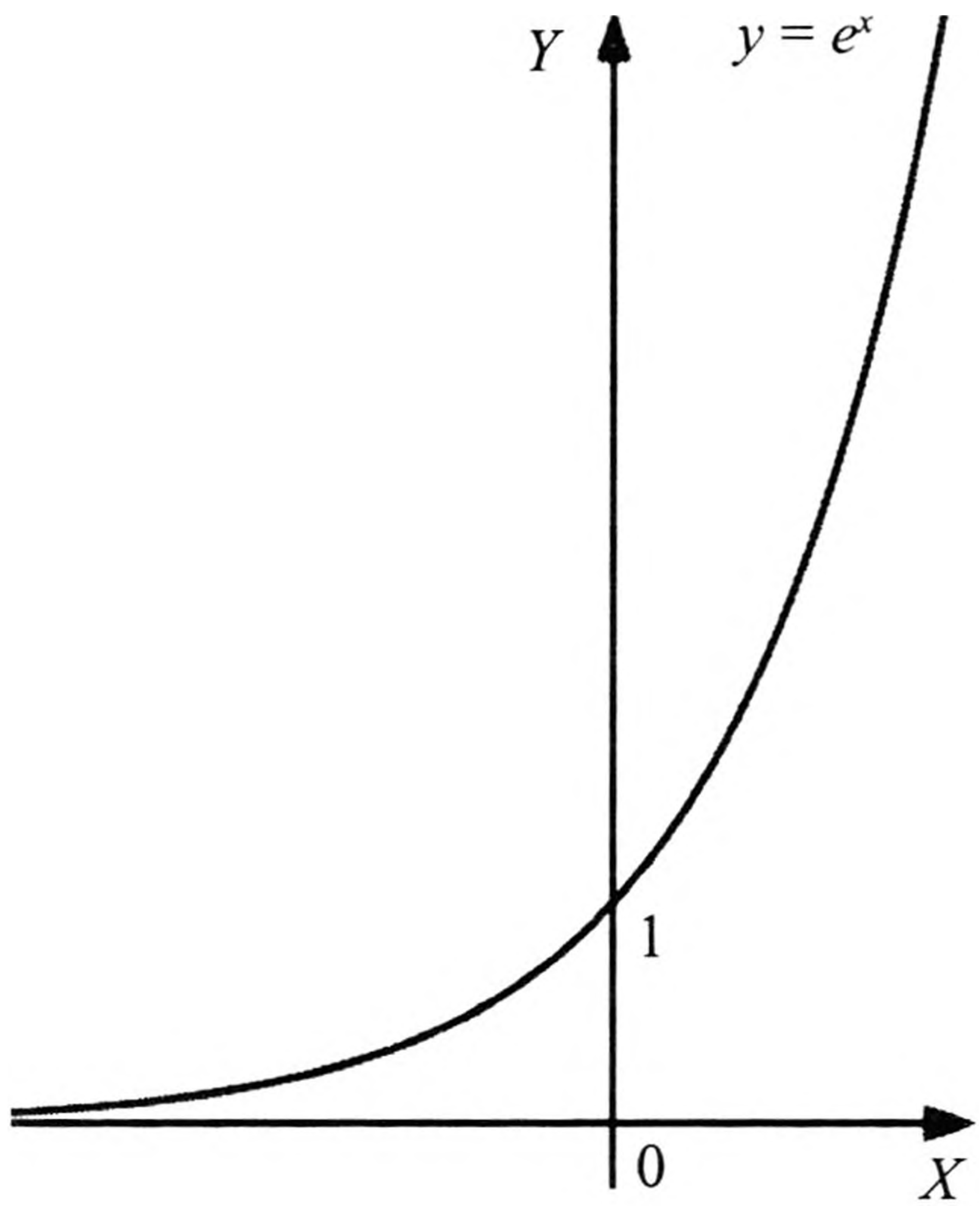
Заметим, что и здесь та же зависимость от порядка действий. Если аргумент функции умножить на какое-либо число, то растяжение (сжатие) будет по X, то есть по горизонтали. Если функцию $f(x)$ умножить на какое-либо число, растяжение (сжатие) графика происходит по Y.

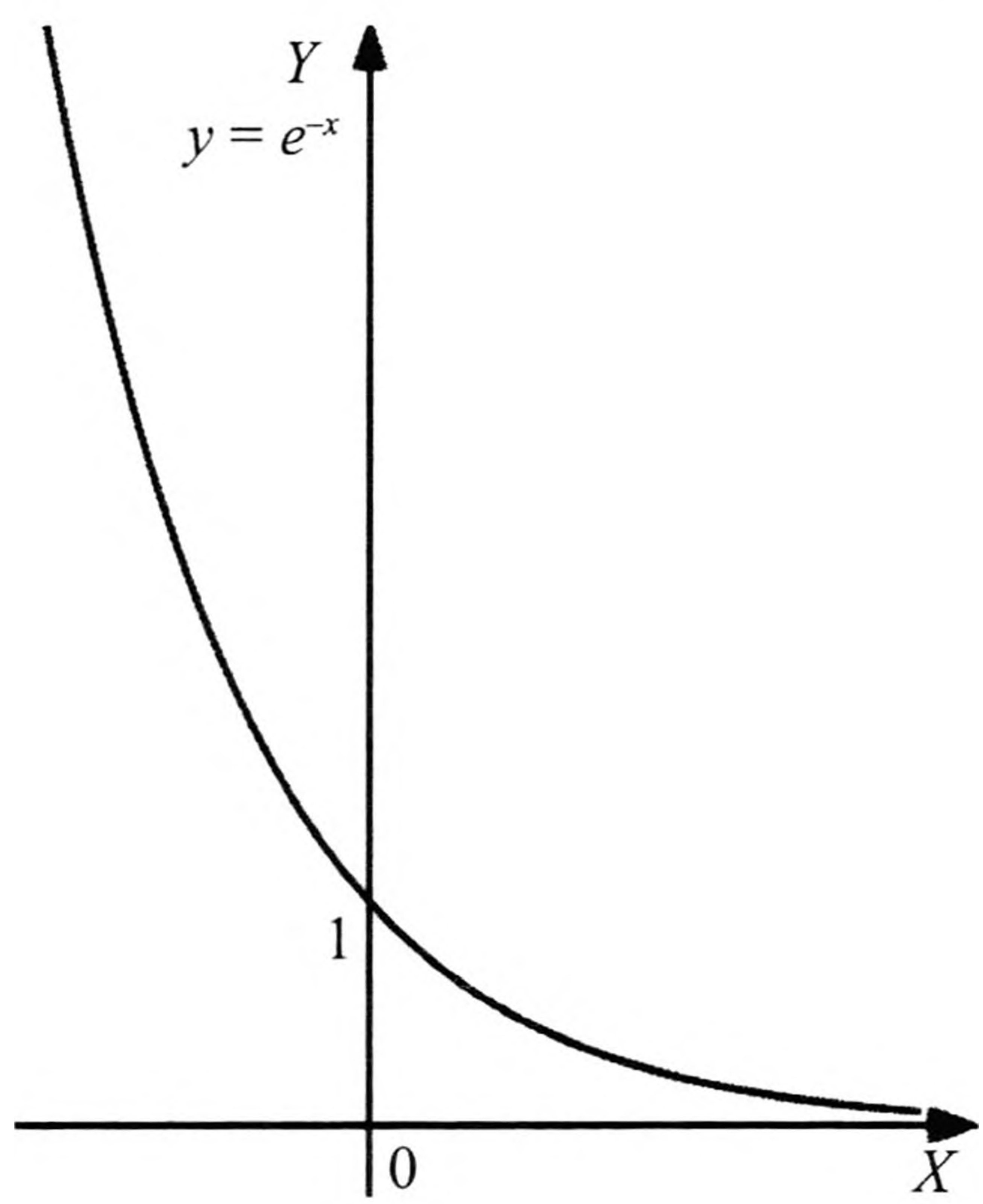
Отражение по горизонтали

Продолжим нашу аналогию с графическим редактором. Помните, в графическом редакторе есть функции «отразить рисунок по горизонтали» и «отразить по вертикали». А как это выглядит математически?

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Y.

Вот на рисунке графики функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

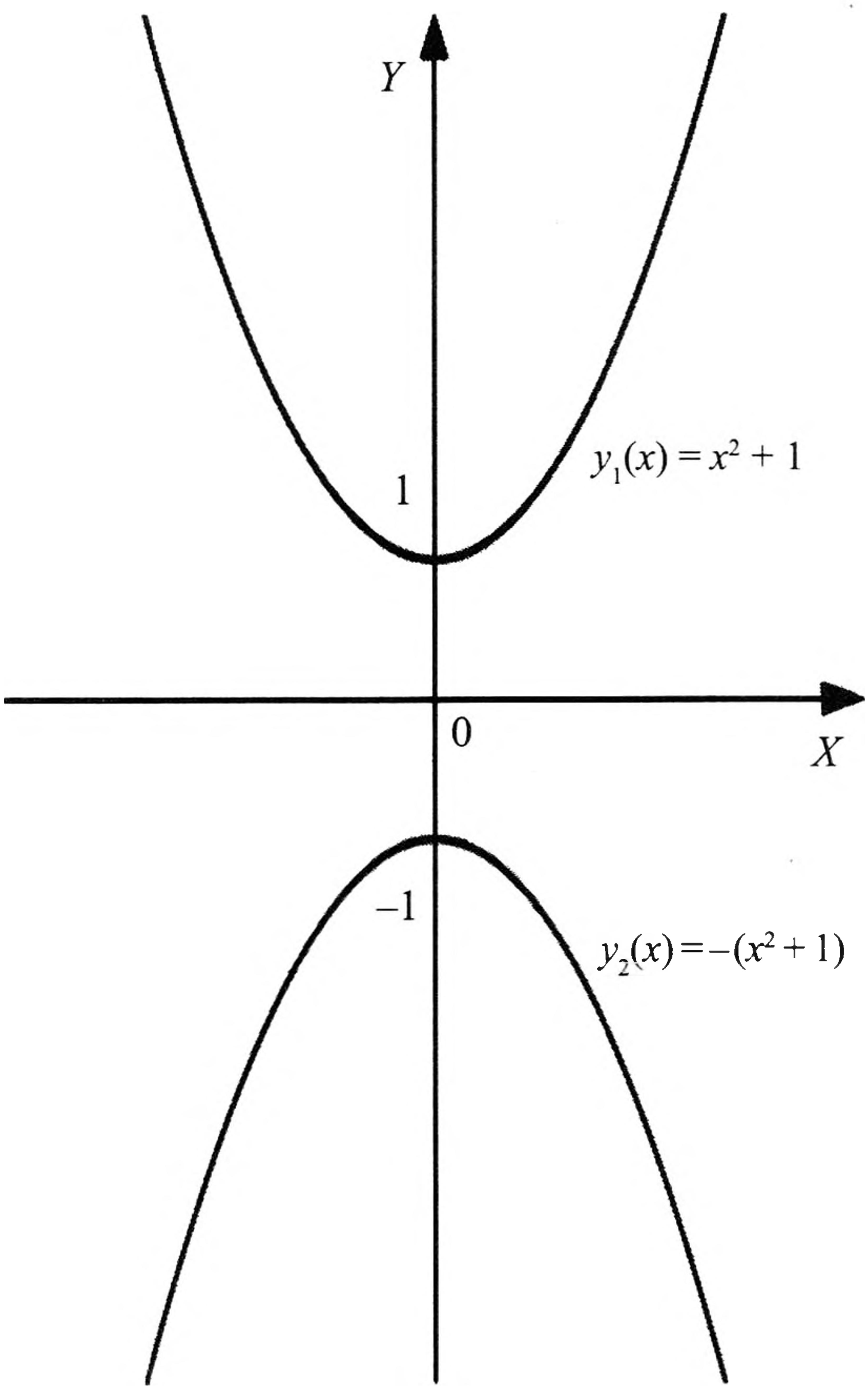




Отражение по вертикали

Осталось отражение по вертикали. Как вы догадались, для того чтобы отразить график функции по вертикали, перед функцией надо поставить знак «минус».

На рисунках — графики функций $y_1 = x^2 + 1$ и $y_2 = -(x^2 + 1)$.

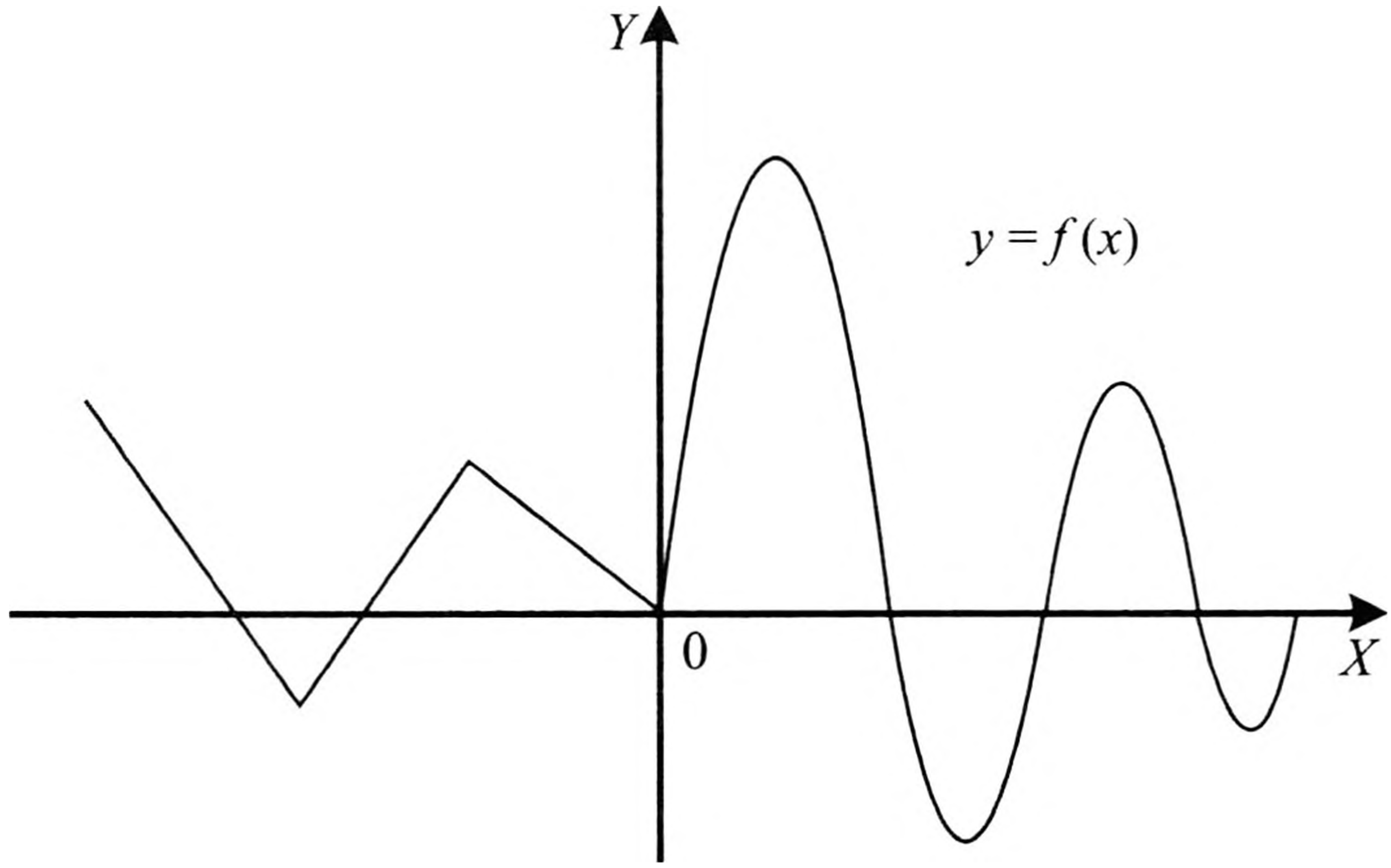


Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Вспомним определение модуля.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

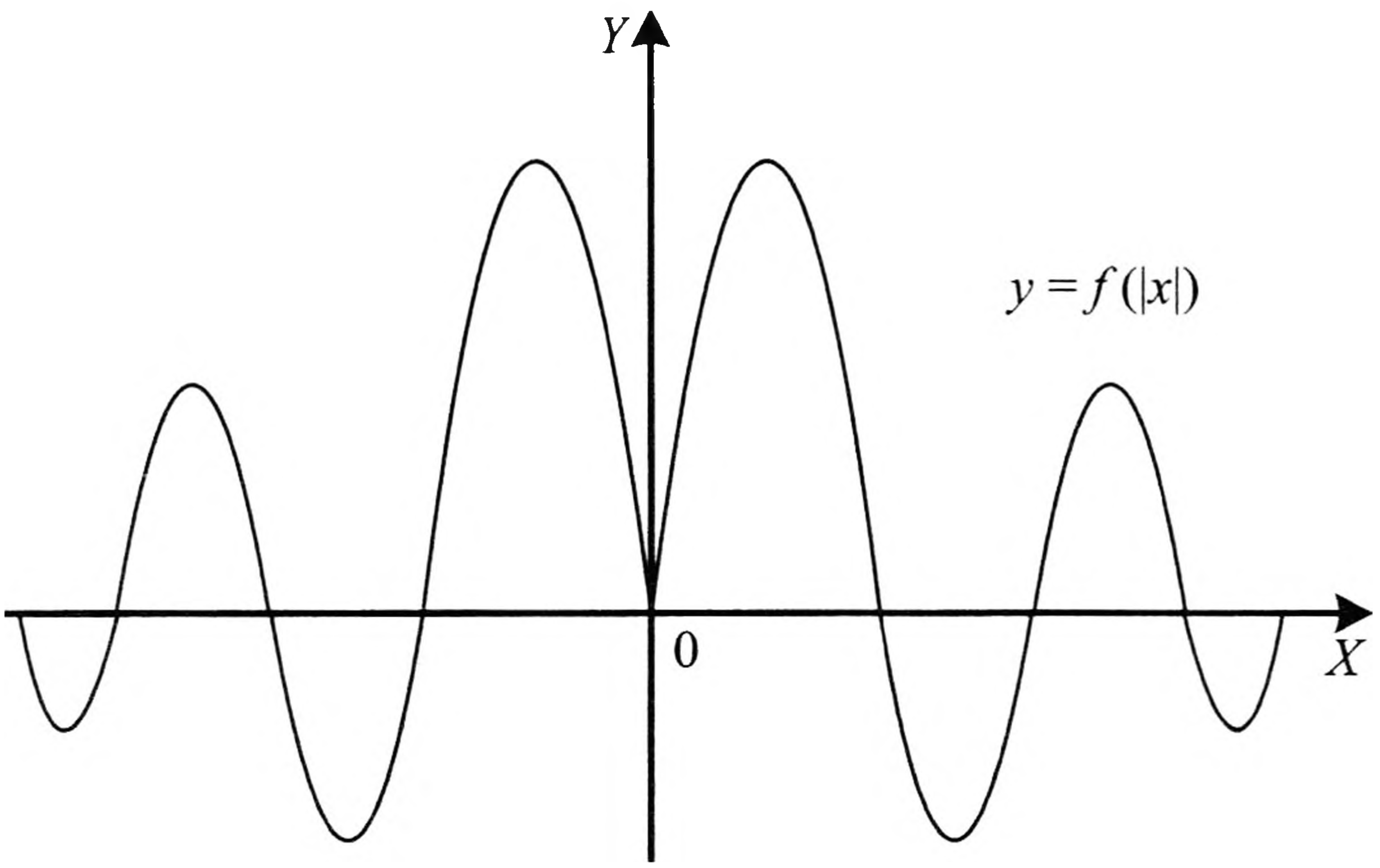
На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$.



Как же будет выглядеть график функции $y = f(|x|)$?

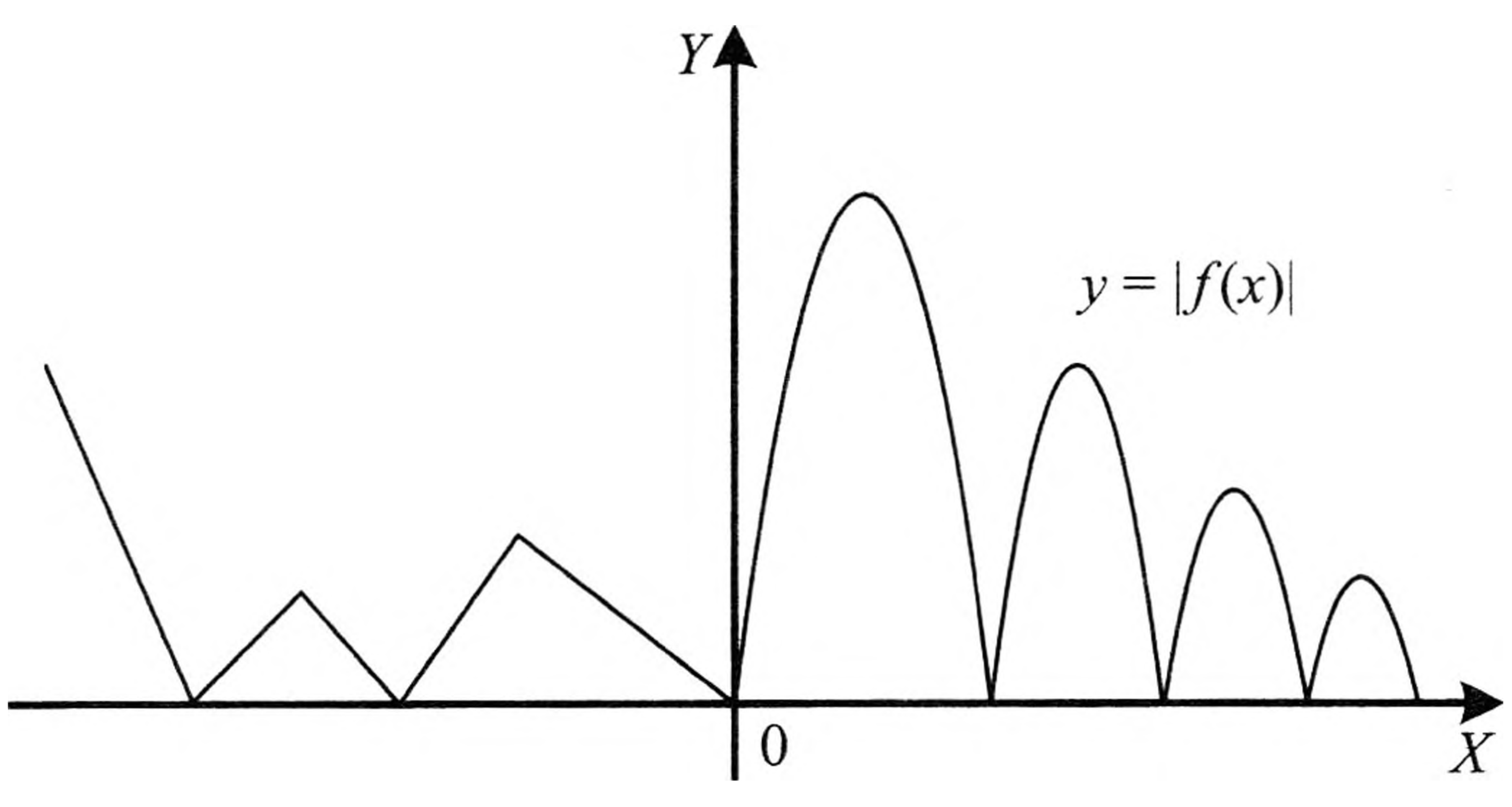
Поскольку $|x| = x$, если $x \geq 0$, вся часть графика функции $y = f(x)$, находящаяся справа от оси Y, останется на месте. Что же касается части графика слева от оси Y — она исчезнет! Вместо нее появится симметрично отраженная правая часть графика.

Действительно, если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит, вместо каждого отрицательного x мы берем противоположное ему положительное значение и вычисляем значение функции в это точке.



Постройте самостоятельно графики функций $y = |x|^3$ и $y = \sqrt{|x|}$.

А теперь график функции $y = |f(x)|$. Чувствуете разницу? Порядок действий другой. Сначала мы строим график функции $y = f(x)$. Затем, согласно определению модуля, вся часть графика, лежащая выше оси X, остается на месте. Ведь для этих значений $f(x) \geq 0$, значит, $|f(x)| = f(x)$. А часть графика, лежащая ниже оси X, отражается симметрично вверх относительно оси X.

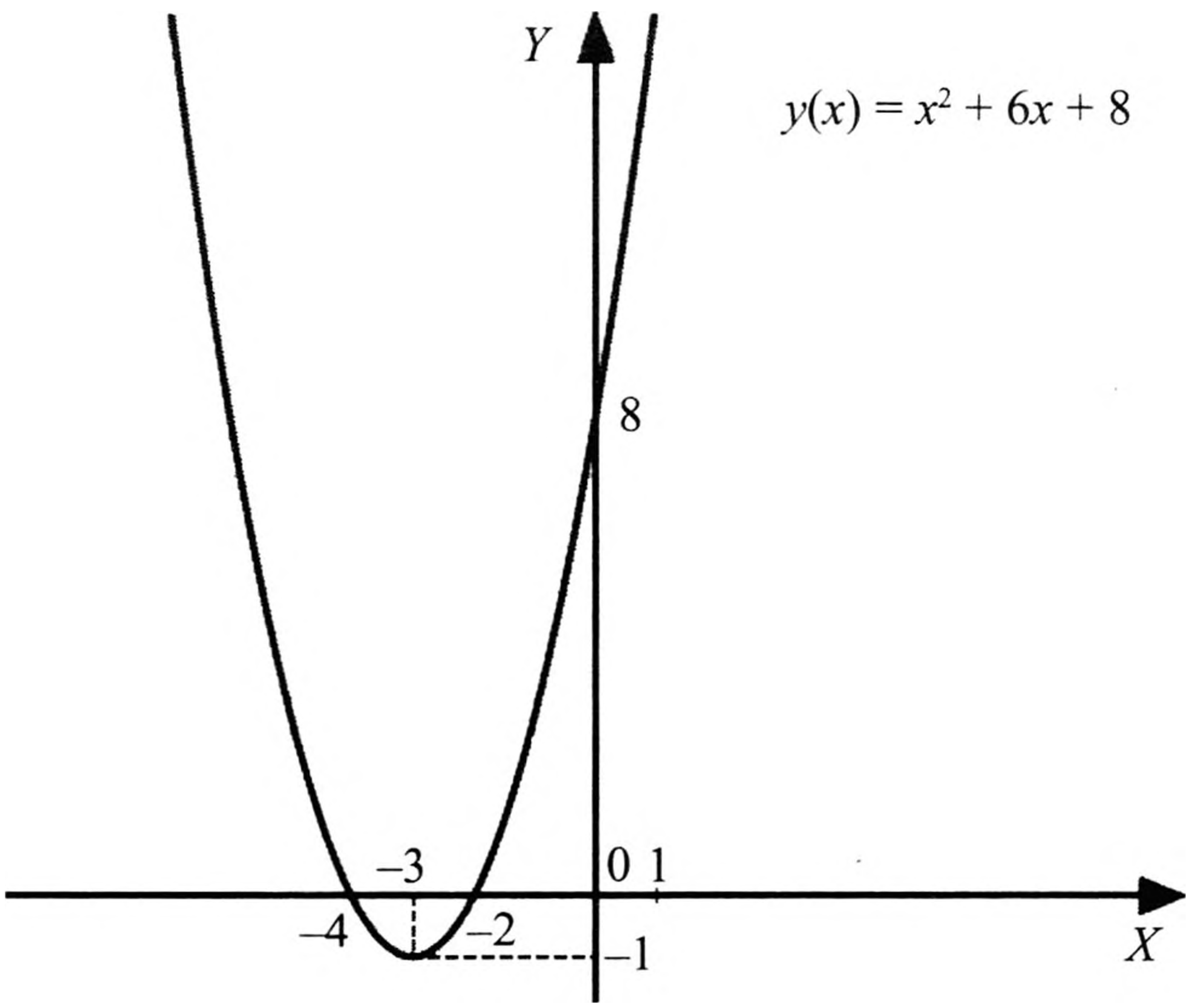


Рассмотрим несколько примеров.

1. Построим график функции $y = x^2 + 6x + 8$.

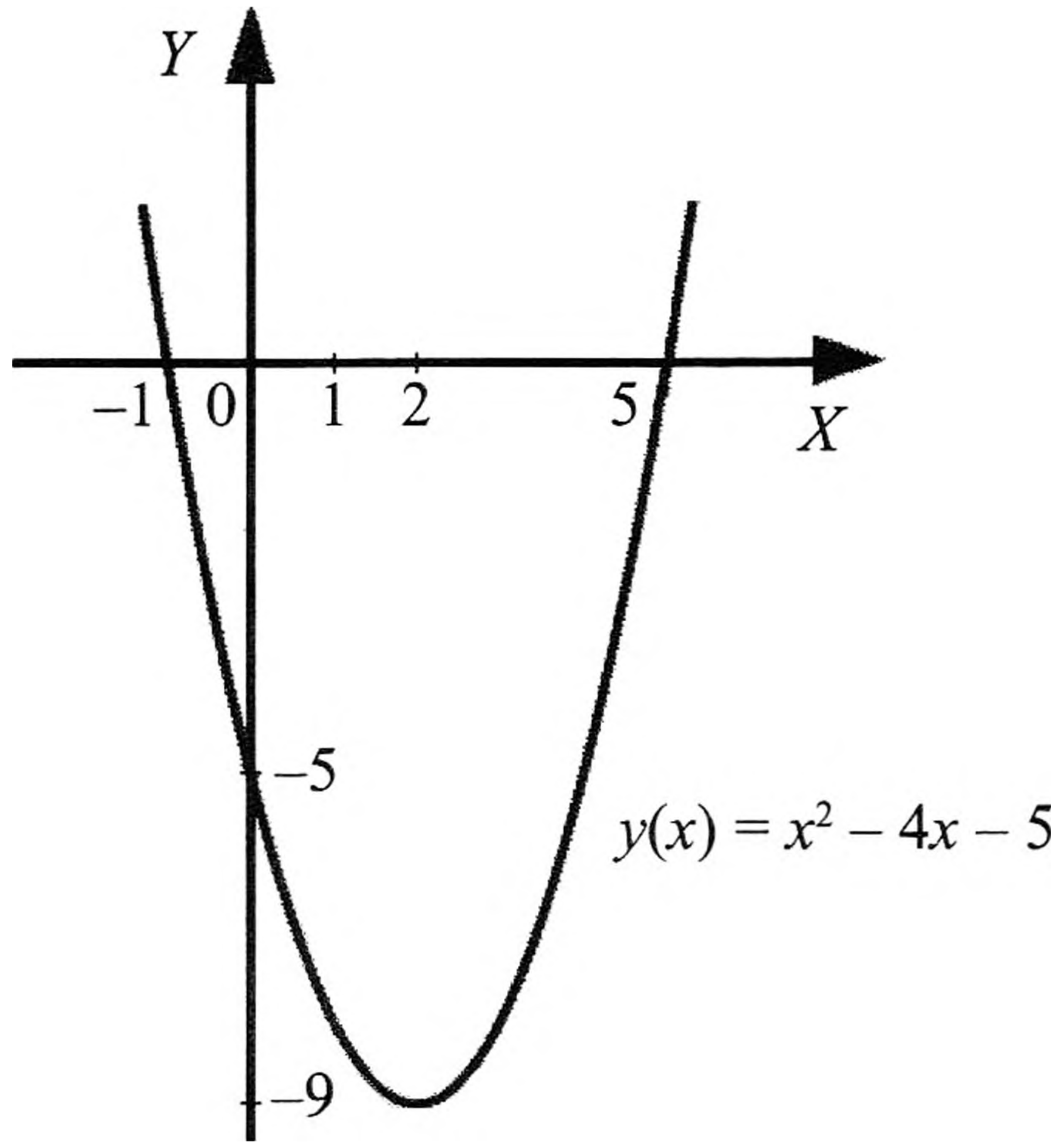
Выделим из выражения $x^2 + 6x + 8$ полный квадрат.
$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x \cdot 3 + 9 - 1 = (x + 3)^2 - 1$.

Графиком функции $y = (x + 3)^2 - 1$ является квадратичная парабола $y = x^2$, сдвинутая на 3 единицы влево и на 1 единицу вниз.

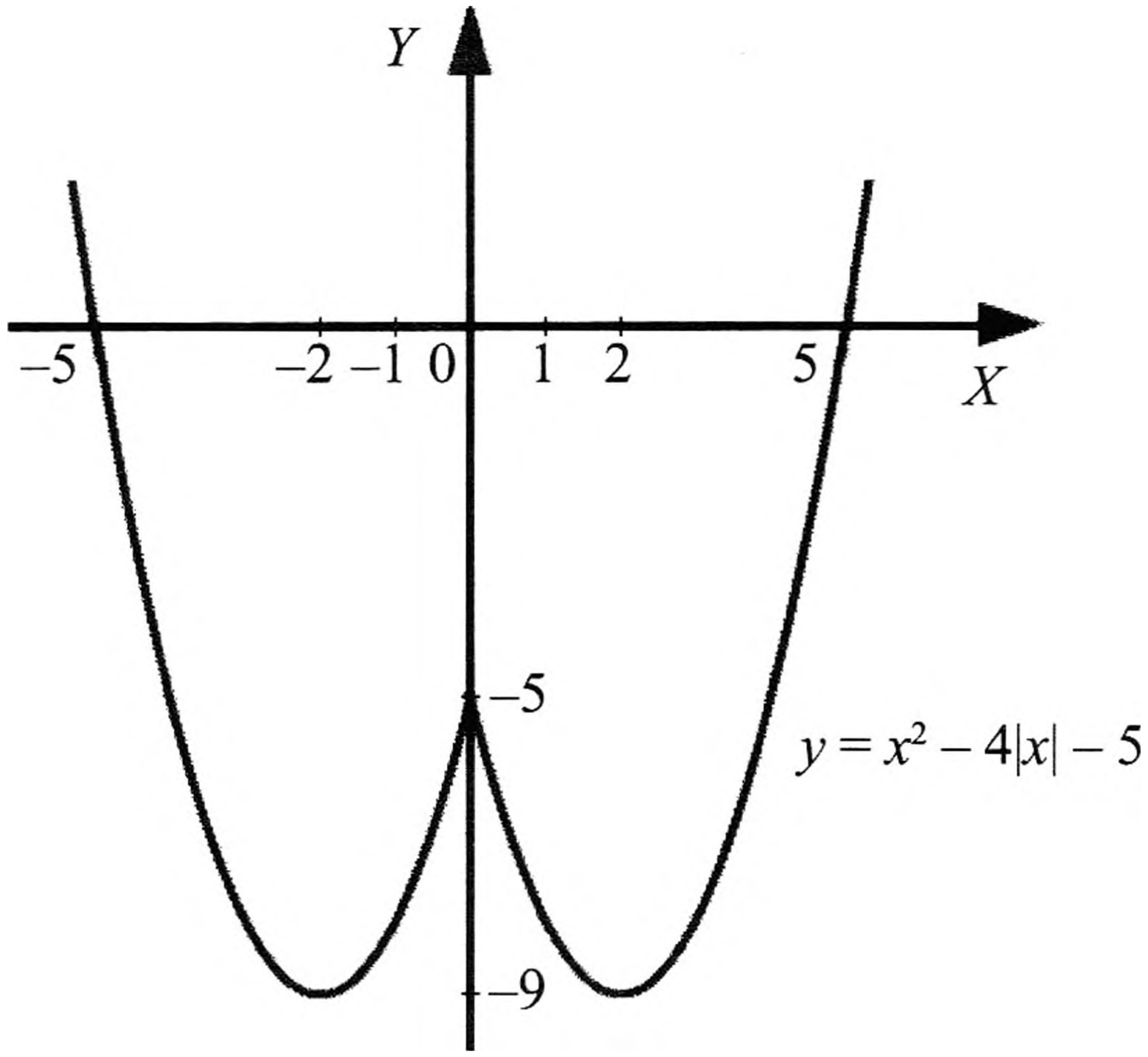


2. Построим график функции $y = x^2 - 4|x| - 5$.

Заметим, что $x^2 = |x|^2$.
Значит, если $y(x) = x^2 - 4x - 5$, то $y(|x|) = x^2 - 4|x| - 5$.
Построим график функции $y = x^2 - 4x - 5$.

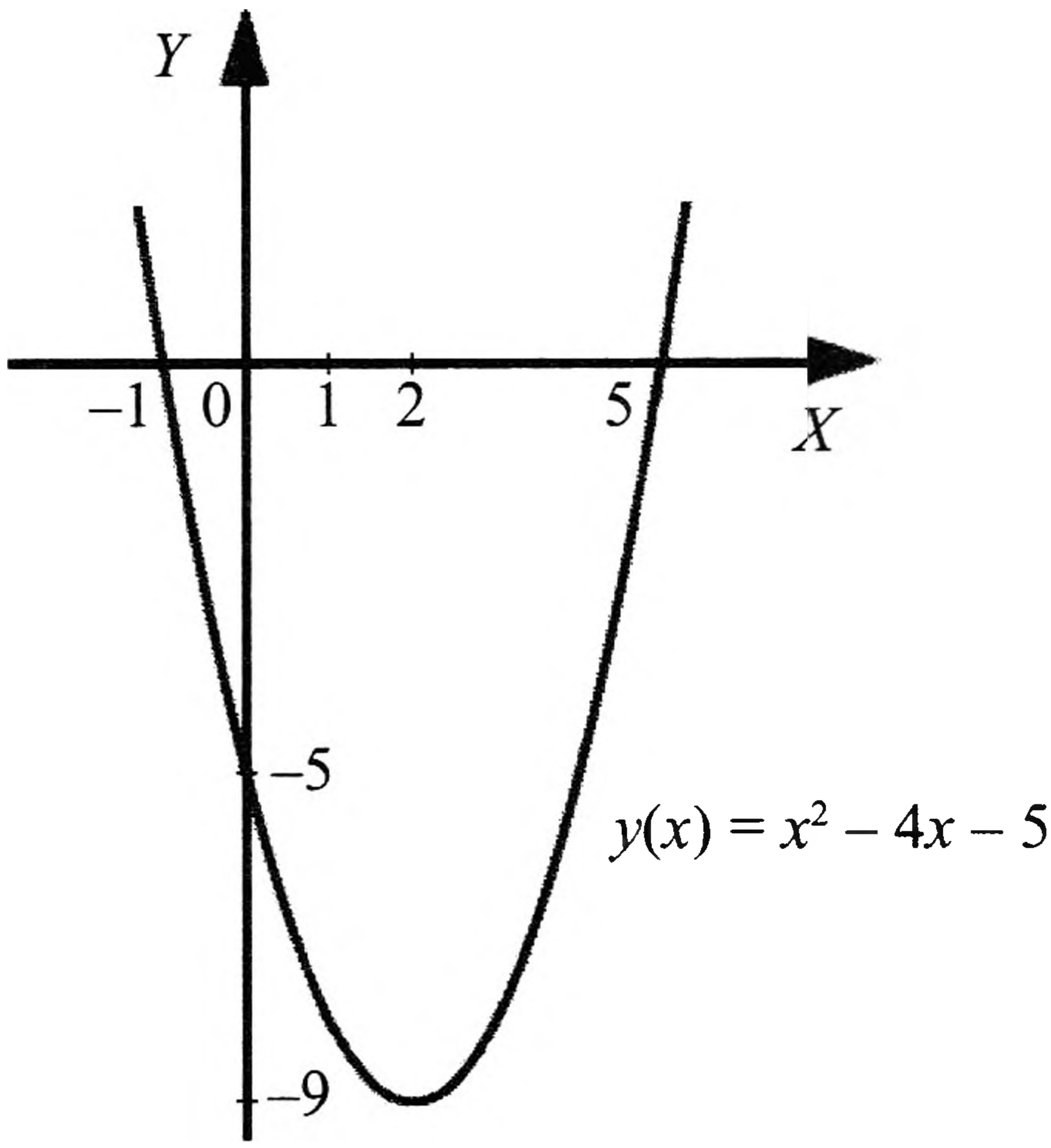


Чтобы получить график функции $y = x^2 - 4|x| - 5$, действуем по известной нам схеме. Вся правая часть исходного графика, где $x \geq 0$, остается на месте. А вместо левой части графика, где $x < 0$, рисуем симметрично отраженную правую.



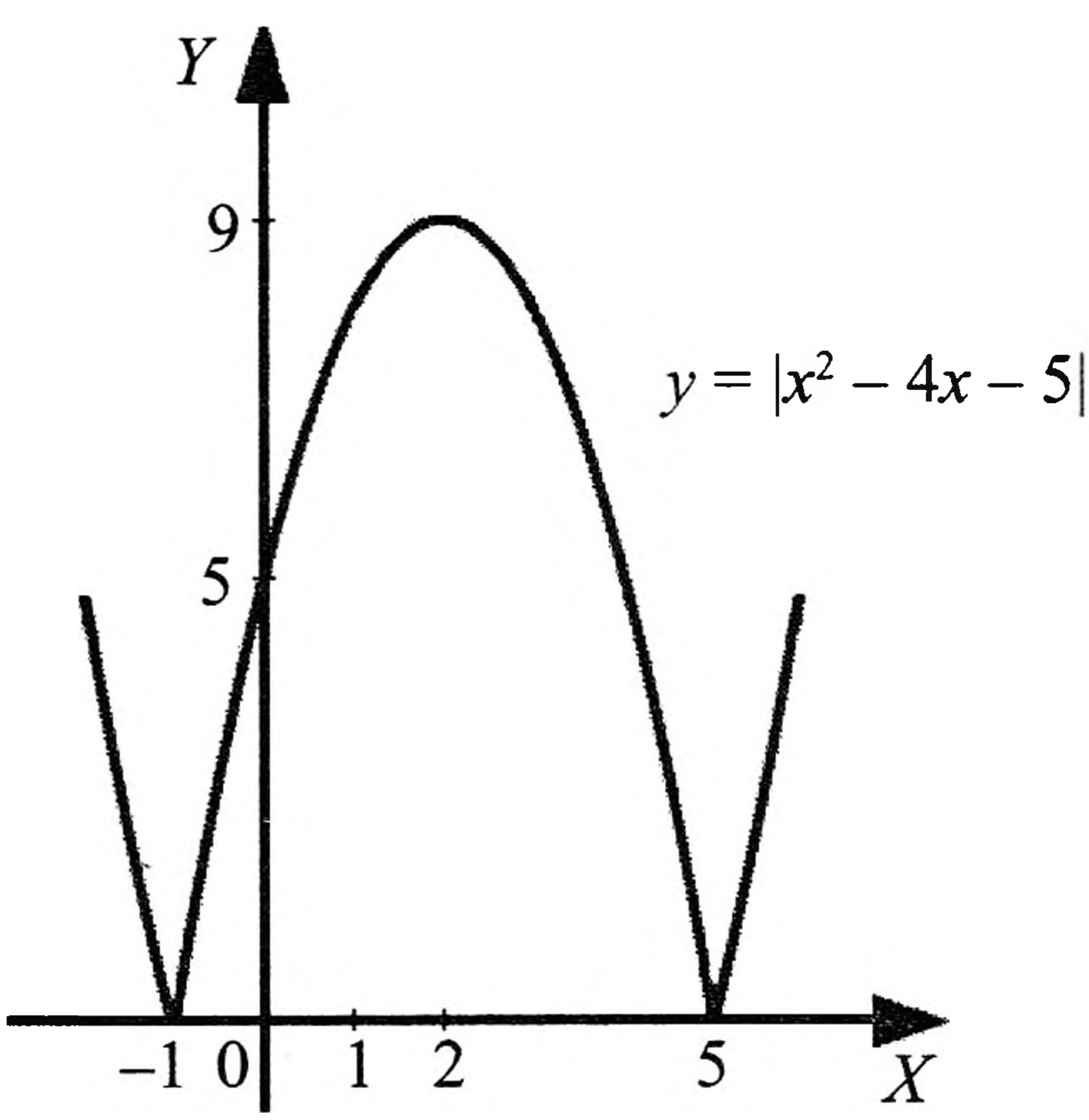
3. Построим график функции $y = |x^2 - 4x - 5|$

Начнем с параболы $y = x^2 - 4x - 5$.

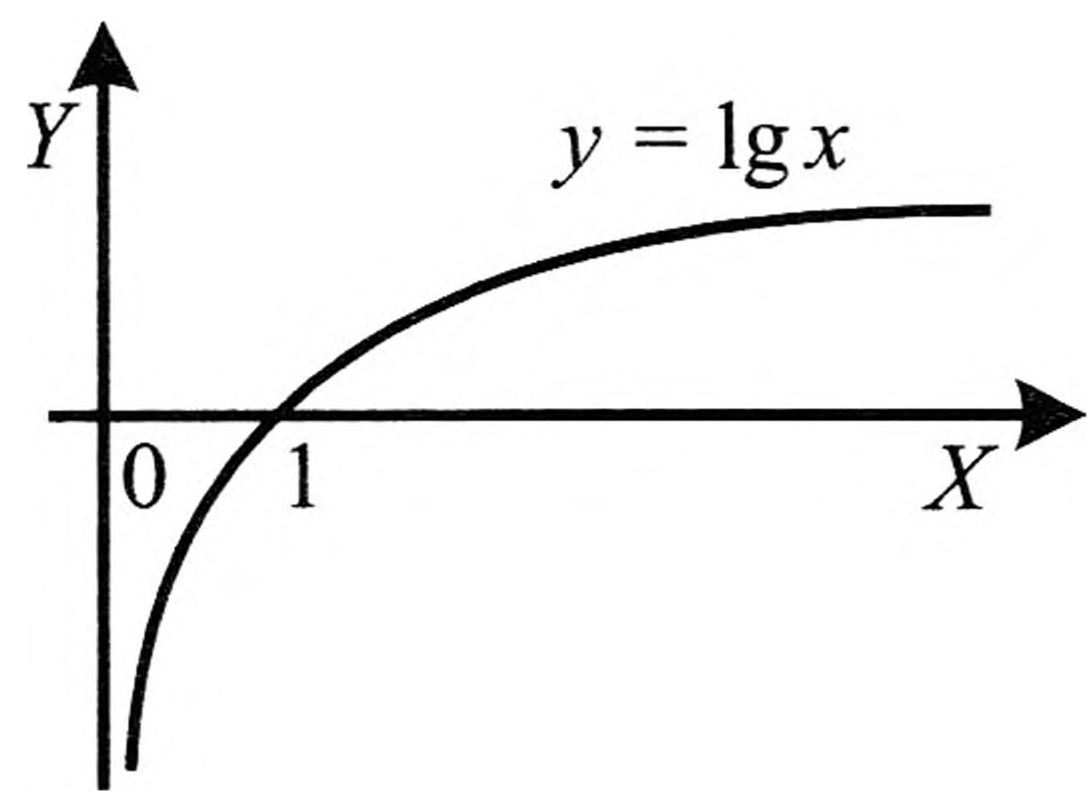


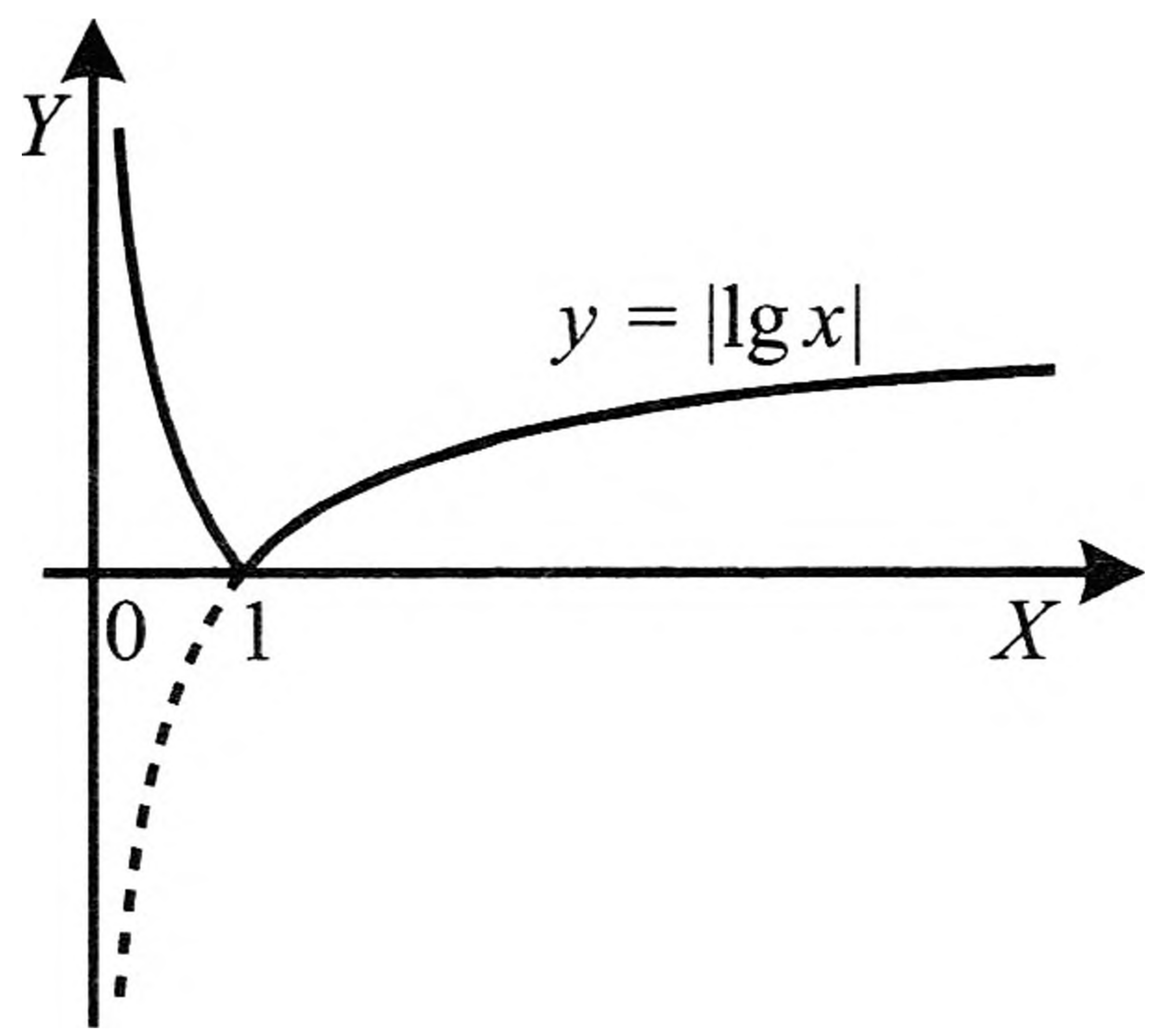
Вся часть графика выше оси X остается на месте. А часть, лежащая ниже оси X, симметрично отражается вверх.

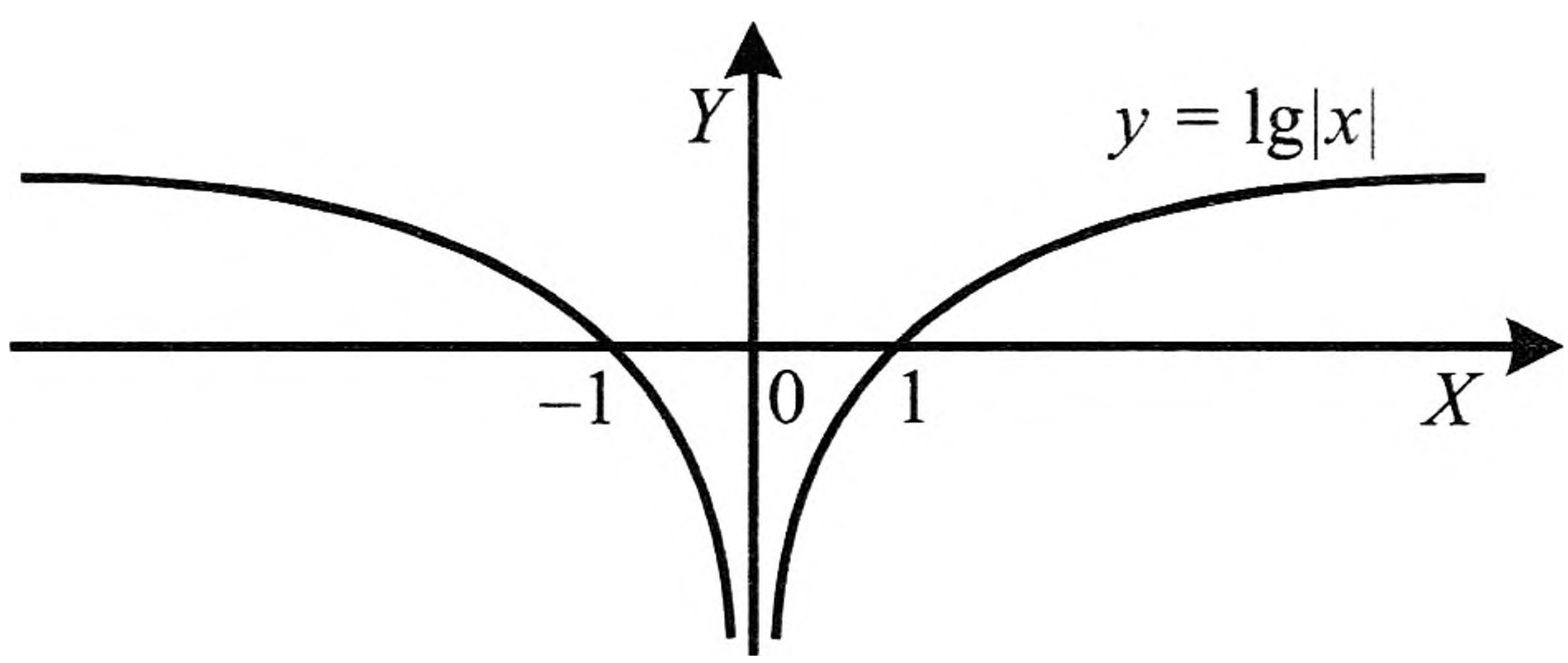
Получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 5|$.



Вот другой пример: график логарифмической функции $y = \lg x$, а также функций $y = |\lg x|$ и $y = \lg |x|$.







Не только функции. «Базовые элементы» для решения задач с параметрами

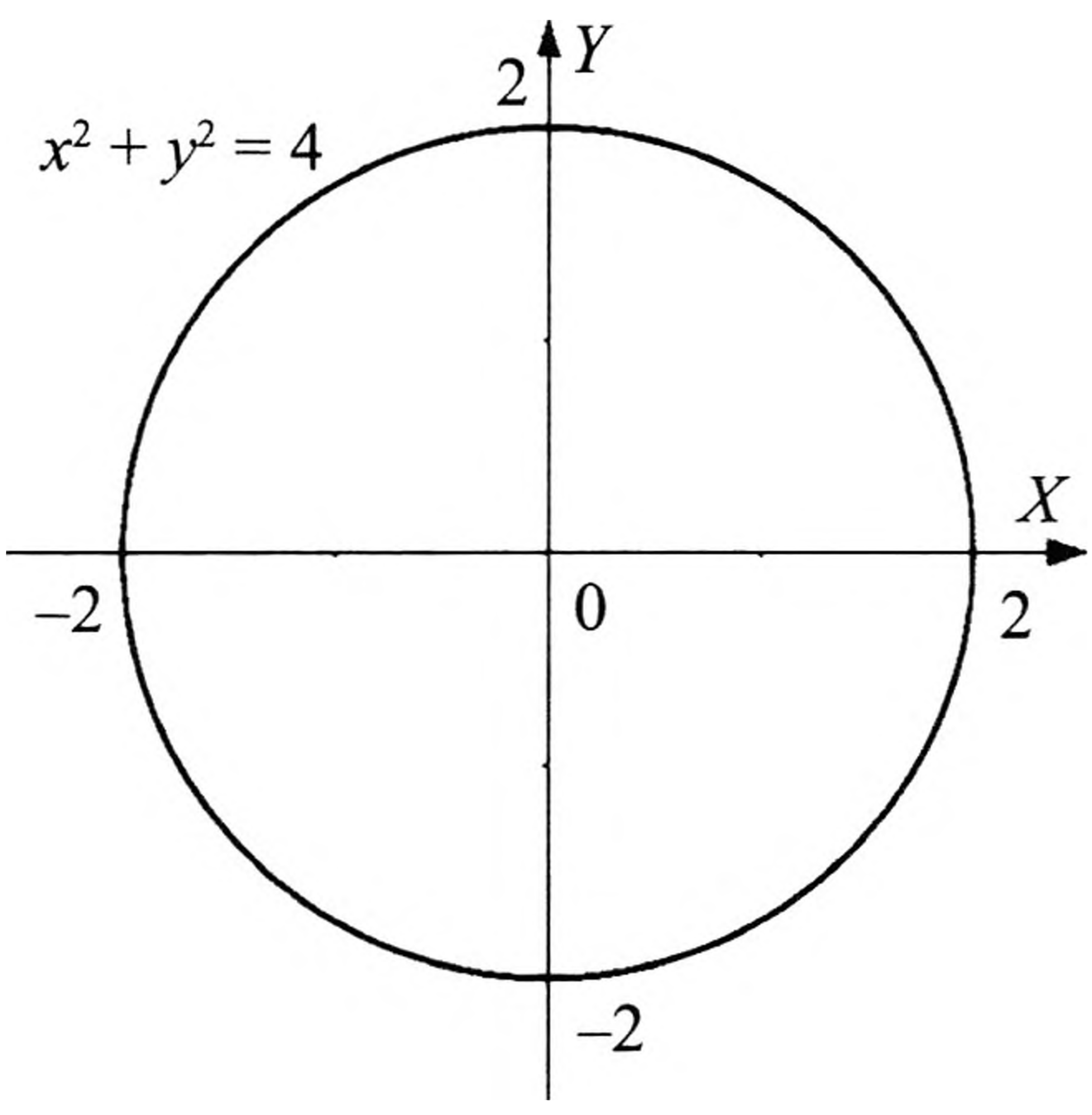
А теперь следующий уровень. Новые объекты, часто встречающиеся в задачах с параметрами. Ваша задача — узнавать уравнения, задающие эти объекты, с первого взгляда.

Не все из них являются функциями. Среди них будут кривые и фигуры на плоскости, которые тоже задаются уравнениями, содержащими x и y, но функциями, в школьном смысле этого слова, они не являются!

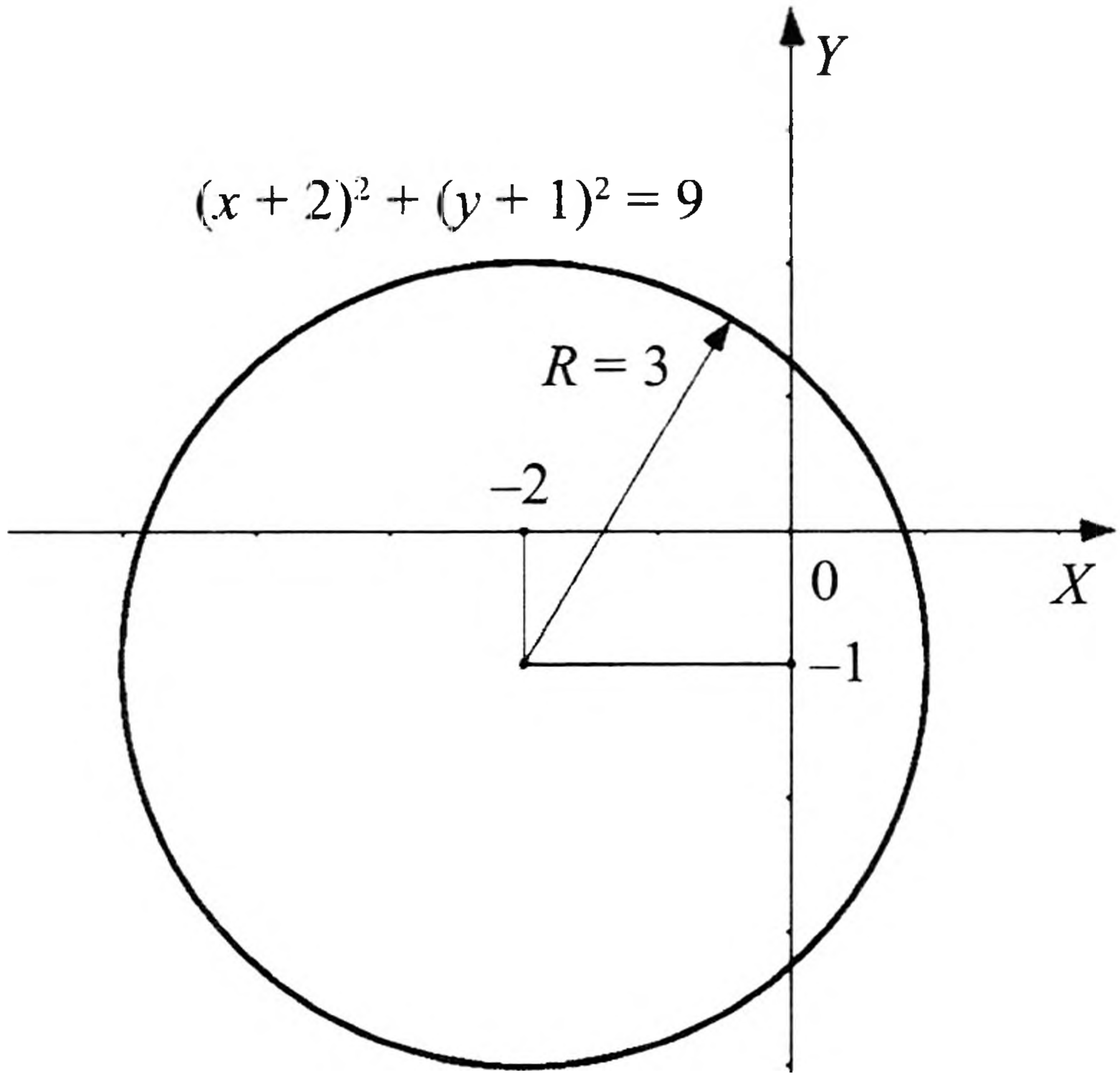
Как и графики основных элементарных функций, эти «базовые элементы» надо знать наизусть, — конечно, если вы хотите на ЕГЭ решить задачу с параметром, а в дальнейшем изучать высшую математику.

1. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.

Вот, например, окружность с центром в начале координат и радиусом 2.



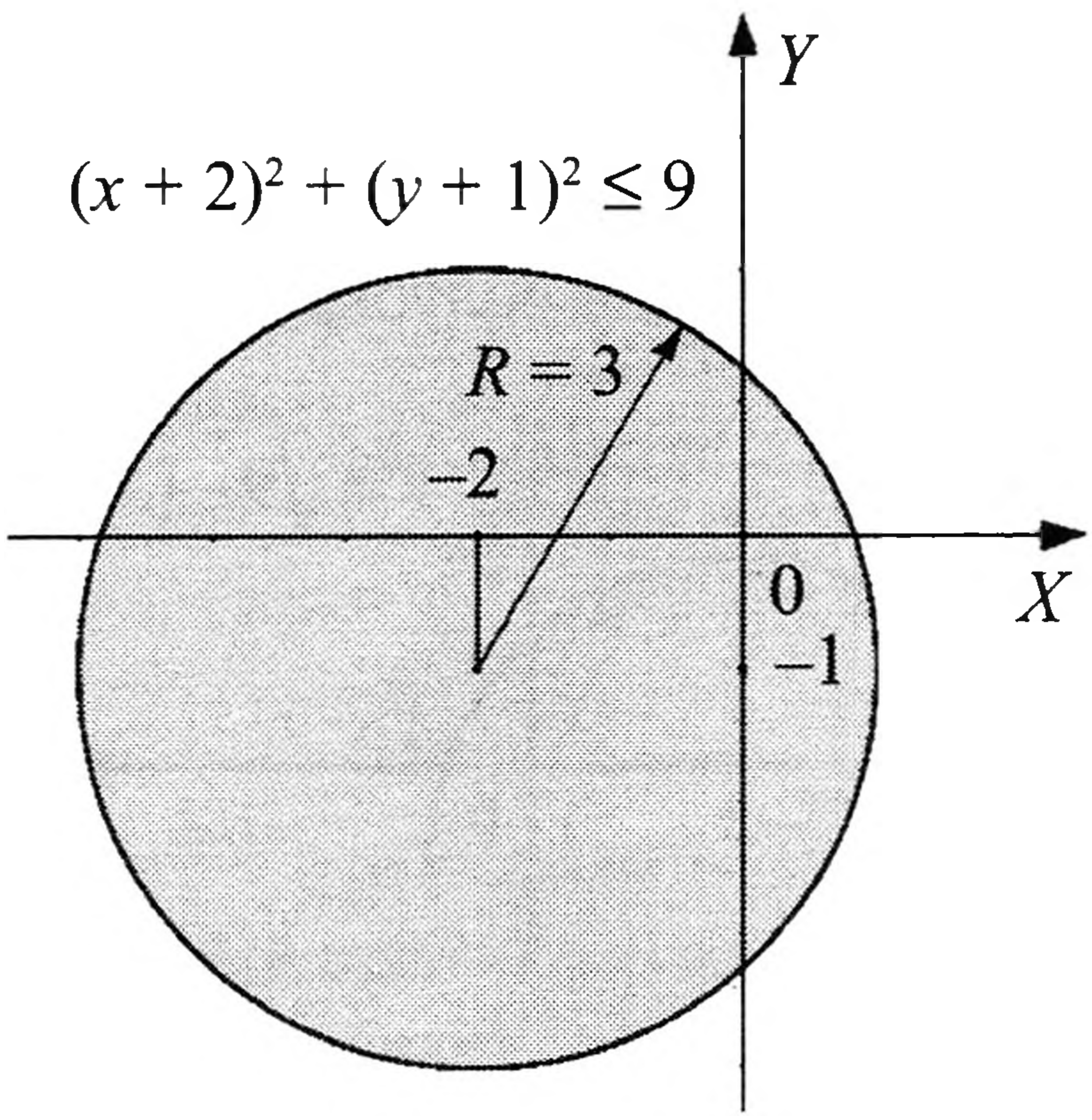
2. Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$. На рисунке — пример такой окружности. Центр в точке $(-2; -1)$, радиус равен 3.



Обратите внимание: окружность не является графиком функции, поскольку одному значению x здесь может соответствовать два значения y.

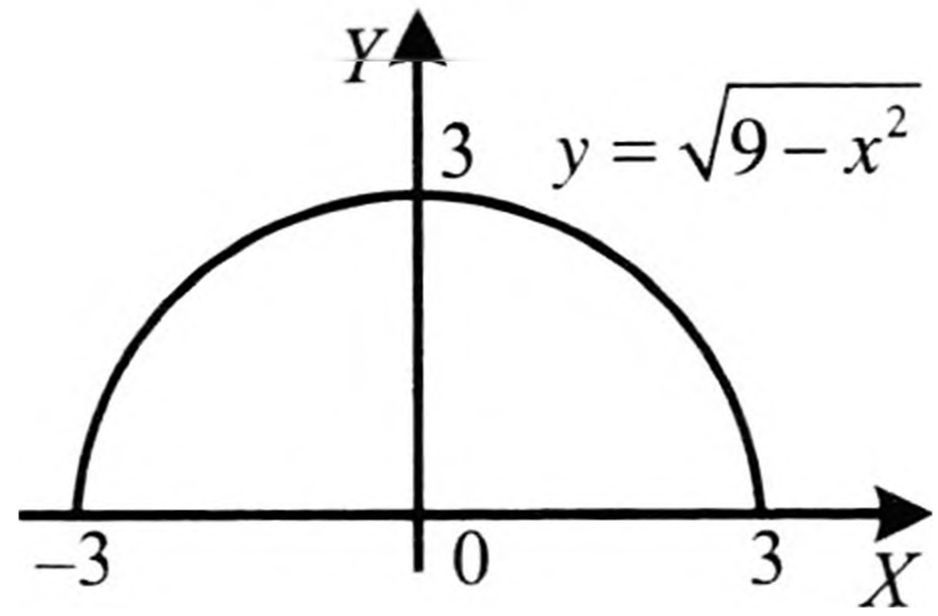
3. Круг вместе с границей задается неравенством:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2.$$

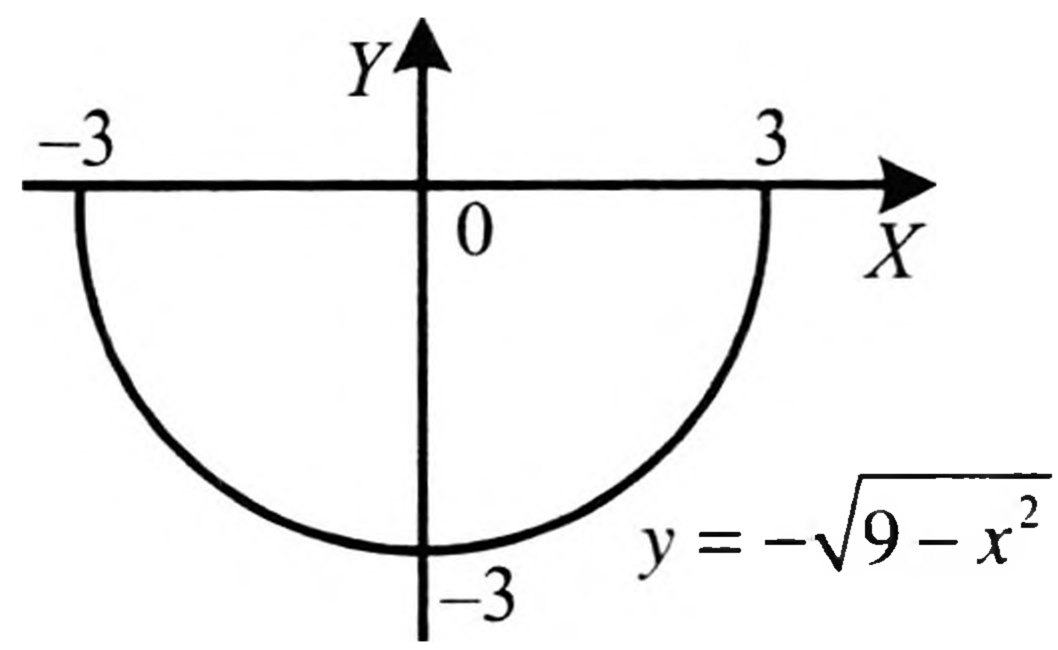


4. В первом уравнении $x^2 + y^2 = R^2$ выразим y через x при условии $y \geq 0$.

Уравнение $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.

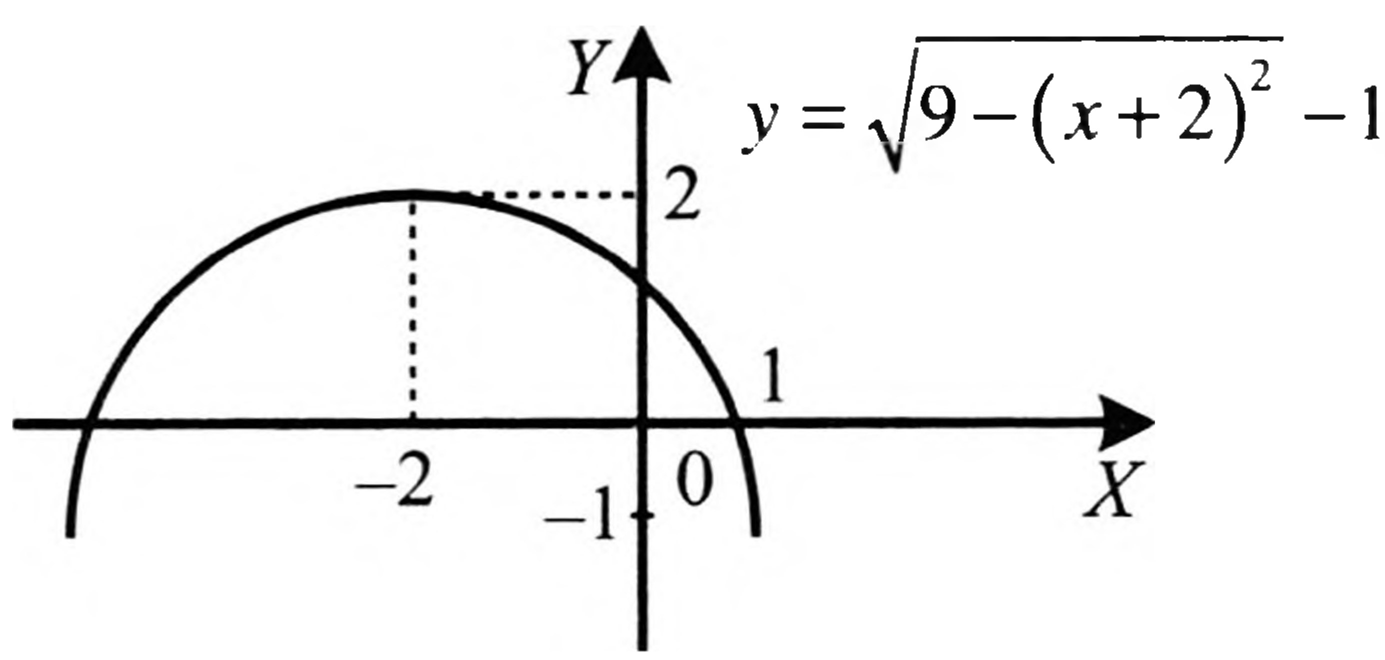


Очевидно, что уравнение $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ будет задавать нижнюю полуокружность.

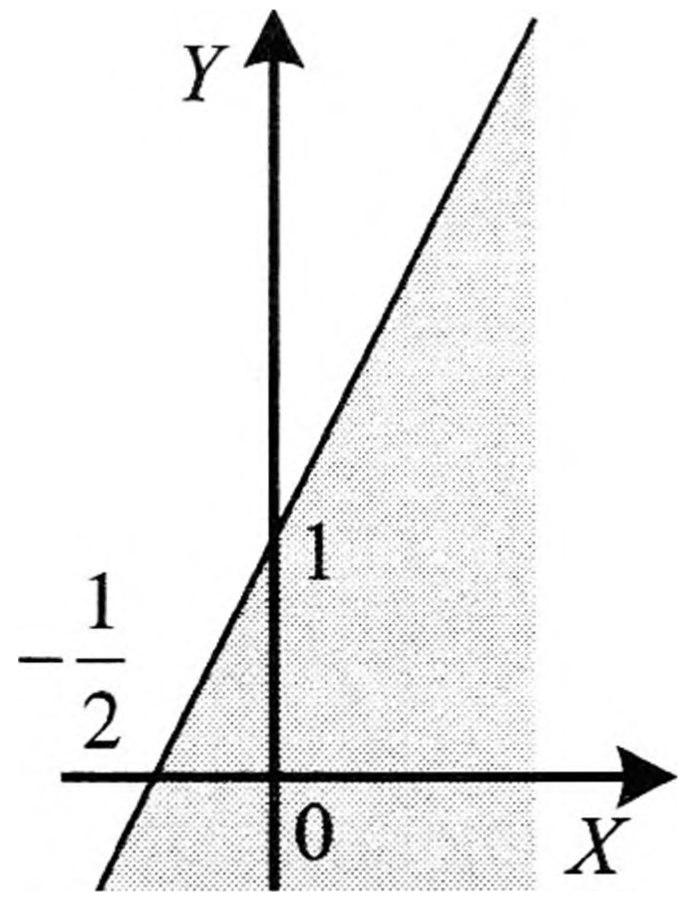


5. Уравнение $y = \sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b$ задает верхнюю полуокружность центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$.

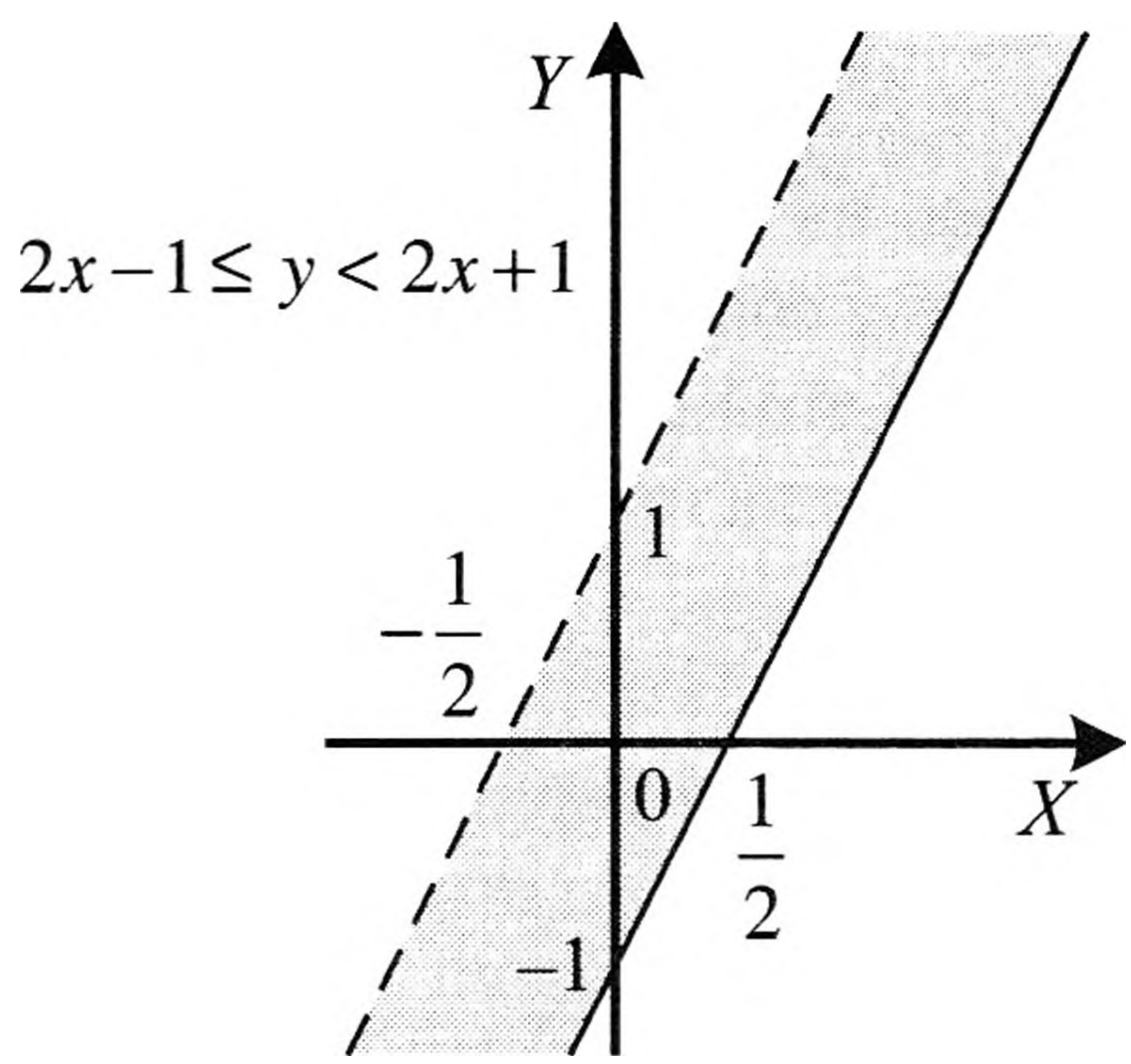
На рисунке — пример такой полуокружности.



6. Вспомним тему «Графическое решение неравенств» из школьного курса математики. На рисунке показана область, заданная неравенством $y \le 2x + 1$. Это полуплоскость под прямой $y = 2x + 1$, включая саму прямую.



7. Двойное неравенство (которое можно записать в виде системы из двух неравенств) также задает область на плоскости. На рисунке — полоска между двумя параллельными прямыми, заданная двойным неравенством $2x - 1 \le y < 2x + 1$. Обратите внимание, что верхняя прямая в эту область не входит, так как неравенство $y < 2x + 1$ строгое.



8. Уравнение $a|x| + b|y| = c$ при положительных a, b и c задает ромбик, симметричный относительно начала координат. На рисунке — пример такого ромбика. Только не говорите, что это график функции!

Как мы его строили? Очень просто! Можно отдельно рассмотреть все случаи и раскрыть модули по определению.

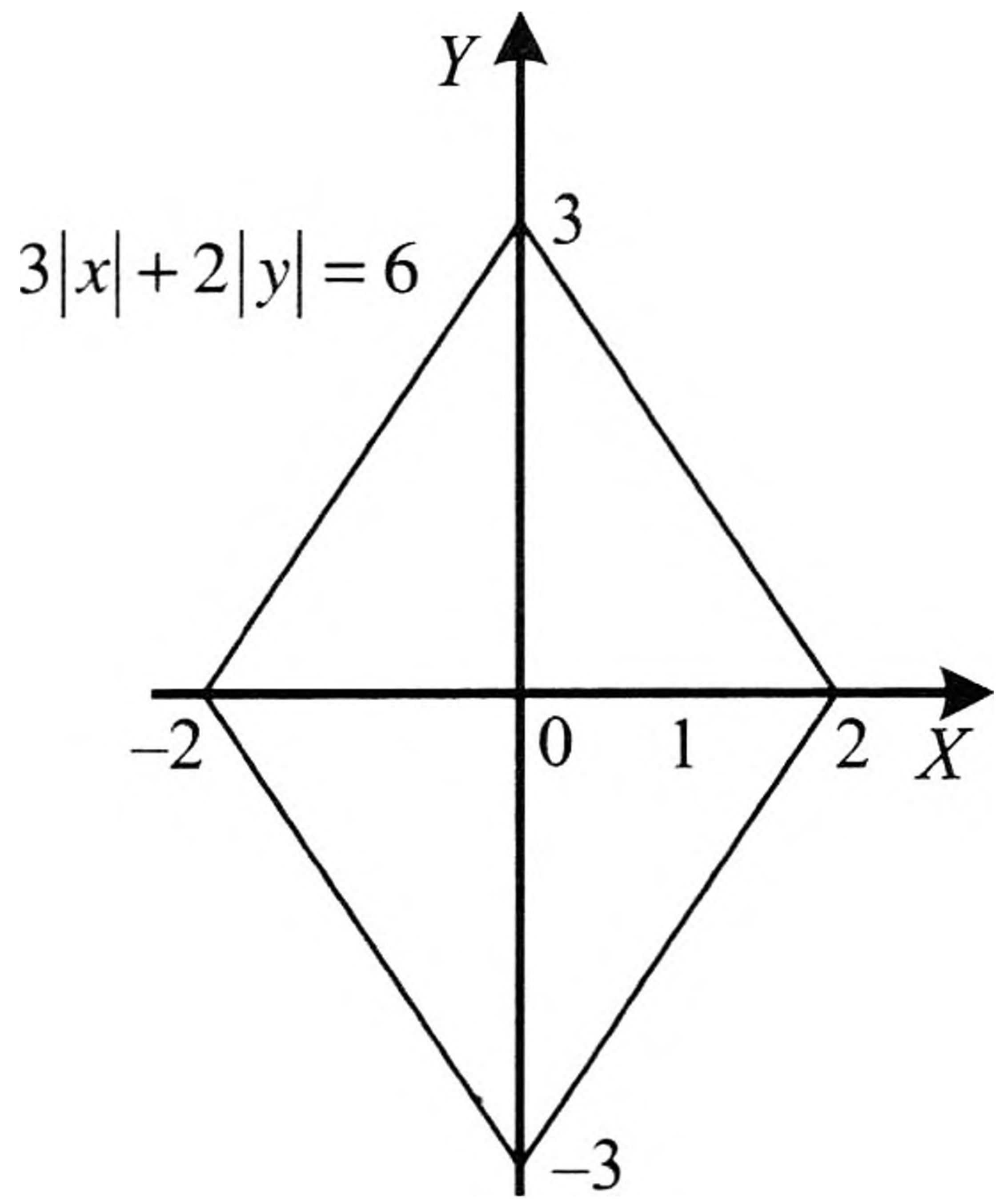
1) При $x \geq 0$, $y \geq 0$ получим: $3x + 2y = 6$.

2) При $x \geq 0$, $y < 0$ получим: $3x - 2y = 6$

3) При $x < 0$, $y \geq 0$ получим: $-3x + 2y = 6$,

4) И наконец, при $x < 0$, $y < 0$ имеем: $-3x - 2y = 6$.

Эти 4 отрезка и образуют ромбик.



9. И теперь — схема, на которой строится множество задач с параметрами. Как только у составителя задач заканчиваются идеи, он вспоминает именно об этой схеме.

Эта схема — сумма модулей, то есть функция вида $y = |x + a| + |x + b|$.

Запомните ее.

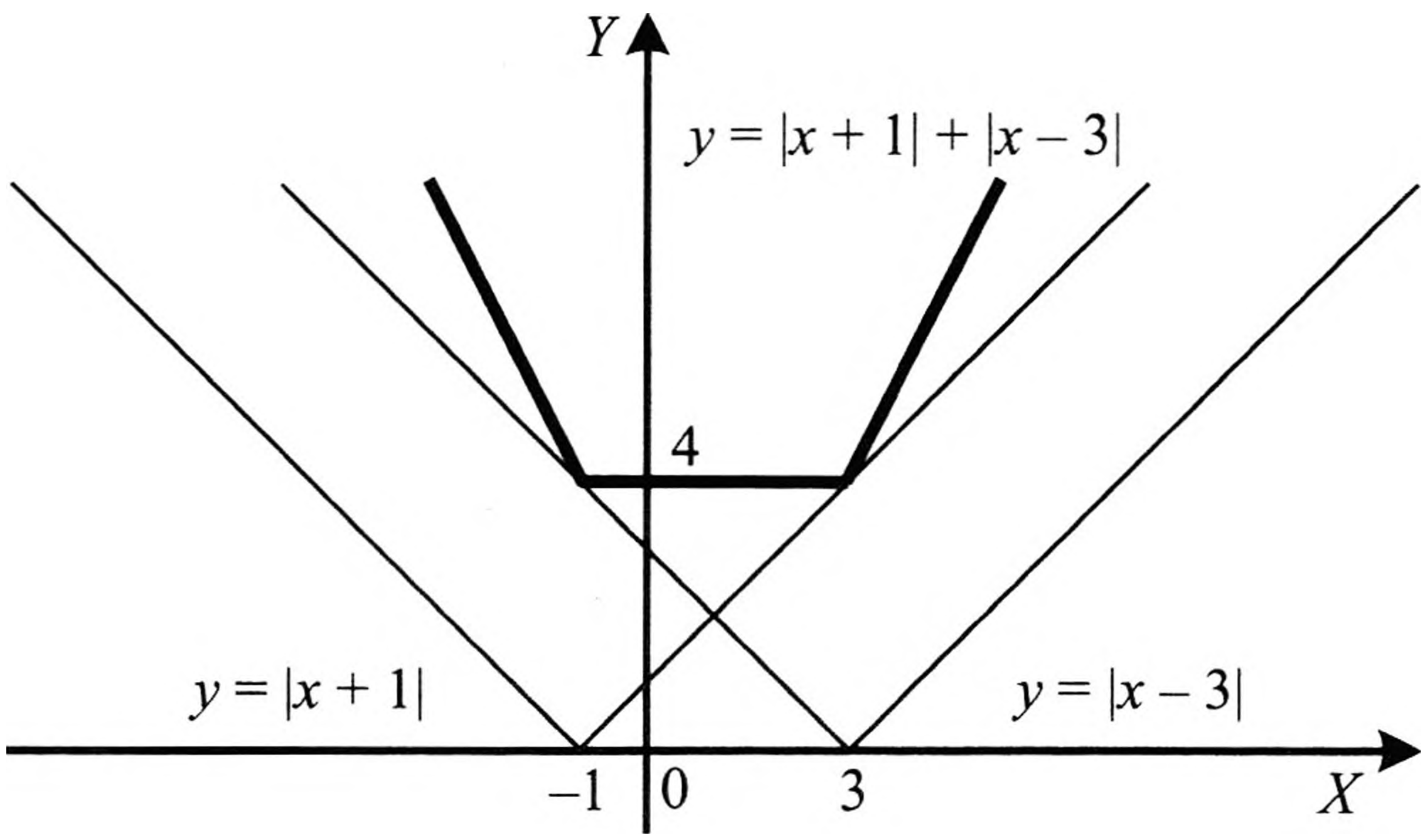
Давайте для примера построим график функции $y = |x + 1| + |x - 3|$.

График функции $y = |x + 1|$ сдвинут на 1 влево. График функции $y = |x - 3|$ — на 3 вправо. Осталось сложить два графика.

Складываем значения этих функций в ключевых точках $x = -1$ и $x = 3$ (это точки, в которых один из модулей равен нулю). А дальше — пользуемся очевидным правилом.

Сумма двух линейных функций также является линейной функцией.

Соединим отрезком точки $(-1; 4)$ и $(3; 4)$. Затем возьмем по одной точке на промежутках $x < -1$ и $x > 3$ и достроим график.



Чем так хороша эта схема? Вот, например, тренировочная задача.

> При каком значении параметра c уравнение $|x+1| + |x-3| = c$ имеет бесконечно много решений?

Мы уже умеем решать уравнения с модулем с помощью метода интервалов. Однако с помощью графика это намного быстрее!

При $c < 4$ уравнение не имеет решений.

При $c > 4$ уравнение имеет 2 решения.

И при $c = 4$ все значения x из промежутка $[-1; 3]$ являются решениями.

Ответ: $c = 4$.

Построение графиков функций

Построение графиков функций — одна из самых интересных тем в школьной математике. Умение строить графики необходимо и для решении задач с параметрами, и дальше, для изучения математического анализа.

Общая схема построения графика функции:

1. Область определения функции.

2. Область значений.

3. Нули функции (точки, в которых график пересекает оси координат).

4. Промежутки знакопостоянства функции (то есть промежутки, на которых она строго положительна или строго отрицательна).
5. Асимптоты (если есть).
6. Поведение функции в бесконечности.
7. Четность — нечетность (если есть).
8. Периодичность (если есть).
9. Производная функции.
10. Промежутки возрастания и убывания. Точки максимума и минимума и значения в этих точках.

Обратите внимание, что о производной мы вспоминаем далеко не сразу. Кроме нее, есть еще множество важных характеристик поведения функции. А на первом курсе к этой схеме добавится также нахождение точек перегиба и промежутков выпуклости (вогнутости) функции.

1. Построить график функции $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

Пользуемся нашей схемой.

Функция определена при всех x, кроме $x = \pm\dfrac{1}{2}$. В точках $x = \pm\dfrac{1}{2}$ имеет вертикальные асимптоты, то есть при приближении к этим точкам уходит в бесконечность.

Функция четная: $y(-x) = y(x)$.

График проходит через начало координат, то есть $y(0) = 0$.

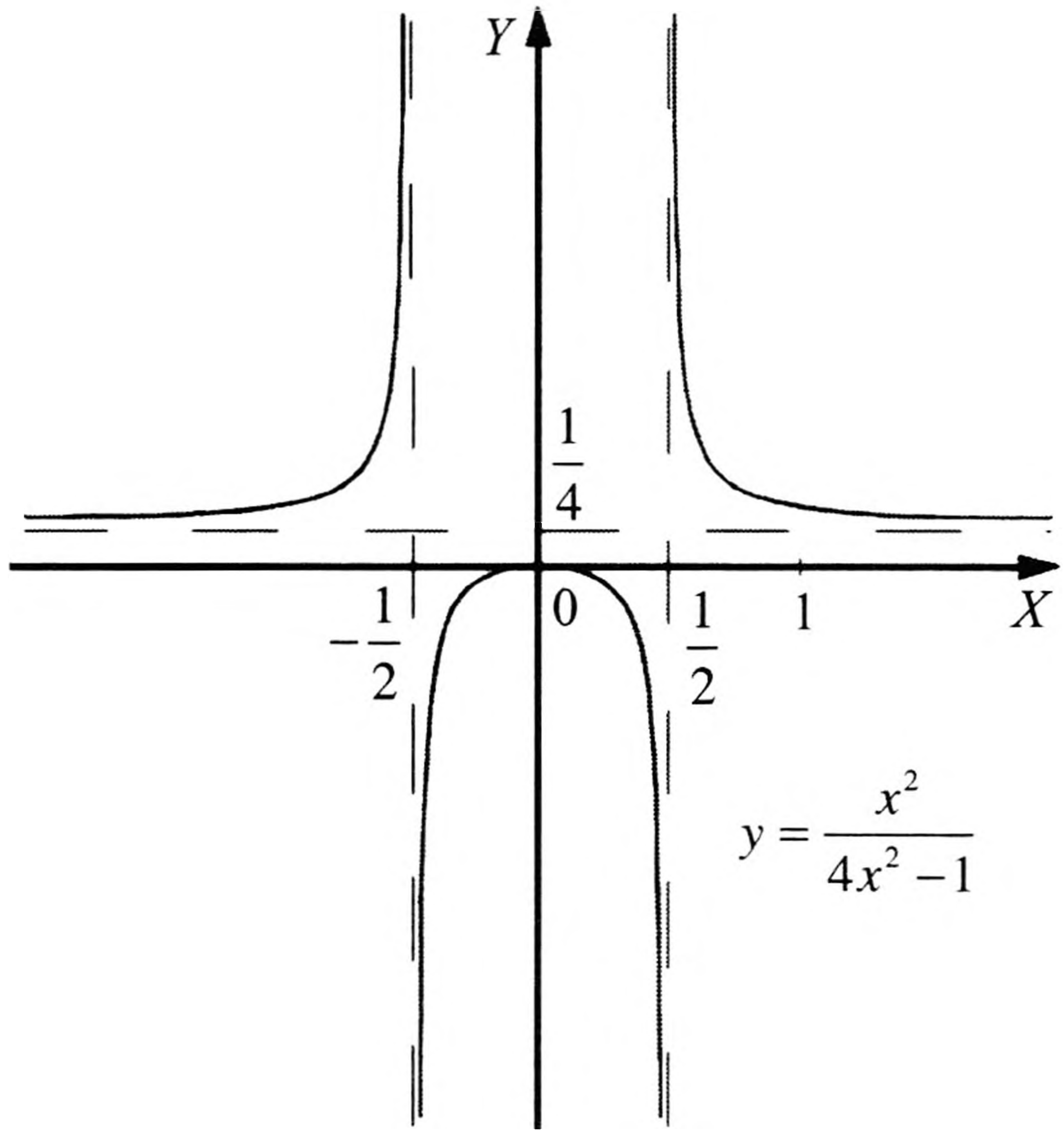
Знаки функции легко найти, применяя метод интервалов.

Функция положительна при $x < -\dfrac{1}{2}$ или $x > \dfrac{1}{2}$, равна нулю при $x = 0$, отрицательна на промежутках $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Посмотрим, что будет, когда x стремится к бесконечности. Возьмите, например, $x = 1000$, и подставьте в формулу функции. Что вы заметили? Верно ли, что тогда $4x^2 - 1$ почти не будет отличаться от $4x^2$? При бесконечно больших x единицей в знаменателе можно пренебречь, и значение функции будет стремиться к $\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$.

Итак, $y = \frac{1}{4}$ — горизонтальная асимптота данной функции.

Того, что мы уже знаем, достаточно для построения графика функции. Даже производная не понадобилась!



2. Построить график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

Функция определена при всех x, кроме $x = 0$. В точках $x = 0$ имеет вертикальную асимптоту, то есть при приближении к нулю уходит в бесконечность.

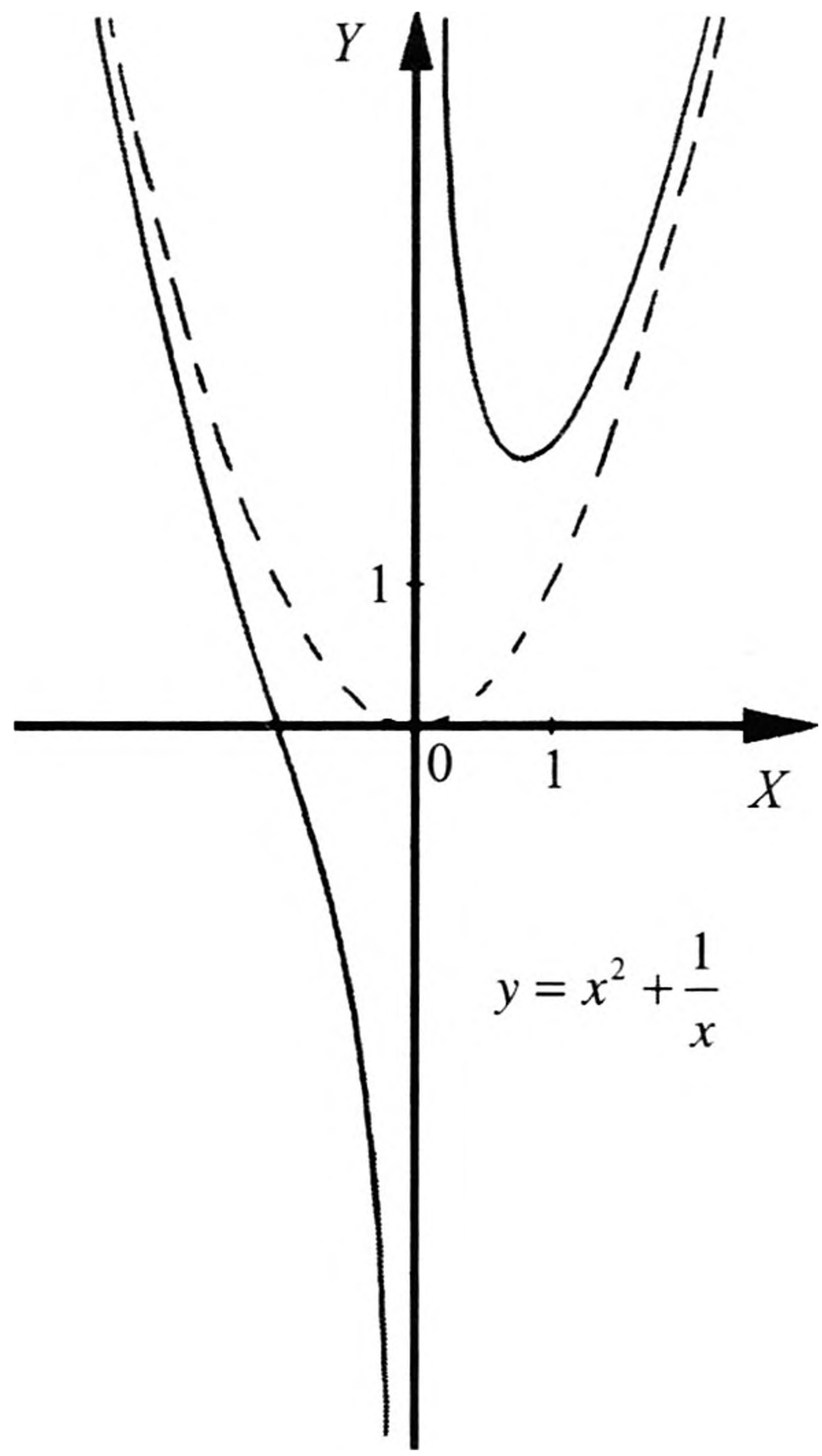
Общего вида, то есть ни четная, ни нечетная.

Нули функции: $y = 0$ при $x = -1$. Точек пересечения с осью Y нет.

Функция положительна при $x < -1$ или $x > 0$, равна нулю при $x = -1$, отрицательна на промежутке $(-1; 0)$.

Что будет, если x стремится к бесконечности? Тогда величина $\frac{1}{x}$ будет пренебрежимо мала, и функция ведет себя как парабола $y = x^2$.

Вот как выглядит график функции. Если же мы хотим точно узнать, где будет точка минимума этой функции, надо найти производную и приравнять ее к нулю.



Задачи с параметрами формата ЕГЭ по математике

Эта тема так интересна и многогранна, что ей надо посвятить отдельную книгу, причем более толстую, чем та, которую вы читаете. Сейчас мы познакомим вас с типичными приемами решения задач с параметрами и покажем, в каком направлении двигаться дальше в освоении этой темы.

Квадратные уравнения и неравенства с параметрами

1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$$

не имеет действительных корней.

Посмотрим внимательно на уравнение. Всегда ли оно является квадратным относительно переменной x? — Нет, не всегда. В случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, оно, как говорят, «вырождается» в линейное.

Поэтому отдельно рассмотрим два случая — когда данное уравнение квадратное и когда оно линейное.

1) $a-2=0 \Rightarrow a=2$.

Тогда уравнение примет вид $2 = 0$. Такое уравнение не имеет действительных корней, что удовлетворяет условию задачи.

2) $a \neq 2$.

Тогда уравнение будет квадратным. Квадратное уравнение не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицательный.

Найдем дискриминант D:

$$D = b^2 - 4ac = 4(a-2)^2 - 8(a-2) < 0.$$

$$(a-2)^2 - 2(a-2) < 0.$$

Вынесем $(a - 2)$ за скобки.

$$(a-2)(a-4) < 0.$$

Решив неравенство методом интервалов относительно a, получим

$$a \in (2; 4).$$

С учетом пункта 1, получим ответ: $a \in [2; 4)$.

Теперь мы сможем ответить на вопрос, что же это такое — задача с параметром?

В уравнении, которое мы только что рассмотрели, кроме переменной x, содержалась еще буква a. Причем эта буква может принимать любые допустимые значения, и в зависимости от нее уравнение имеет различные решения или вообще не имеет решений. В нашем случае при $a = 2$ уравнение становится линейным. При других значениях параметра a уравнение будет квадратным, и в зависимости от a у него либо есть корни, либо их нет.

Фраза «решить уравнение для каждого значения параметра a» означает, что нужно рассмотреть все возможные случаи в зависимости от параметра a. В тех случаях, когда решения есть, их надо выразить через a.

Вот другая иллюстрация понятия «параметр». График функции $y = x^2 + a$ будет сдвинут вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$, или пройдет через ноль, если $a = 0$. При разных значениях параметра мы получаем разные графики!

И вот пример из физики. Уравнение Клапейрона–Менделеева связывает между собой три переменных — объем, давление и температуру идеального газа. И это при условии, что масса газа остается постоянной!

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Если температура постоянна, мы получаем знакомый вам изотермический процесс, описываемый уравнением $p = \frac{\text{const}}{V}$, причем константа в этом уравнении зависит от температуры. Чем выше температура T, тем выше в координатах V, p располагается изотерма.

Можно сказать, что при разных значениях параметра T получаются разные изотермы и, соответственно, разные формулы для зависимости p от V. Значение параметра определяет вид функции.

Раньше в этой книге мы говорили о функциях одной переменной, о зависимостях одной переменной от другой по определенному закону или правилу. Однако в жизни чаще всего в одном уравнении связаны между собой несколько величин. Так, как в приведенном выше уравнении Клапейрона–Менделеева. Вот почему для нас так важно изучение задач с параметром. Они описывают ситуации и процессы, где факторов, влияющих на результат, может быть несколько.

Вернемся к нашим задачам.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов действительных корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

минимальна.

Первая мысль, которая приходит в голову, — найти дискриминант и выразить корни квадратного уравнения по известной формуле. Конечно, это сделать можно, если времени не жалко. Представьте, какой сложной будет формула для этой суммы квадратов! Поищем другой способ.

В условии сказано: «Сумма квадратов действительных корней...» Это значит, во-первых, что корни есть, а во-вторых, их должно быть два. А это будет в случае, когда дискриминант положителен ($D > 0$).

Чтобы исследовать сумму квадратов действительных корней уравнения, вспомним теорему Виета. Она дает соотношения для корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

В нашем случае, с учетом условия $D > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - 4(a-2) > 0, \\ x_1 + x_2 = a, \\ x_1 x_2 = a - 2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы

$$a^2 - 4(a-2) > 0,$$

$$a^2 - 4a + 8 > 0.$$

Квадратный трехчлен в левой части не имеет корней, так как его дискриминант равен –32, то есть отрицателен. Поэтому неравенство будет выполняться для всех действительных значений a.

Возведем второе уравнение системы в квадрат

$$\begin{cases} {x_1}^2 + 2x_1 x_2 + {x_2}^2 = a^2, \\ x_1 x_2 = a - 2. \end{cases}$$

Из этих двух уравнений выразим через параметр a сумму квадратов x_1 и x_2.

$$x_1^2 + 2(a-2) + x_2^2 = a^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2(a-2),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 4.$$

Значит, сумма квадратов корней исходного уравнения

$$S = a^2 - 2a + 4.$$

Данное выражение является квадратным трехчленом, график функции $S(a)$ — парабола, ветви направлены вверх. Поэтому минимум будет достигаться в ее вершине. Найдем вершину параболы

$$a_в = \frac{2}{2} = 1.$$

Ответ: 1

3. Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

положительны.

Как и в первой задаче, уравнение является квадратным, кроме случая, когда $a - 3 = 0$. Рассмотрим этот случай отдельно.

1) $a = 3$. Получим линейное уравнение

$$-6x + 15 = 0,$$

$$x = 2,5.$$

У него единственный корень, причем положительный. Это удовлетворяет условию задачи.

2) $a \neq 3$. Тогда уравнение будет квадратным. Нам надо, чтобы решения существовали, причем были положительными. Раз решения есть, то $D \geq 0$.

Сейчас мы покажем замечательный прием решения квадратичных уравнений и неравенств с параметрами. Он основан на следующих простых утверждениях.

Оба корня квадратного уравнения x_1 и x_2 положительны тогда и только тогда, когда их сумма положительна и произведение положительно.

Очевидно, что сумма и произведение двух положительных чисел также положительны. И наоборот — если сумма и произведение двух чисел положительны, то и сами числа положительны.

Оба корня квадратного уравнения и отрицательны тогда и только тогда, когда их сумма отрицательна, а произведение положительно.

Корни квадратного уравнения x_1 и x_2 имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно.

Сумма и произведение корней входят в формулировку теоремы Виета, которой мы и воспользуемся. Получим

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 5a(a-3) \ge 0, \\ \dfrac{2a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(4a-15) \le 0, \\ \dfrac{2a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0. \end{cases}$$

Второе и третье неравенства имеют одинаковое решение $a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Решение первого неравенства: $a \in [0; 3,75]$.

Решение системы: $a \in [0; 3,75]$.

С учетом пункта 1 получим ответ.

Ответ: $a \in [0; 3,75]$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$$

имеет единственное решение?

Уравнение является показательным, причем однородным. Мы умеем решать такие уравнения! Разделим обе части на $9^x \ne 0$.

Получим:

$$(a-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + (2a-3)\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3a-4.$$

Заменой $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t,\ t > 0$, оно сводится к следующему:

$$(a-1)t^2 + (2a-3)t - (3a-4) = 0.$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело единственное решение, нужно, чтобы уравнение относительно t имело ровно один положительный корень.

1) В случае $a = 1$ уравнение будет линейным

$$-t+1=0,$$

$$t=1.$$

Оно имеет единственный корень, причем положительный, что удовлетворяет условию задачи.

2) В случае $a \neq 1$ уравнение будет квадратным.

Его дискриминант

$$D=(2a-3)^2+4(a-1)(3a-4)=16a^2-40a+25=(4a-5)^2.$$

Дискриминант является полным квадратом. Значит, он всегда неотрицателен, и уравнение имеет либо один, либо два корня. В этом случае несложно найти корни в явном виде.

$$t_1=\frac{3-2a+4a-5}{2(a-1)}=\frac{2a-2}{2a-2}=1$$

$$t_2=\frac{3-2a-4a+5}{2(a-1)}=\frac{4-3a}{a-1}$$

Один корень получился не зависящим от параметра, причем положительным. Это упрощает задачу.

Для того, чтобы уравнение имело единственный положительный корень, нужно, чтобы второй был отрицательным либо равным нулю, либо чтобы корни совпадали. Рассмотрим все случаи.

а) $t_2 \le 0 \Rightarrow \dfrac{4-3a}{a-1} \le 0.$

Тогда $a \in (-\infty;1) \cup \left[\dfrac{4}{3};+\infty\right).$

б) $t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow \dfrac{4-3a}{a-1} = 1,$

$a = 1{,}25.$

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $a \in (-\infty;1] \cup \{1{,}25\} \cup \left[\dfrac{4}{3};+\infty\right).$

Квадратные уравнения и неравенства с параметром — обширная и непростая тема. Сейчас мы лишь немного познакомились с ней. Для ее полного освоения рекомендуем вам следующие книги:

1) *В. В. Ткачук.* Математика — абитуриенту.

2) *Виктор Высоцкий.* Задачи с параметрами.

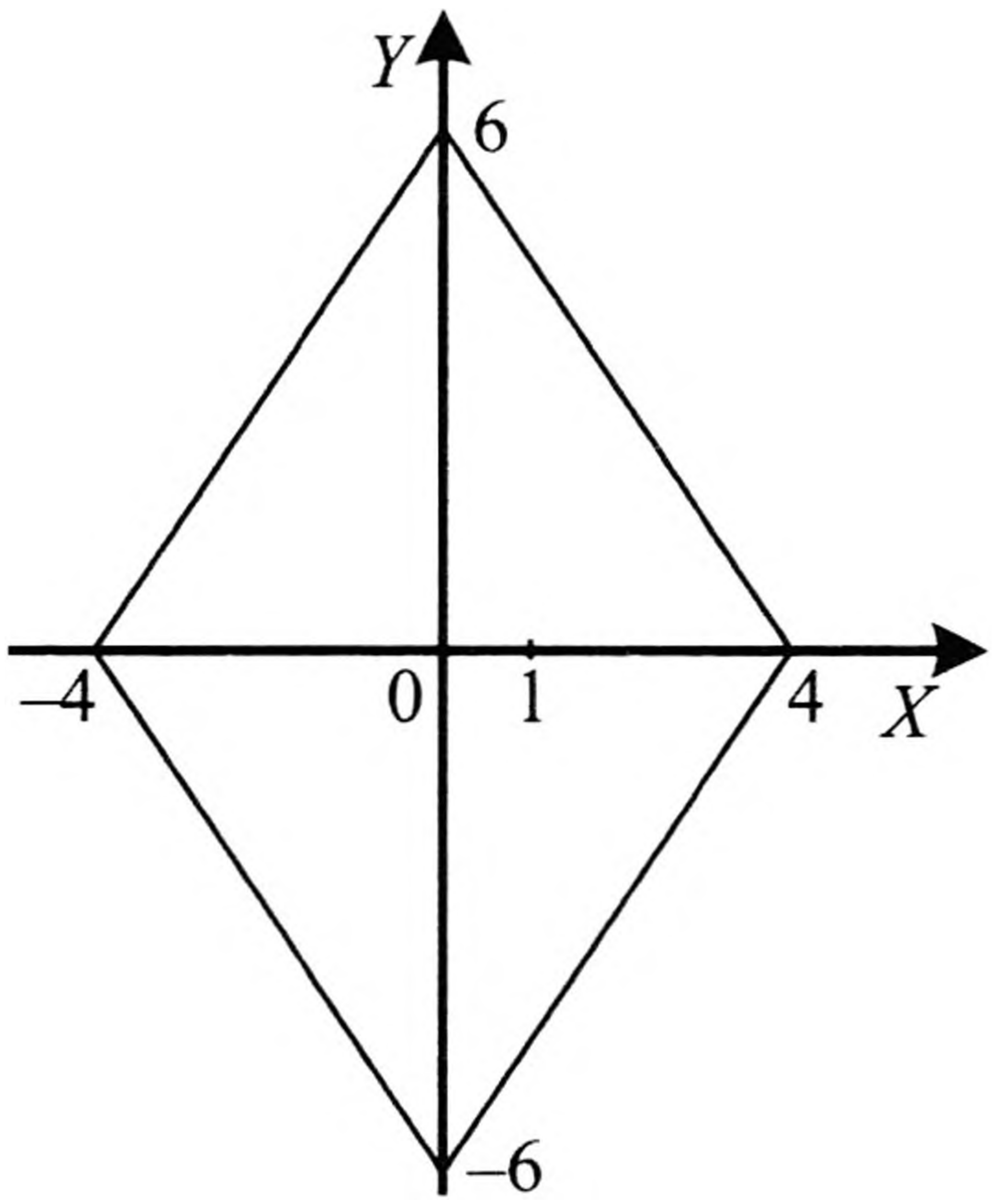
Графический метод решения задач с параметрами

5. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x|+2|y|=12; \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Графиком первого уравнения $3|x|+2|y|=12$ является ромбик с вершинами (4; 0), (–4; 0), (0; 6), (0; –6). Эти точки легко найти, поочередно подставим в уравнение $x = 0$ и $y = 0$.



Графиком второго уравнения $x^2 + y^2 = a$ является окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$ при $a > 0$. При $a = 0$ графиком будет точка (0; 0). При $a < 0$ решений нет.

Значение параметра определяет радиус окружности.

Чтобы исходная система имела максимальное число решений, необходимо и достаточно, чтобы графики ромба и окружности имели максимальное количество точек пересечения.

Возможны следующие случаи.

— Окружность и ромб не пересекаются (окружность расположена внутри ромба), значит, система решений не имеет.

— Окружность касается ромба в четырех точках, значит, система имеет четыре решения.

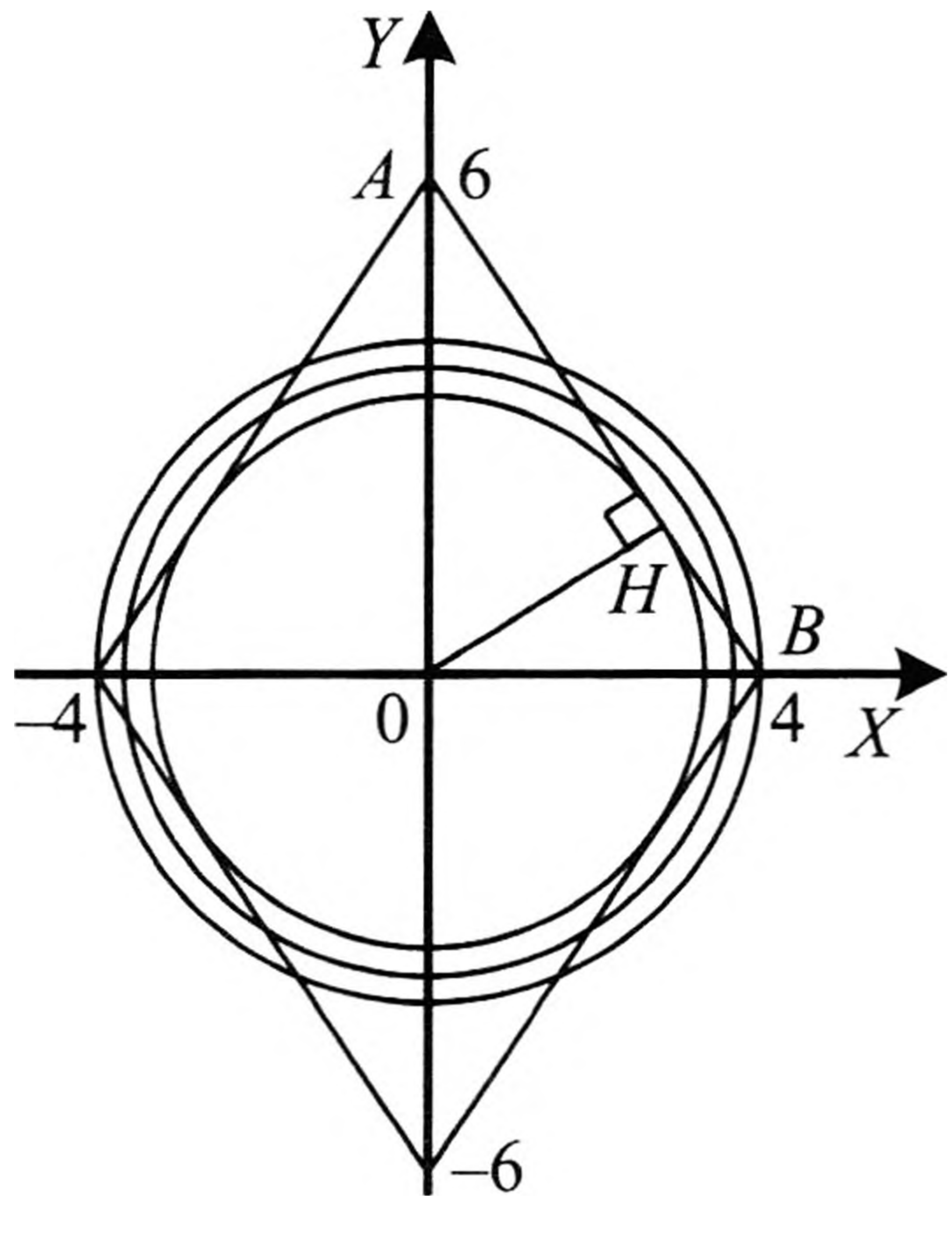
— Окружность пересекает ромб в восьми точках, значит, система имеет восемь решений.

— Окружность пересекает ромб в шести точках (две из них — вершины ромба), значит, система имеет шесть решений.

— Окружность пересекает стороны ромба в четырех точках, значит, система имеет четыре решения.

— Окружность пересекает ромб в двух вершинах, значит, система имеет два решения.

— Окружность и ромб не пересекаются (ромб расположен внутри окружности), значит, система решений не имеет.



Получается, что максимально возможное количество решений — восемь.

Рассмотрим треугольник AOB. Он прямоугольный. $AO = 6$, $OB = 4$, гипотенуза $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$. Радиус окружности

OH перпендикулярен касательной AB. Высота OH, проведенная к гипотенузе, равна

$$OH = \frac{OB \cdot OA}{AB} = \frac{4 \cdot 6}{\sqrt{52}} = \frac{24}{2\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}.$$

Радиус большей окружности $OB = 4$.

Значит, $OH < \sqrt{a} < OB \Rightarrow \frac{12\sqrt{13}}{13} < \sqrt{a} < 4 \Rightarrow \frac{144}{13} < a < 16.$

Ответ: $a \in \left(\frac{144}{13};16\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$$

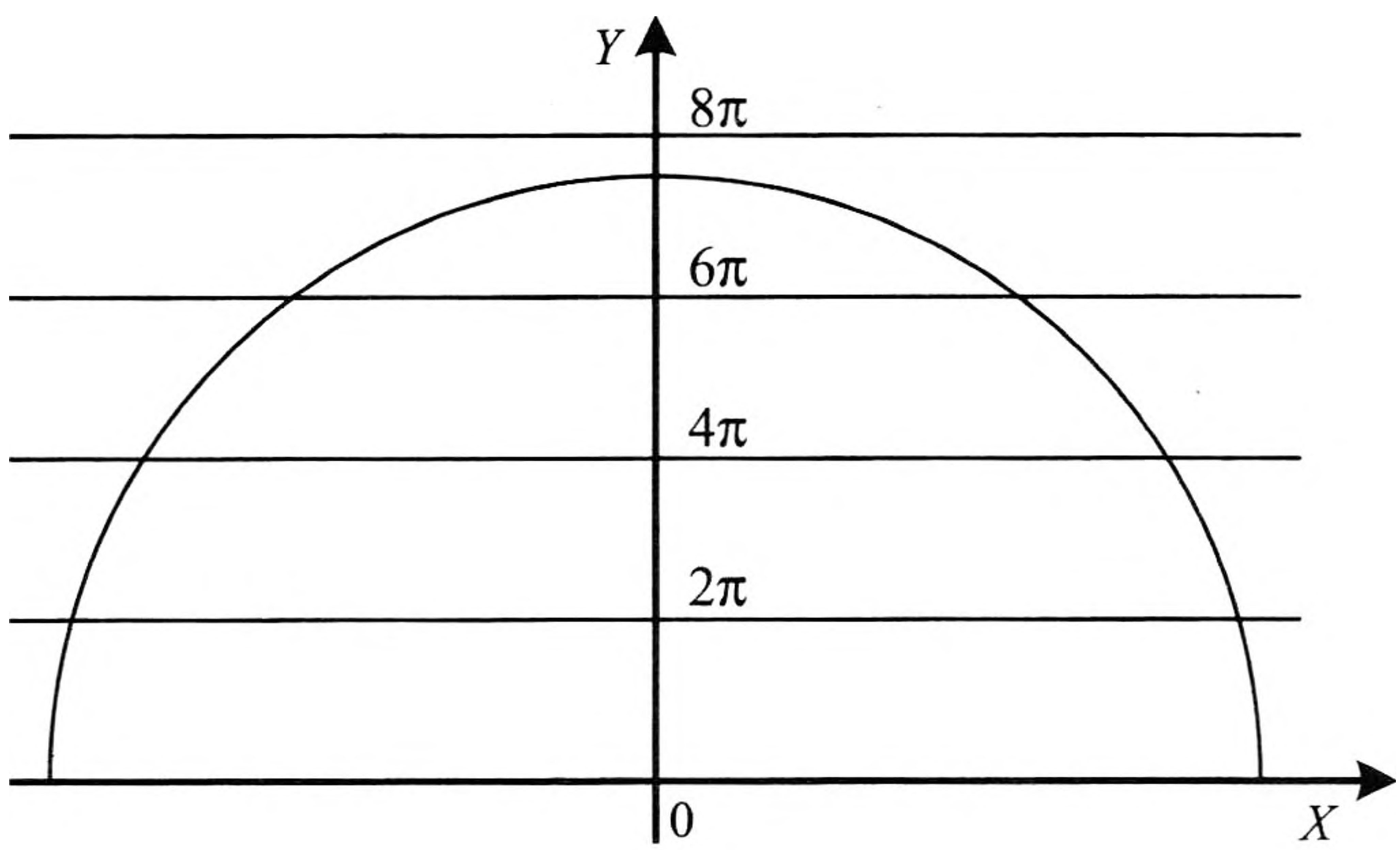
имеет ровно восемь различных решений.

У этой задачи есть интересная особенность — можно «проскочить» мимо правильного решения и запутаться.

Итак, перед нами тригонометрическое уравнение. Решаем его:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Графиком функции в левой части будет верхняя полуокружность с радиусом $R = |a|$ и центром в начале координат. Получается, что ее радиус зависит от параметра. Графиком функции в правой части будут прямые, параллельные оси X, то есть прямые $y = 0$; $y = 2\pi$; $y = 4\pi$; $y = 6\pi$; $y = 8\pi$… $y = 2\pi n$, где n — целое.



Получим, что восемь точек пересечения прямые будут иметь с полуокружностью, когда ее радиус меньше значения 8π и больше значения 6π.

$$6\pi < |a| < 8\pi,$$
$$a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi).$$

Ответ: $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

7. Дано уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a-x+2>0, \\ 1-x>0, \\ 1-x \neq 1, \\ a-x+2=(1-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x+2>0, \\ 1-x>0, \\ x \neq 0, \\ a-x+2=(1-x)^2. \end{cases}$$

Присмотримся к этой системе. В первом неравенстве и четвертом уравнении оставим в левой части параметр a, а все остальное перенесем в правую часть. Второе и третье неравенства вообще не зависят от параметра.

$$\begin{cases} a > x-2, \\ x \neq 0, \\ x < 1, \\ a = x^2 - x - 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решить графически.

Правда, строить графики мы будем не в координатах xOy, а в координатах xOa, — ведь в системе есть только x и a.

Первое неравенство задает область (полуплоскость), расположенную выше прямой $a = x - 2$, не включая саму прямую.

Третье неравенство задает полуплоскость левее прямой $x = 1$, не включая саму эту прямую.

Четвертое уравнение задает обычную параболу. Ее ветви направлены вверх, вершина находится в точке A (0,5; –1,25), точка пересечения с осью a M $(0; -1)$, точки пересечения с осью x: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ и $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$. При этом, согласно условию, $x \neq 0$, то есть точка $(0; -1)$ будет выколотой.

Определим, где пересекаются графики функции $a = x - 2$ и $a = x^2 - x - 1$. Для этого решим систему уравнений:

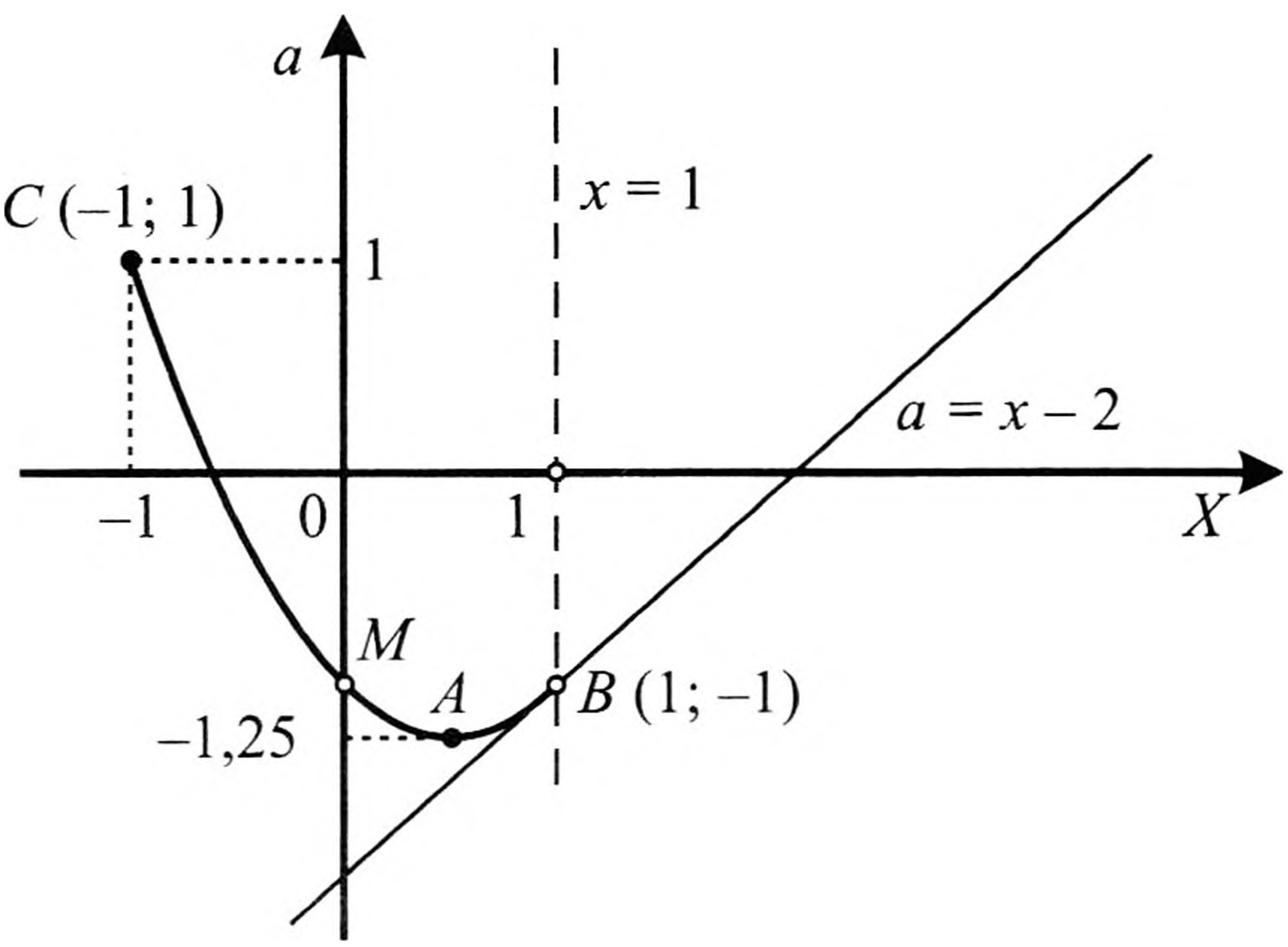
$$\begin{cases} x-2=x^2-x-1, \\ a=x-2. \end{cases}$$

Получим: $x = 1$, $a = -1$.

На нашем рисунке это точка B $(1; -1)$.

График функции $x = 1$ также проходит через эту точку, то есть все три графика пересекаются в единственной точке B $(1; -1)$.

Условию задачи удовлетворяет часть параболы на промежутке $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.



Нам надо, чтобы на промежутке $[-1; 1)$ было хотя бы одно решение. Заметим, что правый конец промежутка совпадает с правым концом кусочка параболы, причем эта точка является выколотой. Левый конец промежутка $x = -1$ соответствует точке C $(-1; 1)$, принадлежащей параболе.

Осталось определить нужные значения параметра. Для этого выясним, в скольких точках прямая a пересекает график.

При $a < -1{,}25$ прямая a не пересекает график и решений нет (наименьшее значение квадратичной функции равно $-1{,}25$). Значит, это значение нам не подходит.

При $a = -1{,}25$ прямая a касается параболы в вершине A, одно решение. Этот случай нам подходит.

Если прямая a проходит через точки B и M ($a = -1$), то она не пересекает график, так как обе точки являются выколотыми. Значит, решений нет, и этот случай нам не подходит.

Если прямая a расположена между точками A и B при $a \in (-1{,}25; -1)$, то она будет пересекать график в двух точках, поэтому будет два решения. Этот случай нам также подходит.

При $a > -1$ прямая a будет пересекать график в одной точке и решение будет одно вплоть до случая, когда прямая a проходит через точку C, $a = 1$ (включительно). Этот случай нам подходит.

При $a > 1$ прямая a пересекает график в одной точке, но x уже не принадлежит указанному промежутку. Решений нет, и это нам не подходит.

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $a \in [-1,25;-1) \cup (-1;1]$.

8. При каких значениях параметра c уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = c + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет решения?

Сделаем замену $2^{2x-x^2} = t,\ t > 0$.

Найдем, какие значения может принимать функция $t(x)$. Очевидно, что $t > 0$, так как функция $t(x)$ является показательной. Однако это не все.

Легко доказать (нарисовав параболу), что наибольшее значение выражения $2x - x^2$ достигается при $x = 1$, и это значение равно 1.

Поскольку показательная функция с основанием 2 монотонно возрастает и большему значению показателя соответствует большее значение функции, наибольшее значение выражения 2^{2x-x^2} достигается, когда выражение $2x - x^2$ принимает свое наибольшее значение, то есть при $x = 1$.

Итак, если $x = 1$, то $2x - x^2 = 1$, и тогда $t(1) = t_{\max}(x) = 2$.

Мы нашли наибольшее значение функции $t(x) = 2^{2x - x^2}$.

Значит, $t \in (0; 2]$.

Решим наше уравнение относительно t.

$$2\cos^2 t = c + \sqrt{3}\sin 2t.$$

Перенесем все, что не зависит от параметра, в левую часть.

$$2\cos^2 t - \sqrt{3}\sin 2t = c.$$

По формуле понижения степени $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$, значит

$$1 + \cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t = c,$$

$$\cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t = c - 1.$$

Применим метод введения вспомогательного угла, разделив обе части уравнения на 2.

$$\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t = \frac{c-1}{2},$$

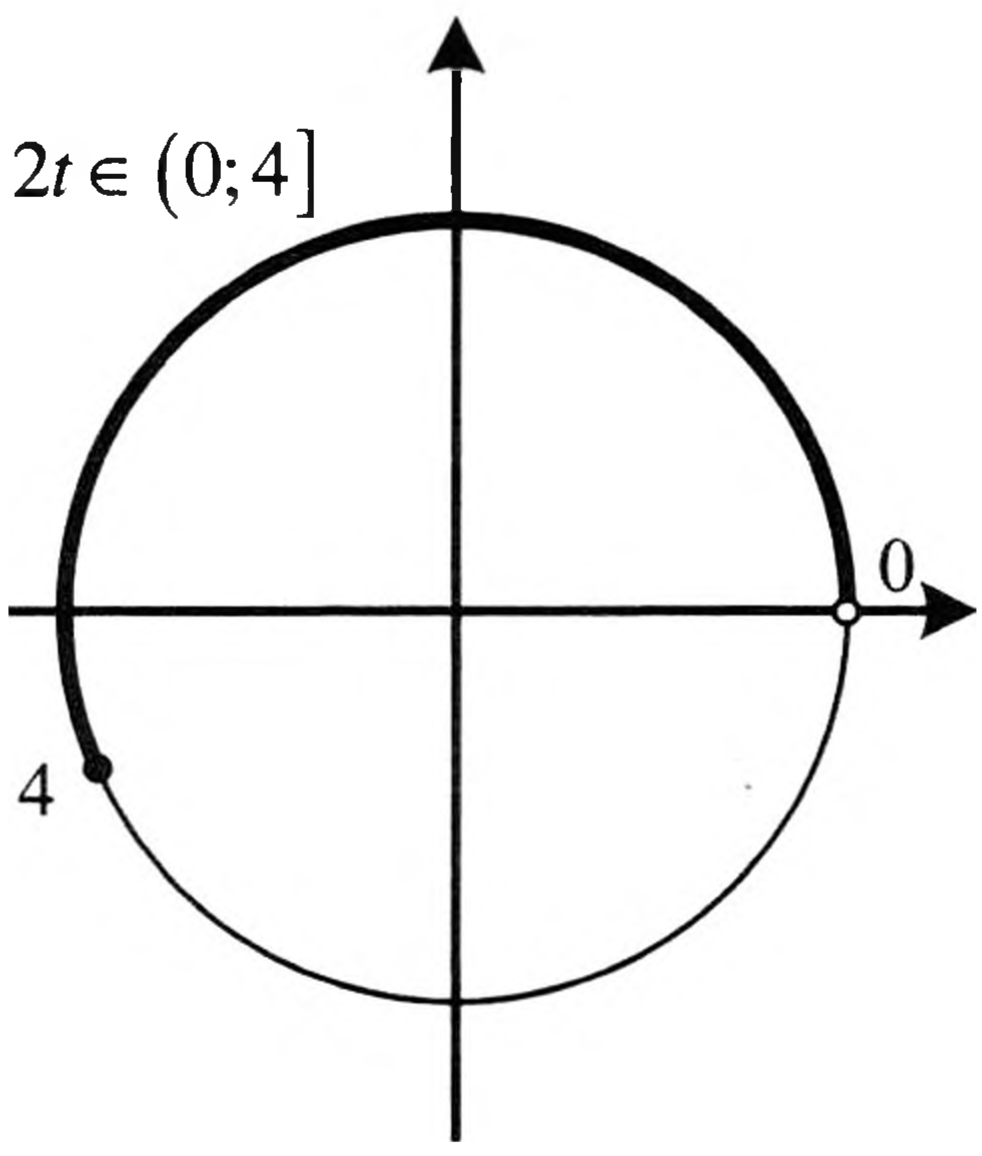
$$\cos\frac{\pi}{3}\cos 2t - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2t = \frac{c-1}{2},$$

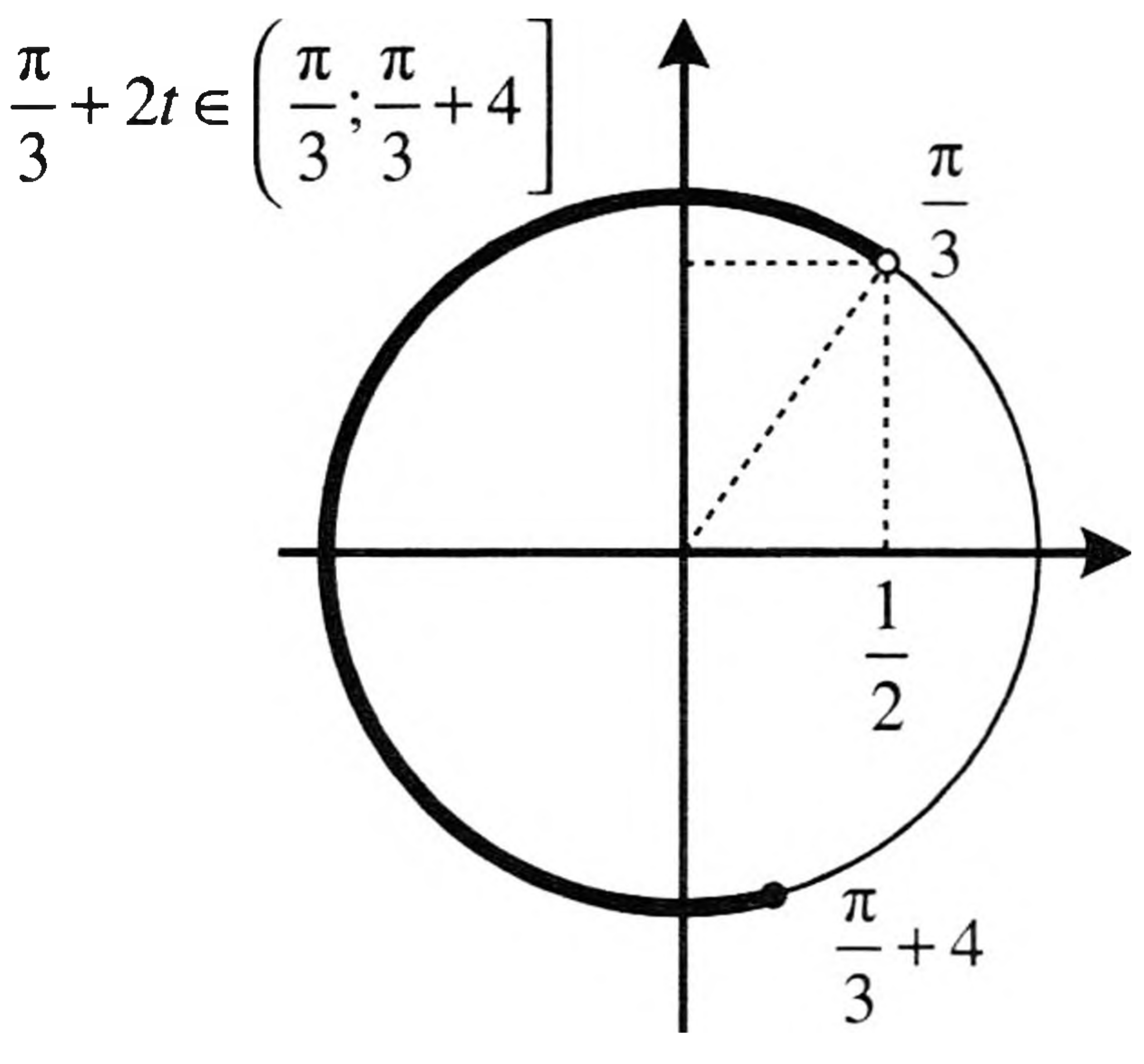
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2t\right) = \frac{c-1}{2}.$$

Пусть угол $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2t$. Тогда $\cos\varphi = \frac{c-1}{2}$.

Выясним, какие значения может принимать $\cos\varphi$.

Так как $t \in (0; 2]$, то $2t \in (0; 4]$, а $\frac{\pi}{3} + 2t \in \left(\frac{\pi}{3}; 4 + \frac{\pi}{3}\right]$. Изобразим этот промежуток на тригонометрической окружности.





Получаем, что если $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2t \in \left(\frac{\pi}{3}; 4 + \frac{\pi}{3}\right]$, то $\cos\varphi \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

Это значит, что

$$-1 \le \frac{c-1}{2} < \frac{1}{2},$$

$$-2 \le c - 1 < 1,$$

$$-1 \le c < 2.$$

Поскольку $-1 \le \cos\varphi \le 1$ и $\cos\varphi = \frac{c-1}{2}$, мы имеем дополнительное условие:

$$-1 \le \frac{c-1}{2} \le 1,$$

$$-2 \le c - 1 \le 2,$$

$$-1 \le c \le 3.$$

Ответом является пересечение полученных промежутков.

Ответ: $c \in [-1; 2)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}.$$

Решение сложных задач мы рекомендуем начинать с замены переменной. Это позволит увидеть главное — структуру уравнения.

Обозначим $t = 2^{|x|}$.

Конечно же, $t > 0$, поскольку это значение показательной функции. А есть ли еще ограничения для t?

Очевидно, что $|x| \ge 0$, поэтому $2^{|x|} \ge 2^0 \Rightarrow 2^{|x|} \ge 1 \Rightarrow t \ge 1$.

Мы получили более строгую оценку для t. Если ее не сделать, ответ будет неверным.

Если $t = 2^{|x|}$, то $4^{|x|} = t^2$.

Уравнение примет вид $t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$.

Это уравнение — квадратное относительно t.

Заметим, что если при каком-либо значении a корнем данного уравнения будет $t = 1$, то такое значение a нам точно не подходит.

В самом деле, при $t = 1$ получим, что $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Тогда исходное уравнение относительно x имеет либо единственный корень $x = 0$, либо нечетное число корней, среди которых будет $x = 0$. А по условию задачи, нам надо получить два различных корня.

Два решения у исходного уравнения будет только, если $|x|$ не равен нулю. При этом переменная t будет принимать значения $t > 1$.

Продолжаем исследовать уравнение $t^2 - \dfrac{7a}{a-5} \cdot t + \dfrac{12a+17}{a-5} = 0$.

Если это уравнение имеет два различных положительных корня, то исходное уравнение имеет 4 решения. Такой случай нам тоже не подходит.

Исходное уравнение имеет 2 решения, когда корень $t > 1$ — единственный. Это возможно в нескольких случаях.

1) Этот корень у уравнения вообще единственный, то есть $D = 0$. Получается система условий:

$$\begin{cases} D = 0, \\ t > 1. \end{cases}$$

Найдем дискриминант и приравняем его к нулю.

$$D = \frac{49a^2}{(a-5)^2} - 4 \cdot \frac{12a+17}{a-5},$$

$$a^2 + 172a + 2 \cdot 170 = 0,$$

$$a_1 = -170, a_2 = -2.$$

Заметим, что считать дискриминант в данном уравнении довольно сложно. Проще воспользоваться теоремой Виета.

Сумма корней равна -172 (оба отрицательны), произведение корней $2 \cdot 170$ (положительно). Мы подобрали корни! $a_1 = -170$, $a_2 = -2$.

Подставим значения a, при которых дискриминант равен нулю, в исходное уравнение. Если $a = -2$, получим:

$$t^2 - \frac{7 \cdot (-2)}{-2-5} \cdot t + \frac{12 \cdot (-2) + 17}{-2-5} = 0,$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0.$$

При $a = -2$ дискриминант действительно равен нулю, $t = 1$. Мы уже говорили, что такое значение t не удовлетворяет условию задачи.

При $a = -170$ получим:

$$t = \frac{7a}{2(a-5)} = \frac{7\cdot(-170)}{2\cdot(-170-5)} = 3,4 > 1.$$

Этот случай нам подходит.

В каких же еще случаях будет выполняться условие задачи? Видимо, в том случае, если уравнение $t^2 - \frac{7a}{a-5}\cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$ имеет два корня, но только один из них больше единицы.

Очевидно, что $D > 0$ при $a \in (-\infty; -170) \cup (-2; +\infty)$.

Запишем, что $t_1 > 1$, $t_2 \le 1$.

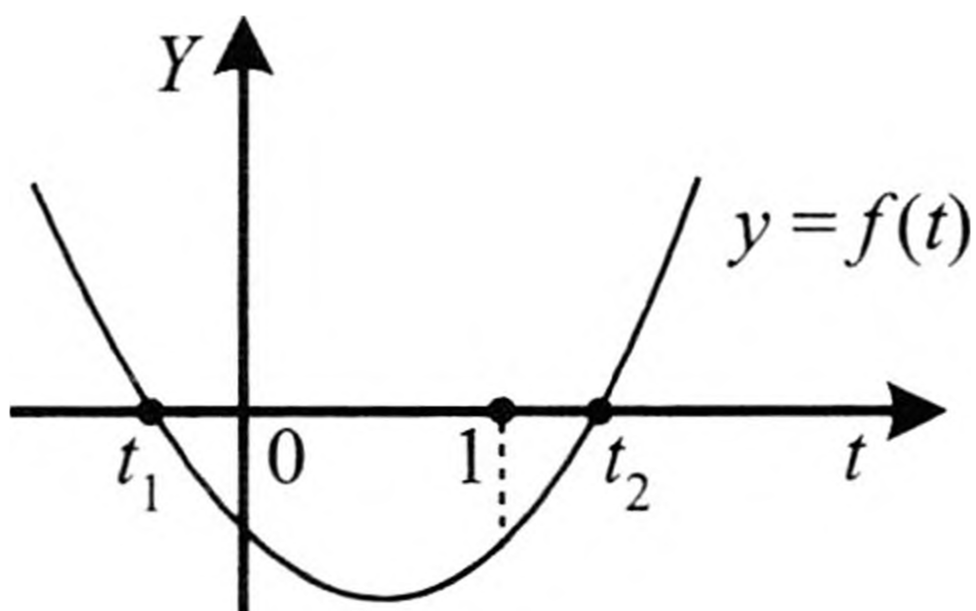
$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} D > 0, \\ t_1 > 1, \\ t_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Случаи, когда $t_2 < 1$ и $t_2 = 1$ удобно рассмотреть по отдельности.

2) $\begin{cases} t_1 > 1, \\ t_2 < 1. \end{cases}$ Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(t) = t^2 - \frac{7a}{a-5}\cdot t + \frac{12a+17}{a-5}.$$

Ее график — парабола (ветви направлены вверх), имеющая две точки пересечения с осью t (так как дискриминант положительный). Нужно, чтобы один корень был больше единицы, а другой — меньше единицы. Значит, единица находится между корнями. Это значит, что в точке $x = 1$ функция принимает отрицательное значение, то есть $f(1) < 0$.



Подставим значение $t = 1$ в формулу функции и получим неравенство.

$$1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}<0.$$

Решив неравенство, получим $a\in(-2;5)$.

3) $\begin{cases} t_1>1, \\ t_2=1. \end{cases}$ Подставим корень $t = 1$ в уравнение

$$1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}=0.$$

Получим $a = -2$. Этот случай у нас уже был. В этом случае корень будет единственным и равным 1. Второго корня, большего единицы, нет.

Объединив все случаи, получим ответ.

Ответ: $\{-170\}\cup(-2;5)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+7+a|$$

имеет единственный корень.

Сейчас мы познакомим вас с новой идеей в решении задач с параметрами.

Прежде всего, обратим внимание на повторяющиеся элементы в этом уравнении. Мы можем сделать замену $a + 7 = b$. Получим:

$$x^2+b^2=|x-b|+|x+b|.$$

В правой части — уже знакомая нам сумма модулей. Помните, мы говорили, что эта схема часто встречается в задачах с параметром. Конечно, можно решать уравнение графически, построив графики левой и правой его частей, однако у этого способа есть недостаток: как мы узнаем, пересекаются графики в одной точке или у них еще есть точки касания?

Поэтому выберем другой способ. Обозначим функции в левой и правой частях уравнения как $f(x)$ и $g(x)$.

$$f(x)=x^2+b^2;$$

$$g(x)=|x-b|+|x+b|.$$

Заметим, что $f(x)$ и $g(x)$ — четные относительно x, так как их области определения симметричны относительно нуля и $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$.

Значит, если x_0 — корень уравнения, то и $(-x_0)$ — тоже его корень. Поэтому единственное решение может быть только при $x_0=0$. В этом и состоит идея решения таких задач.

Однако это условие является необходимым, но не достаточным. Может быть так, что $x_0=0$ — один из корней уравнения, и при этом есть еще решения. Тогда общее количество решений уравнения нечетно.

Чтобы выяснить, какие корни будут у уравнения, помимо $x_0=0$, подставим $x_0=0$ в уравнение.

Получим:

$b^2=2|b|$,

$b=0$ или $b=-2$ или $b=2$.

Теперь каждое из найденных значений надо проверить. Подставим их по очереди в исходное уравнение и найдем, сколько решений оно будет иметь при каждом таком b.

1) $b=0$.

$x^2=2|x|$,

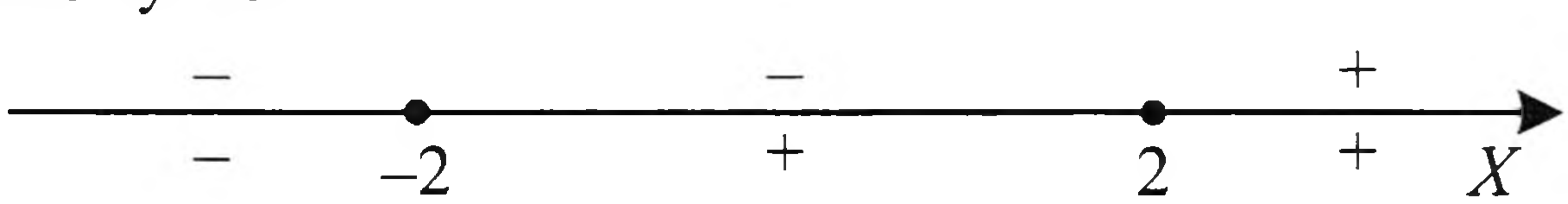
$x=0,\ x=-2,\ x=2$.

Исходное уравнение имеет 3 корня, и это нам не подходит.

2) $b=2$.

$x^2+4=|x-2|+|x+2|$.

Уравнение решается методом интервалов для модулей. На числовой прямой отмечаем точки –2 и 2 и решаем уравнение на каждом промежутке.



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2,\\ -x+2-x-2=x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 2,\\ -x+2+x+2=x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x-2+x+2=x^2+4.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2,\\ x\in\varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 2,\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x\in\varnothing.\end{cases}\end{array}\right.$$

Получим единственное решение $x = 0$. Нам это подходит. При этом $b = 2$, $a + 7 = 2$, $a = -5$.

3. При $b = -2$ уравнение тоже имеет один корень. Эта ветвь решения дает в результате: $b = -2$, $a + 7 = -2$, $a = -9$.

Ответ: -9, -5.

10. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a\cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Сделаем замену $t = 2^{-x^2}$, $t > 0$.

Оценим t.

$$-x^2 \le 0,$$

$$2^{-x^2} \le 2^0,$$

$$2^{-x^2} \le 1.$$

Значит, $0 < t \le 1$.

Получим уравнение

$$\frac{t^2 - 2t + a}{2t - 1} = 3.$$

Это уравнение должно иметь хотя бы один корень на интервале $0 < t \le 1$.

Преобразуем уравнение. Понятно, что знаменатель дроби не равен нулю, то есть $t \ne 0{,}5$.

$$t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0.$$

Чтобы решения существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, то есть $D \geq 0$. Найдем дискриминант.

$$D = 4(a+3)^2 - 4(a+3) \geq 0.$$

Разложим левую часть этого неравенства на множители.

$$(a+3)(a-1) \geq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \leq -3, \\ a \geq -2. \end{array}\right.$$

При таких значениях параметра a уравнение имеет решения.

Что делать дальше? Автор бестселлера «Математика — абитуриенту» В. В. Ткачук советует при решении задачи с параметрами повторить про себя 50–100 раз фразу о том, что требуется найти в задаче.

Последуем мудрому совету классика и еще раз повторим условие. Надо найти все значения параметра, при которых исходное уравнение имеет хотя бы одно решение. Что касается уравнения $t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0$, оно должно иметь хотя бы один корень такой, что $0 < t \leq 1$. Значит, нам стоит рассмотреть случаи $D = 0$ и $D > 0$.

1) Начнем со случая $D = 0$. Это происходит при $a = -3$ и $a = -2$. Подставим эти значения параметра в уравнение:

При $a = -3$ получим: $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ — не подходит.

При $a = -2$ получим: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ — подходит.

2) Осталось посмотреть, что будет при $a < -3$ или $a > -2$. Рассмотрим отдельно эти случаи.

а) $a < -3 \Rightarrow a + 3 < 0$.

Теперь мы знаем, какого знака коэффициенты в уравнении

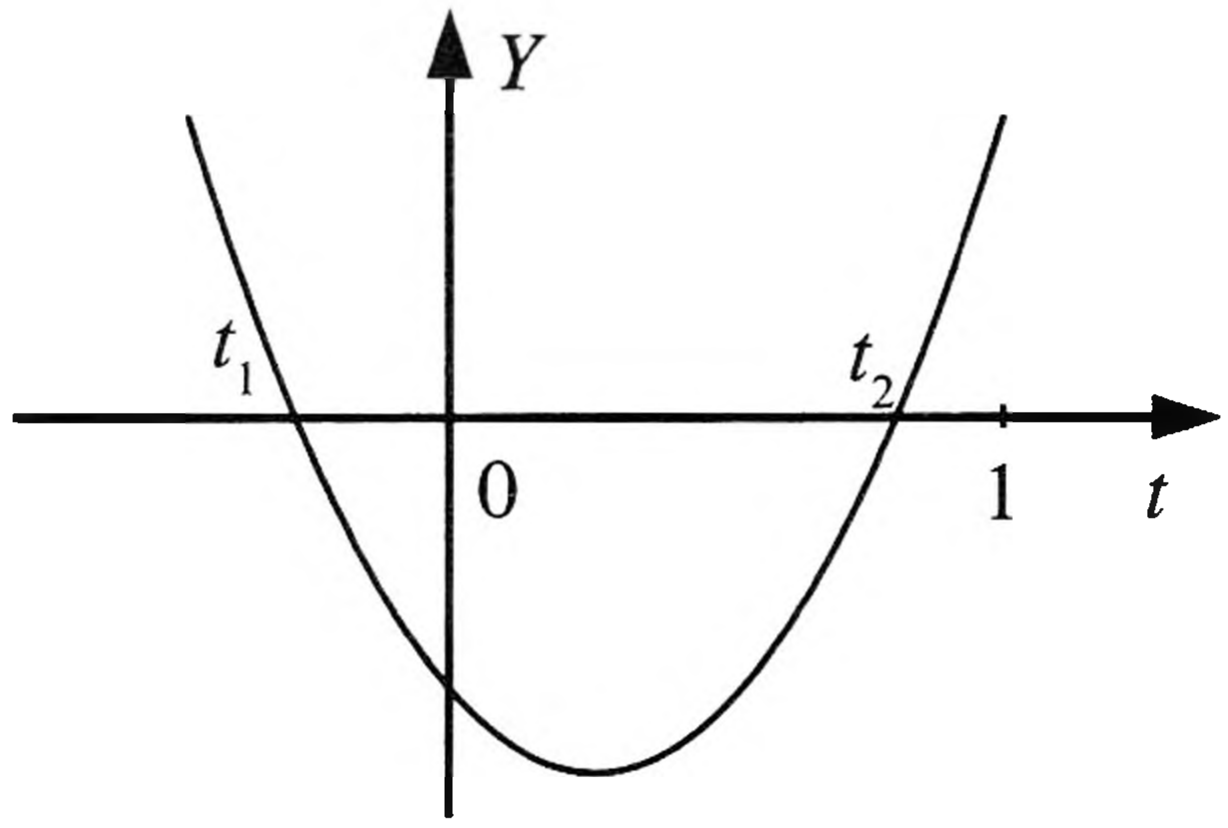
$$t^2 - 2(a+3)t + a + 3 = 0.$$

Поскольку $a + 3 < 0$, то по теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 < 0, \\ t_1 + t_2 < 0. \end{cases}$$

Первое условие означает, что корни разных знаков, то есть один из них обязательно положительный. Нам нужно, чтобы этот корень был не больше единицы.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - 2(a+3)t + a + 3$ и изобразим ее график, зная, что у уравнения $f(t) = 0$ один из корней отрицательный, а второй положителен и не больше 1. Тогда $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$, т. е. на концах промежутка [0; 1] функция принимает значения разных знаков).



Это значит, что $f(0)\cdot f(1)<0$. Обратите внимание, что мы не вычисляем корни по формуле корней квадратного уравнения. Мы обходим эту сложность так же, как и в задачах, которые мы рассмотрели первыми.

$$f(t)=t^2-2(a+3)t+a+3,$$

$$f(0)=a+3;\ f(1)=1-a-3.$$

$$(a+3)(1-a-3)<0,$$

$$(a+3)(-a-2)<0.$$

При $a+3<0$ это условие выполняется. Значит, все значения $a<-3$ нам подходят.

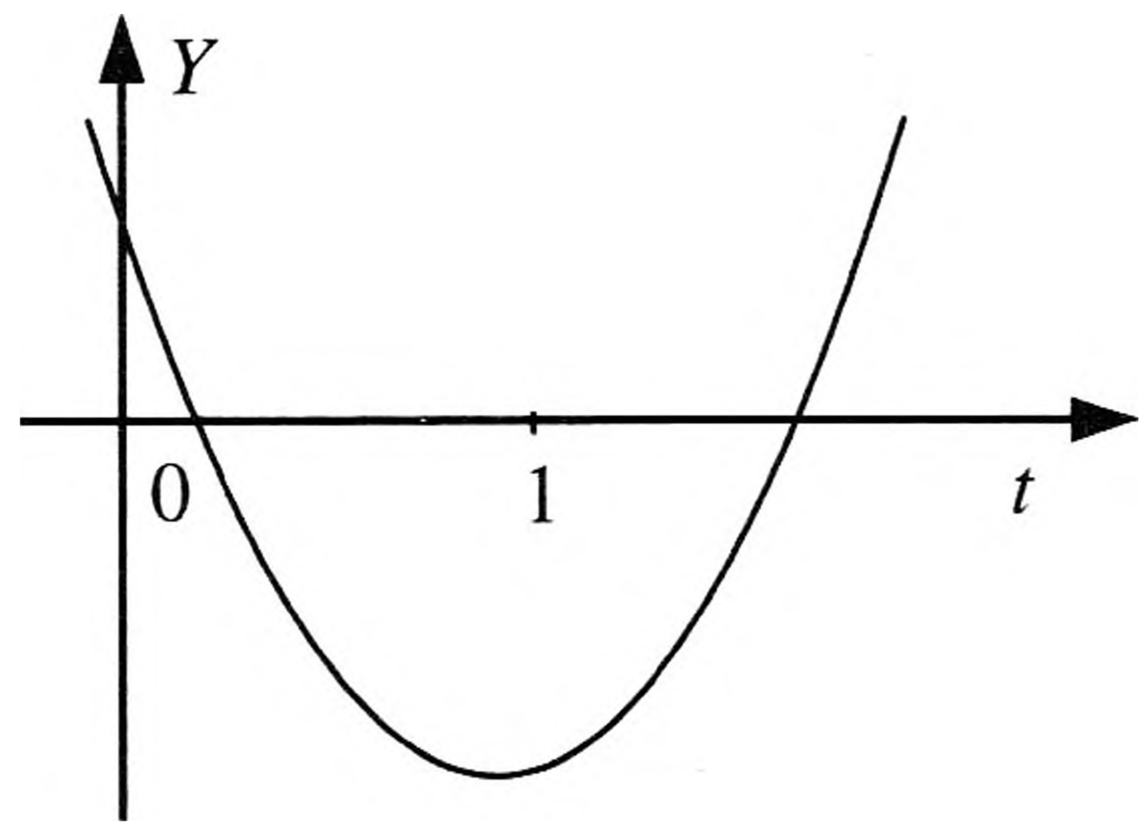
б) $a>-2 \Rightarrow a+2>0 \Rightarrow a+3>1$. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} t_1\cdot t_2=a+3, \\ t_1+t_2=2(a+3), \\ a+3>1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1\cdot t_2>1, \\ t_1+t_2>2. \end{cases}$$

Оба корня положительны, так как положительны их произведение и сумма.

Что еще можно сказать о t_1 и t_2?

Они положительны, и их произведение больше единицы. Это означает, что хотя бы одно из этих чисел больше единицы. Значит, нам нужен случай, когда $t_1<1$, $t_2>1$, то есть точка $t=1$ лежит между корнями уравнения.



Это значит:

$$f(1) < 0,$$
$$-a - 2 < 0,$$
$$a > -2.$$

Объединив случаи, получим.

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$.

11. При каких значениях a уравнение имеет ровно 3 корня?

$$\left|x + a^2\right| = \left|a + x^2\right|.$$

Это уравнение прекрасно. Слева модуль, справа модуль. Помните, в теме «модули» мы говорили, что делать в таком случае.

Так как обе части неотрицательны, их можно возвести в квадрат. Затем перенести все в левую часть, оставив в правой ноль, и разложить по формуле разности квадратов. Получим:

$$\left(x + a^2\right)^2 - \left(a + x^2\right)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x + a^2 - a - x^2 = 0, \\ x + a^2 + a + x^2 = 0. \end{array}\right.$$

Разложим на множители первое уравнение.

$$(x - a)(1 - x - a) = 0.$$

Теперь второе уравнение. На что оно похоже?

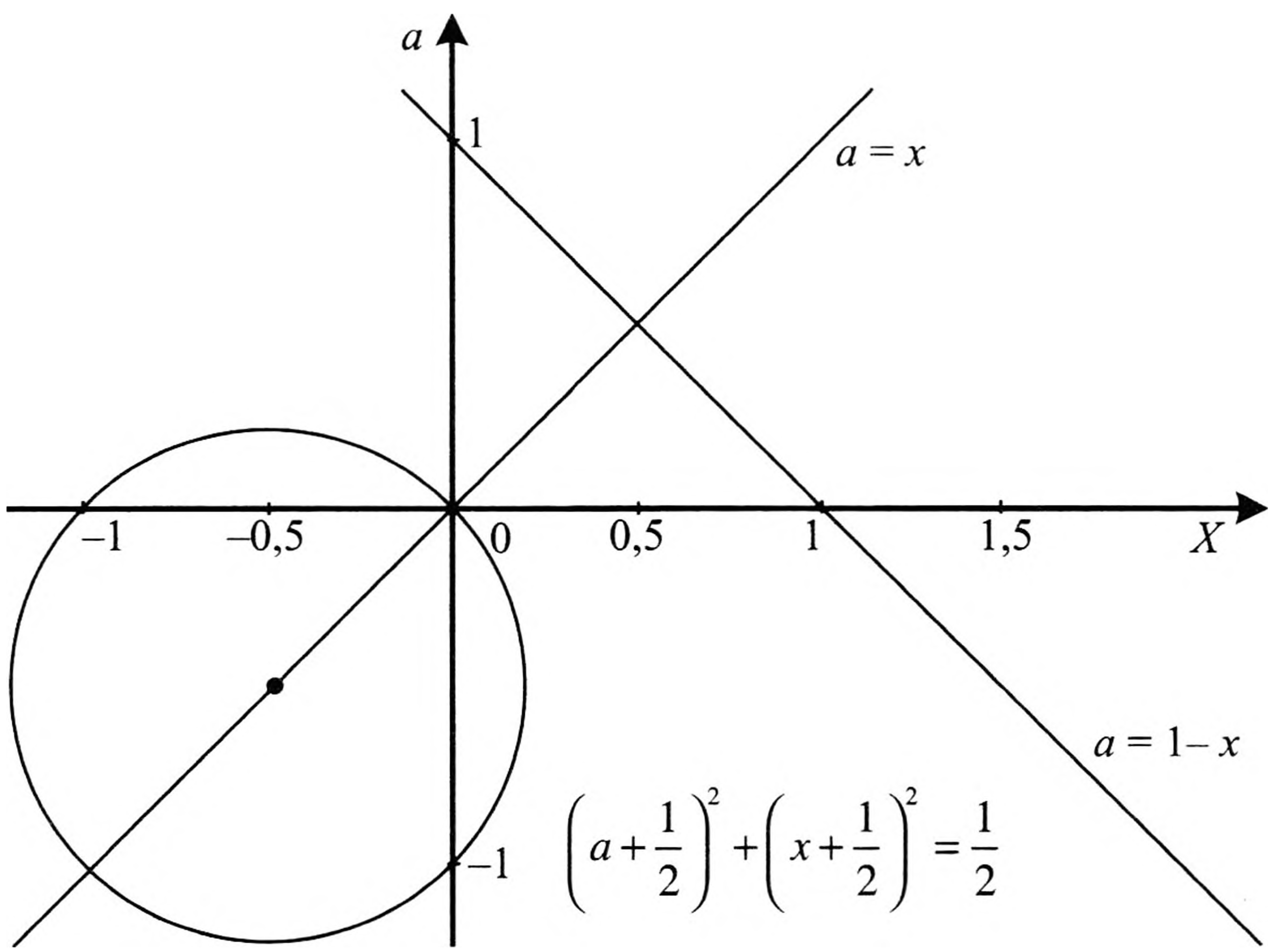
Будь в нем не x^2 и a^2, а x^2 и y^2, мы бы его свели к уравнению окружности. И здесь тоже окружность, только в координатах xOa. Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты:

$$a^2+a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Итак, в координатах xOa второе уравнение задает окружность с центром $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

А первое уравнение в координатах xOa задает две прямые: $a=x$ и $a=1-x$.



Нам надо найти, каким значениям a соответствует три значения x. Для этого будем проводить прямые, параллельные оси x. Три значения x соответствуют одному значению a в следующих четырех случаях:

1) Прямая касается окружности в верхней точке и пересекает обе прямые. Это происходит, если $a=R-0,5=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$.

2) Прямая проходит через начало координат и пересекает окружность в двух точках (причем начало координат — общая точка пересечения окружности и прямой $a = x$), а прямую $a = 1 - x$ в одной точке. Это соответствует значению $a = 0$.

3) Прямая проходит через вторую общую точку пересечения прямой $a = x$ и окружности $(-1; -1)$, пересекая окружность в двух точках, а прямую $a = 1 - x$ в одной точке. Это значение $a = -1$.

4) Прямая касается окружности в нижней точке и пересекает обе прямые. Этому значению соответствует $a = -R - 0{,}5 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}; -1; 0.$

Дорогие друзья! Для дальнейшего освоения темы «Задачи с параметрами» рекомендуем следующие материалы:

1) *В. В. Ткачук.* Математика — абитуриенту.

2) *Виктор Высоцкий.* Задачи с параметрами.

3) Видеокурс Анны Малковой «Задачи с параметрами, графический метод» (бесплатно на *Youtube*).

4) Видеокурс Анны Малковой «С5. Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике» на сайте *www.dvd.ege-study.ru.*

5) Задачи на сайтах для подготовки к ЕГЭ:

www.reshuege.ru

www.mathus.ru

www.alexlalin.net

Задачи с экономическим содержанием на ЕГЭ по математике

Простейшие задачи с экономическим содержанием. Прогрессии

Задачи о кредитах, вкладах, рентабельности производств и максимизации прибыли появились в вариантах ЕГЭ недавно. База для их освоения — это задачи на проценты, которые мы разбирали в самой первой главе. Кроме того, необходимо отличное знание тем «Арифметическая и геометрическая прогрессия», «Производная функции», «Наибольшее и наименьшее значение функции».

Начнем с повторения формул из темы «Проценты».

1. За 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

2. Если величину x увеличить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

3. Если величину x уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

4. Если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right).$$

5. Если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

6. Если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$$x\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2.$$

1. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

С чего начнем? Разберемся в том, что такое назначенная цена. Букинистический магазин покупает книги у населения. Пусть магазин купил книгу за 50 рублей, а продал за 80. Вот эти 80 рублей, за которые магазин продает книгу, и есть назначенная цена.

Введем переменные. Пусть x — цена, по которой магазин приобрел книгу, а y — назначенная цена, по которой магазин собирается ее продать.

Магазин продал книгу со скидкой 10%. Значит, цена, по которой в результате продана книга, составит $0{,}9y$. Прибыль, полученная в данном случае, составит $0{,}9y - x$. По условию задачи, это 8% от исходной цены, по которой магазин приобрел книгу, то есть, $0{,}9y - x = 0{,}08x$ или $0{,}9y = 1{,}08x$. Отсюда $y = 1{,}2x$.

Последнее уравнение означает, что назначенная цена y составляет 1,2 исходной цены — то есть 120% от исходной цены, по которой магазин книгу приобрел. А, значит, изначально магазин предполагал получить 20% прибыли.

Ответ: 20%.

В следующих нескольких задачах речь идет о кредитах и вкладах. Хорошо, а как вообще работает банк?

Доход банка образуется в виде разницы между процентом кредита и процентом вклада.

Например, клиент банка положил на свой сберегательный счет 100 тысяч рублей под 10% годовых. Через год он может получить в банке 110 тысяч рублей. Другому клиенту, наоборот, нужны 100 тысяч рублей. Банк выдает ему кредит под 30% годовых, и теперь этот клиент должен вернуть банку 130 тысяч рублей. Таким образом, прибыль банка составит 130 – 110 = 20 (тысяч рублей).

Пример 2

Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Пусть банк начисляет $p\%$ в год.

У клиента А после начисления процентов через год сумма вклада станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Соответственно, через два года эта сумма станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Клиент В сделал вклад позже, чем клиент А, на год. У него сумма вклада через год станет равной $7700\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Так как клиент А получил на 847 рублей больше клиента В, то

$$7700\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-7700\left(1+\frac{p}{100}\right)=847.$$

Вынесем 7700 за скобки:

$$7700\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)=847.$$

Чтобы не получить квадратное уравнение с огромными коэффициентами, сократим обе части уравнения на 77.

$$100\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)=11.$$

Сделаем замену $1+\frac{p}{100}=x$, тогда

$$100\left(x^2-x\right)=11,$$

$$100x^2 - 100x = 11,$$

$$100x^2 - 100x - 11 = 0.$$

Его корни $x_1 = -0{,}1$ и $x_2 = 1{,}1$. Отрицательный корень нам не подходит, поэтому $x = 1{,}1$.

Сделав обратную замену, получим

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}1.$$

Отсюда $p = 10\%$.

Ответ: 10.

Мы рассмотрим два типа задач о кредитах и вкладах. Для их решения нам понадобятся знания о том, как вычислять суммы арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметическая прогрессия

***Арифметическая прогрессия* — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:**

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

Фиксированное число d называется **разностью** арифметической прогрессии.

Например, последовательность 2, 5, 8, 11, ... является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Другой вид той же формулы:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Свойство арифметической прогрессии. Если числа *a*, *b*, *c* образуют арифметическую прогрессию, то 2*b* = *a* + *c*.

Другими словами, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

***Геометрическая прогрессия* — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа, не равного нулю:**

$$b_{n+1} = b_n q \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Фиксированное число q называется **знаменателем** геометрической прогрессии.

Например, последовательность 2, 6, 18, 54, ... является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Свойство геометрической прогрессии. Пусть числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Тогда $b^2 = ac$.

Другими словами, квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних.

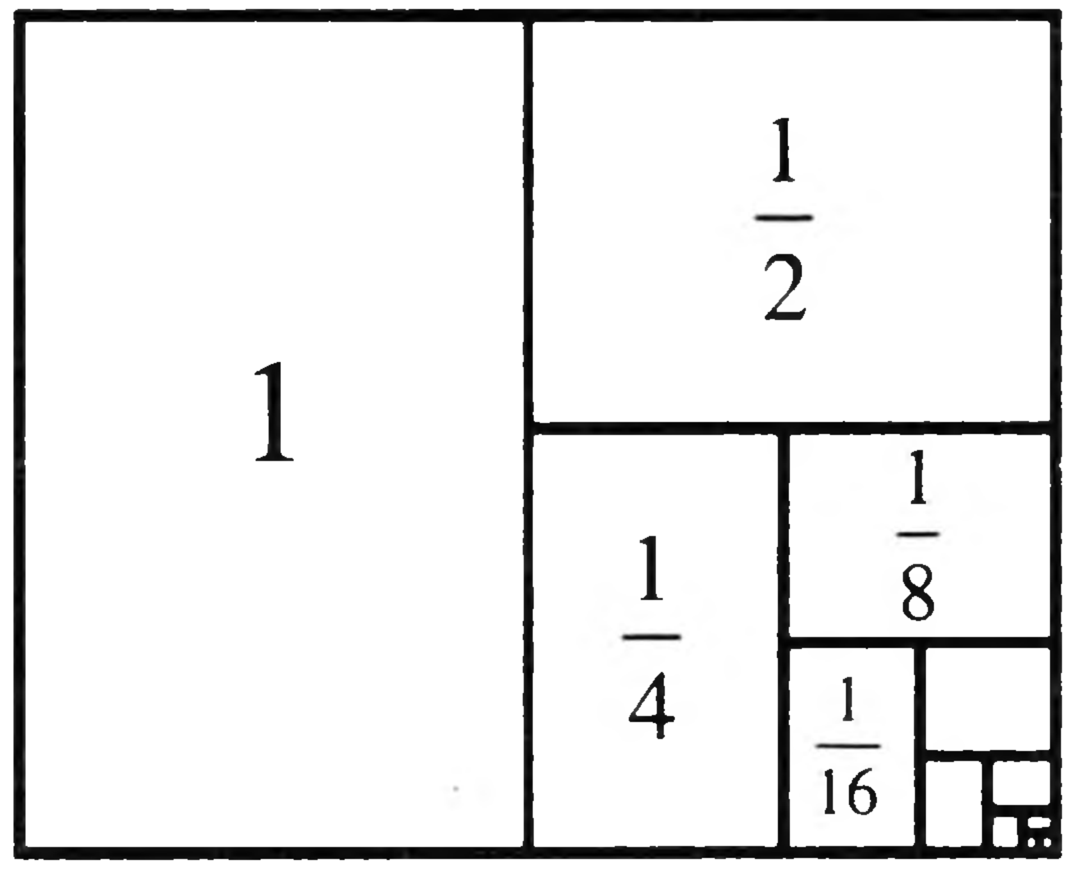
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Геометрическая прогрессия, знаменатель которой $|q| < 1$, называется убывающей. Если при этом число членов прогрессии бесконечно, такая прогрессия называется бесконечно убывающей.

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16} \ldots$ — пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Чему равна сумма приведенной выше бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

Посмотрим на рисунок.



К прямоугольнику с площадью 1 добавляем участки с площадью $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$... К чему стремится площадь полученной фигуры при бесконечном увеличении n, то есть при добавлении все более мелких участков? Очевидно, к двум.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии — число, которое находится по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Две схемы задач о вкладах и погашении кредитов

3. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счет, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счете. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счет, на который ежегодно кладет по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Вспомним формулу для начисления процентов по вкладу.

Первоначальный вклад через год увеличился на 20% и стал равен:

$$1000\left(1+\frac{20}{100}\right)=1000\cdot 1,2.$$

Разберемся с первым вкладом. В 2008 году Петров зачислил на счет 1000 рублей, и теперь каждый год эта первоначальная сумма увеличивается в 1,2 раза. Через n лет эта тысяча вырастет до $1000 \cdot 1,2^n$.

Однако на второй год Петров добавляет к вкладу еще 1000 рублей, и эта тысяча рублей лежит на счете на 1 год меньше. И если бы Петров на этом остановился, через n лет его вклад стал бы равен

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1}.$$

Но Петров каждый год добавляет к вкладу 1000 рублей, поэтому через n лет общая сумма будет

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1} + 1000 \cdot 1,2^{n-2} + \ldots$$

Основные ошибки, которые допускаются в подобных задачах — путаница в порядке действий. Что было вначале, а что — потом: пополнили вклад или начислили проценты? Аналогично в задачах про кредит: что сначала — начисляются проценты или принимается очередная выплата в счет погашения кредита? Поэтому внимательно читайте условие задачи!

Здесь в условии сказано: в каком году **после очередного пополнения** суммы вкладов сравняются. Это значит, что через n лет Петров положит на вклад очередную тысячу рублей, а проценты начислить еще не успеют.

$$1000 \cdot 1,2^n + 1000 \cdot 1,2^{n-1} + 1000 \cdot 1,2^{n-2} + \ldots + 1000.$$

Полученное выражение является геометрической прогрессией: каждый следующий член, начиная со второго, меньше предыдущего в 1,2 раза.

Мы говорили, что геометрической прогрессией называется последовательность $\{b_n\}$, каждый следующий член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, которое называется **знаменателем прогрессии**

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Сумма первых n членов прогрессии:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В нашей задаче $q = 1{,}2$ — знаменатель прогрессии, $b_1 = 1000$ — первый член. Количество слагаемых $n + 1$, так как $1000 = 1000 \cdot 1{,}2^0$. Найдет сумму S прогрессии для $n + 1$ члена.

$$S_{n+1} = 1000 \cdot \frac{1{,}2^{n+1} - 1}{1{,}2 - 1} = 5000 \cdot \left(1{,}2^{n+1} - 1\right).$$

Разберемся со вторым вкладом. Структура формулы абсолютно аналогична. Изменится лишь ежегодная сумма (2200 рублей) и начисляемый процент (сумма ежегодно будет увеличиваться на 44%, то есть в 1,44 раза).

$$2200 \cdot 1{,}44^k + 2200 \cdot 1{,}44^{k-1} + 2200 \cdot 1{,}44^{k-2} + \ldots + 2200,$$

где k — количество лет на втором вкладе, и оно на 6 лет меньше, чем на первом, поэтому $k = n - 6$.

Аналогично, сумма для $k + 1$ члена второй прогрессии

$$S_{k+1} = 2200 \cdot \frac{1{,}44^{k+1} - 1}{1{,}44 - 1} = 2200 \cdot \frac{1{,}44^{n-5} - 1}{1{,}44 - 1} = 5000 \cdot \left(1{,}44^{n-5} - 1\right).$$

Заметим, что $1{,}44 = 1{,}2^2$, поэтому

$$5000 \cdot \left(1{,}44^{n-5} - 1\right) = 5000 \cdot \left(1{,}2^{2n-10} - 1\right).$$

Так как суммы вкладов в результате сравнялись, получим:

$$5000 \cdot (1{,}2^{2n-10} - 1) = 5000 \cdot (1{,}2^{n+1} - 1),$$

$$1{,}2^{2n-10} = 1{,}2^{n+1},$$

$$2n - 10 = n + 1,$$

$$n = 11.$$

Значит, если первый вклад был сделан в 2008 году, то сравняются они в $2008 + 11 = 2019$ году.

Ответ: в 2019 году.

4. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Все расчеты будем вести в тысячах рублей. Это удобнее, поскольку не придется писать большое количество нулей. Решение уравнения в таком случае тоже будет в тысячах рублей.

Пусть сумма $S = 3900$ (тысяч рублей). Так как банк начисляет по вкладу 50% годовых, значит, через год сумма увеличится в 1,5 раза — то есть в $\frac{3}{2}$ раза.

$$3900 + 3900\cdot\frac{50}{100} = 3900\cdot\frac{3}{2}.$$

Вкладчик ежегодно вносит одну и ту же фиксированную сумму X. С учетом этого сумма в конце года:

$$3900\cdot\frac{3}{2} + X.$$

Так происходит четыре раза, так как в условии сказано о первых 4 годах хранения. Значит, по окончании этих четырех лет:

$$\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X.$$

По условию задачи к концу пятого года проценты начисляются еще раз, но вкладчик сумму X больше не добавлял, поэтому

$$\left(\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}.$$

По сравнению с первоначальной величиной S размер вклада увеличился на 725%, т. е. стал равен 825% S.

Поэтому

$$\left(\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2} = 8,25\cdot 3900.$$

Поделим обе части на $\frac{3}{2}$. Получим

$$\left(\left(\left(3900\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X\right)\cdot\frac{3}{2}+X=21450.$$

Раскроем последовательно скобки в левой части, начиная с внутренней.

Получили

$$3900\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot X+\left(\frac{3}{2}\right)^2 X+\frac{3}{2}X+X=$$

$$=3900\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+X\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1\right).$$

Этой формулой удобнее пользоваться в общем виде, чем выводить каждый раз.

Если к сумме вклада S добавляли в течение n лет каждый год $p\%$, а после начисления процентов добавляли еще некоторую сумму X, то в итоге сумма вклада станет равной

$$S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n+X\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+\ldots+1\right).$$

Формулу можно упростить, обозначив $1+\frac{p}{100}=t$.

Тогда через n лет сумма вклада равна

$$St^n+X\left(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+1\right).$$

Выражение в скобках — это сумма n членов геометрической прогрессии.

В нашей задаче $n=4$, $q=\frac{3}{2}$, $b_1=1$.

$$S_4=1\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4-1}{\frac{3}{2}-1}=2\cdot\left(\frac{81}{16}-1\right)=2\cdot\frac{65}{16}=\frac{65}{8}.$$

Получим

$$3900 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + X \cdot \frac{65}{8} = 21450.$$

Из данного линейного уравнения выразим X и после вычислений получим $X = 210$ тыс. руб.

Ответ: 210 тыс. руб.

Заметим, что в реальности проценты ставки банков по вкладам, конечно, не равны 50% годовых. Они намного ниже, чем в условиях этих задач.

5. Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

Стандартные задачи о кредитах, подобные этой, чаще всего встречаются в сборниках для подготовки к ЕГЭ.

Чтобы выплатить кредит за наименьшее количество лет (то есть быстрее), Савелию надо выплачивать ежегодно максимальную сумму. По условию задачи она должна быть не более 330 тысяч рублей, значит, возьмем предельное значение $Y = 330$ тыс. руб.

Размер кредита 1,4 млн руб., или 1400 тыс. руб. Так как ставка по кредиту 10% годовых, то ежегодно кредит увеличивается в 1,1 раза. Как и в предыдущей задаче, получим

$$((1400 \cdot 1{,}1 - 330) \cdot 1{,}1 - 330) \cdot 1{,}1 - 330\ldots$$

Данный процесс займет n лет. Конечно, можно просто посчитать «в лоб», не забывая при этом об аккуратности в расчетах, но мы воспользуемся готовой формулой, выведенной в предыдущей задаче. Через n лет сумма долга Савелия равна

$$1400 \cdot 1{,}1^n - 330\left(1{,}1^{n-1} + 1{,}1^{n-2} + \ldots 1{,}1 + 1\right).$$

В результате всех выплат Савелий либо погасил долг полностью, обнулив кредит, либо он погасил долг и у него появились на счете кредитной карты собственные средства, которыми он может пользоваться.

Это значит:

$$1400 \cdot 1{,}1^n - 330\left(1{,}1^{n-1} + 1{,}1^{n-2} + \ldots 1{,}1 + 1\right) \le 0.$$

В скобках записана знакомая нам сумма геометрической прогрессии для n членов, которую мы уже считали в предыдущих задачах

$$1400 \cdot 1{,}1^n \le 330 \cdot \frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1},$$

$$14 \cdot 1{,}1^n \le 33 \cdot 1{,}1^n - 33,$$

$$19 \cdot 1{,}1^n \ge 33,$$

$$1{,}1^n \ge \frac{33}{19}.$$

$\frac{33}{19}$ — это примерно 1,73. В левой части выражения $1{,}1^n$. Найдем n подбором.

$$1{,}1^2 = 1{,}21,\ 1{,}1^3 = 1{,}331,\ \ldots,\ 1{,}1^5 = 1{,}61051,\ 1{,}1^6 = 1{,}771561.$$

Значит, $1{,}1^6 > 1{,}73$ и $n = 6$.

Расчет в столбик здесь неизбежен. Пожалуйста, на экзамене выделите на такую задачу запас времени.

Ответ: 6 лет.

6. Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей?

Пусть Y — ежегодные выплаты. При этом по условию задачи $Y \le 320\,000$ рублей.

Будем вести расчеты в тысячах рублей для простоты вычислений.

Упростим задачу. Чтобы выплатить кредит за наименьшее количество лет n (то есть быстрее), Оле надо выплачивать ежегодно максимальную сумму. По условию задачи эта сумма должна быть не более 320 тысяч рублей. Возьмем предельное значение $Y = 320$ тыс. руб.

Через год после увеличения суммы долга на 10% получается $1200 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1200 \cdot 1,1.$

После первой выплаты сумма долга равна $S_1 = 1200 \cdot 1,1 - 320.$

Дальше у нас есть два пути. Можем просто считать, каким будет долг через два года, через три, через четыре… Алгоритм простой: каждый год сумма долга увеличивается в 1,1 раза и затем уменьшается на 320.

У этого способа есть недостаток: на ЕГЭ нельзя пользоваться калькулятором, а вычисления могут получиться объемными.

Другой путь — применение формулы, которую мы уже выводили. Через два года $S_2 = (1200 \cdot 1,1 - 320) \cdot 1,1 - 320.$

Через три года $S_3 = S_2 \cdot 1,1 - 320.$

В общем виде для первоначальной суммы S

$$S_1 = 1,1S - Y;$$

$$S_2 = 1,1^2 S - Y(1,1 + 1);$$

$$S_3 = 1,1^3 S - Y(1,1^2 + 1,1 + 1).$$

Через n лет

$$S_n = 1,1^n \cdot S - Y\left(1,1^{n-1} + 1,1^{n-2} + \ldots 1,1 + 1\right).$$

В скобках записана сумма n членов геометрической прогрессии, для которой $b_1 = 1$, $q = 1,1$.

$$S_n = 1,1^n \cdot S - Y \cdot 1 \cdot \frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1},$$

$$S_n = 1,1^n \cdot S - Y \cdot 10 \cdot \left(1,1^n - 1\right).$$

В условии сказано, что последняя сумма выплаты может быть не равна всем предыдущим (допустим, Оле осталось выплатить в последний год 200 рублей, она их выплачивает и закрывает кредит). Значит, сумма долга через n лет не должна превышать ежегодной выплаты.

$$S_n = 1,1^n \cdot S - Y \cdot 10 \cdot \left(1,1^n - 1\right) \le Y.$$

Тогда Оля полностью выплатит кредит за $n + 1$ год.
Заменой $1{,}1^n = t$ сведем неравенство к следующему

$$1200t - 320 \cdot 10 \cdot (t-1) \le 320,$$

$$120t - 320 \cdot (t-1) \le 32,$$

$$120t \le 32(10t-9),$$

$$\frac{120}{32} \le \frac{10t-9}{t}, t > 0;$$

$$\frac{10t-9}{t} \ge \frac{15}{4}.$$

Умножим обе части неравенства на $4t$, поскольку $t > 0$.

$$40t - 36 \ge 15t,$$

$$25t \ge 36,$$

$$t \ge \frac{36}{25},$$

$$t \ge \frac{144}{100},$$

$$t \ge 1{,}44.$$

Обратная замена: $1{,}1^n \ge 1{,}44$. Решаем подбором.
$1{,}1^2 = 1{,}21$ — не подходит,
$1{,}1^3 < 1{,}44$,
$1{,}1^4 > 1{,}44$.
Значит, $n = 4$.
Оля выплатит кредит за $n + 1$ год.
Ответ: 5 лет.

7. Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r% этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите *r*.

Эта задача отличается от уже разобранных нами задач на кредиты. Мы знаем, как действовать, если выплаты по кредиту производятся равными платежами.

А здесь мы видим новое условие: ***ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц***. Значит, платежи каждый месяц разные, однако, в них есть компонент, который каждый месяц одинаковый, — это часть суммы основного долга. Разными общие ежемесячные суммы будут за счет меняющегося выплачиваемого процента. Поэтому рассмотрим отдельно выплату основной суммы долга и выплату процентов.

Пусть N — сумма основного долга.

Каждый месяц Алексей выплачивает $\frac{1}{12}$ часть основного долга, то есть $\frac{N}{12}$.

В первый месяц Алексей выплатит $\frac{1}{12}$ часть основного долга, а также проценты, составляющие r% от основного долга: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}$.

Во второй месяц он также выплатит $\frac{1}{12}$ часть основного долга. А вот проценты теперь начисляются не на всю сумму долга N, а на $\frac{11}{12}$ этой суммы, поскольку $\frac{1}{12}N$ Алексей уже выплатил.

Значит, общая выплата во второй месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{11}{12}$.

Аналогично за третий месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{10}{12}$.

И так далее.

За последний, двенадцатый месяц: $\frac{N}{12}+\frac{rN}{100}\cdot\frac{1}{12}$.

Всего по условию задачи сумма, выплаченная за 12 месяцев, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая в кредит. Она равна $N\left(1+\frac{13}{100}\right)=1{,}13N$.

Общую сумму, выплаченную банку, найдем, сложив все выплаты, которые получились:

$$N+\frac{Nr}{100}\left(1+\frac{11}{12}+\frac{10}{12}+\ldots+\frac{1}{12}\right)=1{,}13N,$$

$$r\left(1+\frac{11}{12}+\frac{10}{12}+\ldots+\frac{1}{12}\right)=13.$$

В скобках записана сумма арифметической прогрессии с $n = 12$ членами, первым членом $a_1=\frac{1}{12}$ и разностью $d=\frac{1}{12}$.

Вспомним, что арифметической прогрессией называется последовательность $\{a_n\}$, каждый следующий член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, которое называется **разностью прогрессии**

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Сумма первых n членов прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_1+2d(n-1)}{2}\cdot n.$$

В нашей задаче

$$S_n=\frac{1+\frac{1}{12}}{2}\cdot 12=\frac{13}{2},$$

$$r\cdot\frac{13}{2}=13,$$

$$r=2.$$

Ответ: 2%.

8. 15 января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита производились в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Пусть сумма, взятая в кредит, равна S. В феврале после начисления процентов стало $1{,}05S$. После выплаты суммы Y_1 осталось 90% от долга, или $0{,}9S$.

$$1{,}05S - Y_1 = 0{,}9S.$$

Покажем в таблице, как сумма долга к концу каждого месяца зависит от ежемесячных выплат:

Февраль	$1{,}05S - Y_1 = 0{,}9S$
Март	$1{,}05 \cdot 0{,}9S - Y_2 = 0{,}8S$
Апрель	$1{,}05 \cdot 0{,}8S - Y_3 = 0{,}7S$
Май	$1{,}05 \cdot 0{,}7S - Y_4 = 0{,}6S$
Июнь	$1{,}05 \cdot 0{,}6S - Y_5 = 0{,}5S$
Июль	$1{,}05 \cdot 0{,}5S = Y_6$

Выплачиваемая сумма каждый месяц разная. В последний месяц оставшаяся сумма вместе с начисленными процентами была выплачена полностью.

Выразив из каждой строчки Y_1, Y_2, Y_3 ... (то есть ежемесячные выплаты), получим:

$Y_1 = 1{,}05S - 0{,}9S;$
$Y_2 = 1{,}05 \cdot 0{,}9S - 0{,}8S;$
$Y_3 = 1{,}05 \cdot 0{,}8S - 0{,}7S;$
$Y_4 = 1{,}05 \cdot 0{,}7S - 0{,}6S;$
$Y_5 = 1{,}05 \cdot 0{,}6S - 0{,}5S;$
$Y_6 = 1{,}05 \cdot 0{,}5S.$

Сложив их, получим общую сумму выплат

$$Y = 1{,}05S(1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5) - S(0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5).$$

Заметим в скобках суммы арифметических прогрессий

$$Y = S\left(1{,}05 \cdot \frac{1 + 0.5}{2} \cdot 6 - \frac{0{,}5 + 0{,}9}{2} \cdot 5\right) = 1{,}225S.$$

Общая сумма выплат Y получилась больше суммы самого кредита S на 22,5%

Ответ: 22,5%.

Мы рассмотрели две схемы погашения кредитов. В задачах 5 и 6 выплаты производятся равными платежами. В задачах 7 и 8 суммы выплат подобраны так, что сумма долга уменьшается равномерно. В вариантах ЕГЭ встречаются оба типа задач. Заметим, что для решения задач первого типа мы используем формулу суммы геометрической прогрессии, а для второго — формулу суммы арифметической прогрессии.

Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций

9. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Эта не вполне стандартная задача была на досрочном ЕГЭ в 2015 году.

Возникает вопрос: что значит «если рабочие трудятся t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара»?

Мы знаем формулу, согласно которой работа равна производительности, умноженной на время, причем производительность мы считали постоянной.

Однако фраза из условия задачи означает, что здесь производительность — не константа, а величина, зависящая от времени по определенному правилу. Другими словами, и производительность, и время работы зависят от некого параметра t. Заметим, что буквой t здесь обозначается не время, а этот параметр.Это новая для нас ситуация.

Владимир, хозяин заводов, хочет минимизировать время работы и при этом произвести 580 единиц товара. Очевидно, время работы на каждом из заводов будет различным. Пусть оно равно x^2 и y^2 соответственно. При этом количество произведенного товара на этих заводах будет $2x$ и $5y$.

Составим таблицу.

	Время	Сколько произвели товара
I завод	x^2	$2x$
II завод	y^2	$5y$

За каждый час работы Владимир выплачивает рабочим 500 рублей. Значит, надо минимизировать время работы, то есть найти минимум функции

$$Z = x^2 + y^2$$

— при условии, что $2x + 5y = 580$.

Получим систему двух уравнений.

$$\begin{cases} Z = x^2 + y^2, \\ 2x + 5y = 580. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x.

$$x = \frac{580 - 5y}{2}.$$

Подставим в первое уравнение

$$Z = \frac{(580 - 5y)^2}{4} + y^2.$$

Получим функцию

$$Z(y) = \frac{(580 - 5y)^2}{4} + y^2 = \frac{29}{4} y^2 - 1450y + 84\,100.$$

Графиком данной функции является парабола, у которой ветви направлены вверх. Поэтому наименьшее значение достигается в вершине. Найдем координату вершины параболы: $y_0 = 100$.

Тогда $Z_{\min} = 11\ 600$.

За каждый час Владимир выплачивает 500 рублей. Умножив $Z_{\min}$ на 500, получим минимальную еженедельную сумму оплаты труда рабочих.

Ответ: 5 800 000 руб.

10. Строительство нового завода стоит 78 млн руб. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Разберемся, о чем идет речь в задаче. На постройку завода израсходовали 78 млн рублей. Необходимо, чтобы постройка завода окупилась. А это значит, что завод должен получить прибыль не менее, чем эти 78 млн рублей. Если завод производит за год x тысяч единиц продукции, то он тратит на такое производство $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей. То есть затраты являются квадратичной функцией производительности. Соответственно, ежегодная прибыль составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$ (млн руб.).

Будем вести расчеты в млн рублей (для удобства расчетов).

Мы хотим, чтобы ежегодная прибыль была такой, чтобы строительство завода окупилось не более, чем за три года. Прибыль за три года есть $3\left(px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)\right)$. И эта прибыль должна быть больше или равна стоимости постройки завода, то есть

$$3\left(px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right)\right) \geq 78$$

$$px - \left(0{,}5x^2 + 2x + 6\right) \geq 26$$

Выразим отсюда p. Помним, что $x > 0$, где x — затраты на производство.

$$p \geq \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x}.$$

Мы видим, что цена, по которой продают продукцию, является функцией затрат на производство.

Наименьшее значение цены

$$p = \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x}.$$

Нам надо найти, при каком x достигается наименьшее значение функции $p(x)$, равное $p_{\min}$. Найдем производную функции $p(x)$ по формуле производной частного

$$p'(x) = \frac{(0,5 \cdot 2 \cdot x + 2)x - \left(0,5x^2 + 2x + 32\right) \cdot 1}{x^2},$$

$$p'(x) = \frac{0,5x^2 - 32}{x^2}.$$

Мы знаем, что функция может иметь экстремум (минимум или максимум) только в тех точках, в которых производная равна нулю или не существует.

$$\frac{0,5x^2 - 32}{x^2} = 0.$$

Так как знаменатель не может быть равен нулю (затраты на производство положительны), то

$$0,5x^2 - 32 = 0,$$

$$x^2 = 64,$$

$$x = \pm 8.$$

Нам подходит только положительное значение $x_0 = 8$. Убедимся, что данная точка является точкой минимума данной функции при $x > 0$. Точка является точкой минимума, если при переходе через нее производная меняет знак с минуса на плюс. Подставим в производную значения из каждого интервала.

$$p'(1) = \frac{0,5 \cdot 1^2 - 32}{1^2} = -31,5 < 0;$$

$$p'(9) = \frac{0,5 \cdot 9^2 - 32}{9^2} = \frac{17}{162} > 0.$$

Действительно, точка $x_0 = 8$ является точкой минимума, а, значит, функция будет принимать свое наименьшее значение именно в ней. Подставим $x_0 = 8$ в нашу функцию

$$p_{\min}(x) = \frac{0,5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 32}{8} = 10.$$

Ответ: $p = 10$ тыс. руб.

Для дальнейшегоо освоения темы рекомендую свой видеокурс «ЕГЭ по математике. Задачи с экономическим содержанием». Его можно найти здесь: *www.dvd.ege-study.ru*.

Нестандартные задачи на ЕГЭ по математике

Эта глава написана моим коллегой Игорем Яковлевым — преподавателем, каждый год выпускающим десятки призеров и победителей олимпиад по математике и физике.

Известно, что на ЕГЭ по математике многие школьники не приступают к заключительной, нестандартной задаче и даже не читают ее (а зачем? Все равно, мол, не решу). И совершенно напрасно!

Эти задачи долгое время были известны под номером С6. Так мы и будем их называть.

Как правило, такая задача состоит из двух или трех пунктов, среди которых есть совсем несложные. За всю задачу дается 4 первичных балла, по 1–2 балла за каждый пункт. Поэтому, сделав хотя бы часть (скажем, просто предъявив нужный пример в одном из пунктов), можно получить себе в копилку дополнительные первичные баллы. А они дадут прирост итогового результата по стобалльной шкале!

Для решения нестандартных задач необходим минимальный запас знаний. Это арифметика 6-го класса (все, что связано с делимостью) и сведения по прогрессиям из алгебры 9-го класса. Больше ничего.

Почему же задача С6 считается (и, в общем-то, является) самой сложной на ЕГЭ по математике? Она не решается по шаблону. Она требует так называемой математической культуры — умения грамотно строить рассуждения. А умение это у большинства школьников отсутствует начисто — ведь в школе до развития математической культуры дело обычно не доходит.

Учиться культурно рассуждать можно и обязательно нужно. Задача С6 предоставляет для этого отличную возможность. Получаться начнет не сразу, так что готовиться к С6 следует начинать задолго до ЕГЭ. Рецепт тут один: решать, решать и решать.

Повторим, что такое натуральные, целые, рациональные числа. Эту терминологию нужно твердо знать!

Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, ... Натуральные числа мы используем для счета, а счет начинается с единицы. Поэтому — внимание: ноль не является натуральным числом!

Множество натуральных чисел обозначается N.

Целые числа — это числа 0, ±1, ±2, ±3, ... Таким образом, целые числа — это ноль и «плюс-минус натуральные». Натуральные числа являются целыми положительными числами.

Множество целых чисел обозначается Z. (Именно это обозначение мы постоянно используем в тригонометрических уравнениях для записи ответов.)

Рациональные числа — это всевозможные дроби $\frac{m}{n}$ с целыми m и n (при этом, конечно, $n \neq 0$; чтобы избежать данной оговорки, говорят также, что m — целое, а n — натуральное).

Любое целое число является в то же время рациональным (например, $3 = \frac{6}{2}$). Однако число $\frac{1}{2}$ не является целым.

Множество рациональных чисел обозначается Q.

Делимость

Понятие делимости относится к целым числам (в частности, к натуральным). Начиная с этого момента все числа, о которых мы здесь говорим, считаются целыми. Если в каком-то случае это окажется не так, мы сделаем специальную оговорку.

Целые числа мы обозначаем $a, b, c, ..., k, l, m, n, ..., x, y, z$, то есть используем все строчные буквы латинского алфавита.

Вы прекрасно знаете, что число 12 делится на 4, но не делится на 5. Дадим формальное определение делимости.

Число a делится на число $b \neq 0$, если найдется число c такое, что $a = bc$.

Если a делится на b, то число b называется *делителем* числа a. Например, число 12 имеет шесть делителей: это 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

В задачах мы часто будем пользоваться следующими утверждениями:

— Если числа a и b делятся на c, то $a + b$ тоже делится на c.

— Если числа a и b делятся на c, а m и n — целые, то $ma + nb$ тоже делится на c

Сформулируем наиболее важные признаки делимости.

- a делится на 2 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a есть 0, 2, 4, 6 или 8;
- a делится на 5 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a есть 0 или 5;

- a делится на 10 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a равна 0;
- a делится на 3 $\Leftrightarrow$ сумма цифр a делится на 3;
- a делится на 9 $\Leftrightarrow$ сумма цифр a делится на 9.

Четность

Число называется *четным*, если оно делится на 2. Число называется *нечетным*, если оно не делится на 2.

Вот все четные числа: 0, ±2, ±4, ±6, ... Если a четно, то оно имеет вид $a = 2n$. А вот все нечетные числа: ±1, ±3, ±5, ... Ясно, что если a нечетно, то оно имеет вид $a = 2n + 1$.

Следующие утверждения весьма очевидны, и вы можете использовать их при решении задачи C6 (никто от вас не потребует их доказательства). Но вы можете доказать их в качестве упражнения.

- Сумма любого числа четных слагаемых четна.
- Сумма четного числа нечетных слагаемых четна. Сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна.
- Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечетны, то произведение нечетно. Если хотя бы один множитель четный, то произведение четно.

Деление с остатком

Число 13 не делится на 5. Наибольшее число, которое делится на 5 и не превосходит 13, равно $10 = 5 \cdot 2$. Таким образом, $13 = 5 \cdot 2 + 3$, и мы скажем, что в результате деления 13 на 5 получается частное 2 и остаток 3.

Оказывается, любое число a можно разделить с остатком на любое число b, *не равное* 0. А именно, найдутся два числа q и r такие, что $a = bq + r$, и при этом будет выполнено неравенство $0 \le r < |b|$. Число q называется **частным**, а число r — **остатком** от деления a на b. Если $r = 0$, то есть $a = bq$, то a делится на b.

Например, при делении 7 на 2 мы получаем частное 3 и остаток 1. При делении 9 на 8 — частное 1 и остаток 1, а при делении 8 на 9 — частное 0 и остаток 8.

Остаток от деления любого нечетного числа на 2 равен единице. Вот почему всякое нечетное число может быть записано в виде $2n + 1$.

Остатки оказываются полезными во многих ситуациях. Допустим, в ходе решения задачи вам нужно доказать, что равенство $n^2 = 3k + 2$ не может выполняться ни при каких целых числах n и k. Рассуждаем следующим образом.

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Иными словами, возможны три случая: $n = 3m$, $n = 3m + 1$ или $n = 3m + 2$. Какие остатки при делении на 3 будут у числа n^2? Давайте посмотрим, что получается в каждом из трех случаев.

$(3m)^2 = 9m^2$ (остаток 0);

$(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$ (остаток 1);

$(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = (9m^2 + 12m + 3) + 1$ (остаток 1).

Таким образом, *квадрат целого числа при делении на* 3 *не может давать остаток* 2. Следовательно, равенство $n^2 = 3k + 2$ действительно невозможно ни при каких n и k.

Каноническое разложение

Всякое число делится на 1 и на само себя. Если натуральное число p не равно 1 и не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и p, то такое число p называется **простым**.

Вот первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Число 2 — единственное четное простое число.

Число, не равное 1 и не являющееся простым, называется *составным*. Например, 15 — составное число (оно делится на 3). Число 1036 — тоже составное (оно четное). Единица не является ни простым числом, ни составным.

Докажем, что число $3^{15} - 1$ является **составным**.

Число 3^{15} — нечетно. Значит, число $3^{15} - 1$ четное, то есть у него есть делитель 2.

Оказывается, всякое число можно разложить на простые множители. Например:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$;

$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Такое разложение единственно с точностью до порядка множителей и называется **каноническим разложением.** Утверждение о существовании и единственности канонического разложения носит название **основной теоремы арифметики.**

Каноническое разложение дает полную картину делителей данного числа (и, в частности, позволяет найти их количество). Именно, пусть $a = p_1^{n_1} p_1^{n_2} \ldots p_S^{n_S}$ — каноническое разложение числа a. Тогда каноническое разложение любого делителя числа a состоит из простых множителей, входящих в набор $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, показатели степени которых не превосходят соответственно чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Например, любой делитель числа $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ и $c \in \{0, 1\}$.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное двух чисел (НОК) — это наименьшее число, которое делится на оба данных числа.

Наибольший общий делитель двух чисел (НОД) — это наибольшее число, на которое делятся два данных числа.

Чтобы найти НОД или НОК, надо разложить числа на простые множители. Другими словами, воспользоваться каноническим разложением этих чисел.

Найдем, например, наименьшее общее кратное (НОК) и наибольший общий делитель (НОД) для чисел 72 и 48.

Представим 72 и 48 в виде произведений простых множителей и запишем канонические разложения для этих чисел:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

Оба этих числа делятся на 3 и на 2^3. Следовательно, наибольшее число, на которое они делятся, то есть их НОД, равен $2^3 \cdot 3 = 24$.

Как найти наименьшее общее кратное чисел 72 и 48, то есть наименьшее число, которое на них делится? Это число должно делиться на 3 и на 2^3, поскольку и 3, и 2^3 присутствуют в канонических разложениях чисел 72 и 48. Кроме того, оно должно делиться на 3^2 и на 2^4. Значит, НОК чисел 72 и 48 равно:

$$\text{НОК}(72, 48) = 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 144.$$

Обратите внимание. Мы домножили НОД этих чисел на множители, дополнительно присутствующие в одном из разложений.

Если просто перемножить числа 72 и 48, то получится общее кратное, которое не будет наименьшим.

Взаимно простые числа

Числа называются **взаимно простыми**, если они не имеют общих делителей, кроме 1. Иными словами, числа a и b взаимно просты, если НОД $(a, b) = 1$. Можно сказать и так: числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

Если числа взаимно простые (не имеют общих множителей, кроме 1), то их НОД равен единице, а НОК — произведению этих чисел.

Например, числа 8 и 15 взаимно просты. Числа 9 и 15 не являются взаимно простыми — у них имеется общий делитель 3.

Числа взаимно просты тогда и только тогда, когда их канонические разложения состоят из непересекающихся наборов простых чисел. Например, числа $2^3 \cdot 5 \cdot 13^2$ и $3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$ являются взаимно простыми.

Свойства взаимно простых чисел. Пусть числа a и b взаимно просты. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если некоторое число делится на a и b, то оно делится и на их произведение ab.

2. Если an делится на b, то n делится на b.

(Вы легко поймете, почему так получается, если представите себе «непересекающиеся» канонические разложения чисел a и b и вдобавок вспомните, что каноническое разложение делителя служит «частью» канонического разложения делимого числа.)

Согласно утверждению 1, например, если некоторое число делится на 8 и на 15, то оно делится на $8 \cdot 15 = 120$. То, что числа взаимно просты, — важное условие. Так, 12 делится на 4 и на 6, но не делится на $4 \cdot 6 = 24$.

Утверждение 2 обычно работает в ситуациях типа следующей. Пусть, например, $5n = 9m$. Так как $5n$ делится на 9 и числа 5 и 9 взаимно просты, то n делится на 9. По той же самой причине m делится на 5.

Последовательности

Что такое последовательность? Представьте себе устройство, которое с некоторыми интервалами выдает одно число за другим. Например: 2, –3, 15, 28, –6, 0, 3, ... Набор чисел на выходе этого устройства и будет последовательностью.

Более строго, **последовательность чисел**, или **числовая последовательность**, — это набор чисел, в котором каждому числу можно присвоить некоторый номер, причем каждому номеру отвечает единственное число данного набора. Номер — это натуральное число; нумерация начинается с единицы.

Так, в приведенной выше последовательности первый номер имеет число 2 (это первый член последовательности), а номер пять — число –6 (это пятый член последовательности).

Число с номером n (то есть n-й *член* последовательности) обозначается a_n (или b_n, c_n, ...).

Весьма удобно, когда n-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задает последовательность: –1, 1, 3, 5, 7, ... Формула $a_n = (-1)^n$ задает последовательность: –1, 1, –1, 1, ...

Все рассмотренные нами последовательности являются *бесконечными*, то есть содержащими бесконечное множество чисел. Но бывают и *конечные* последовательности. Собственно, любой конечный набор чисел является конечной последовательностью. Например, конечная последовательность 1, 2, 3, 4, 5 состоит из пяти чисел.

Вы уже знакомы с двумя видами последовательностей. Это арифметическая и геометрическая прогрессии.

Мы продолжим тему и расскажем о геометрических прогрессиях, состоящих из целых чисел.

Важное замечание: в конечной геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, знаменатель q может не быть целым числом! Вот пример: числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{3}{2}$.

В задаче С6 (19) иметь дело с рациональным знаменателем не всегда удобно. К счастью, это и не нужно. Дело в том, что для *конечной* геометрической прогрессии, состоящей из *целых* чисел, существует несколько иное представление, хорошо приспособленное именно для задач С6.

Представление конечной целочисленной геометрической прогрессии.

- Геометрическая прогрессия из трех целых чисел имеет вид ka^2, kab, kb^2 (k, a, b — целые).
- Геометрическая прогрессия из четырех целых чисел имеет вид ka^3, ka^2b, kab^2, kb^3.
- Геометрическая прогрессия из пяти целых чисел имеет вид ka^4, ka^3b, ka^2b^2, kab^3, kb^4.

Вообще, пусть $c_1, c_2, ..., c_n$ — целые числа, образующие геометрическую прогрессию. Тогда найдутся целые числа k, a, b такие, что $c_1 = ka^{n-1}$, $c_2 = ka^{n-2}b$, $c_3 = ka^{n-3}b^2$, ..., $c_n = kb^{n-1}$.

Метод «оценка плюс пример»

«Оценка плюс пример» — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A. Действуем в два этапа.

1. *Оценка.* Показываем, что выполнено неравенство $A \geq \alpha$.

2. *Пример.* Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$.

Тем самым доказано, что наименьшее значение A равно α.

Мы проиллюстрируем данный метод на двух задачах.

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Выделим полный квадрат:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Поскольку квадрат неотрицателен, получаем оценку: $f(x) \geq 2$. Приводим пример, когда равенство достигается: $f(1) = 2$. Следовательно, искомое наименьшее значение равно 2.

2. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?

Число 7 должно быть в первой группе, поскольку оно простое и никакое другое число на него не делится. Следовательно, частное не меньше 7 (оценка).

Приведем пример разбиения, при котором частное равно 7. Первая группа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; вторая группа: 8, 9, 10. В таком случае

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{8 \cdot 9 \cdot 10} = 7.$$

Следовательно, наименьшее значение частного равно 7.

Хорошо, но откуда взялся пример? Возникает ощущение, что он с неба свалился. В общем-то, для читающего вашу работу так оно и есть. Запомните: при записи решения вы не обязаны объяснять, каким образом додумались до примера. Просто предъявляете пример, и все! Угадали вы его, почувствовали или получили свой пример логическим путем — это неважно.

Мы, тем не менее, будем по возможности озвучивать те мысли, которые позволяют нужный пример сконструировать. Оформляться это будет следующим образом.

В данном случае нам захотелось разбить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 на две группы с равными произведениями. Для этого находим каноническое разложение произведения всех этих чисел:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2.$$

Как видим, оно является квадратом числа $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. Остается лишь найти числа, произведение которых равно 720. Это, например, 8, 9 и 10.

Учимся решать нестандартные задачи!

Как школьники относятся к нестандартным задачам?

Многие просто их боятся, потому что не знают секрета, о котором я сейчас скажу. **Первый пункт в нестандартной задаче — как правило, простой. Все, что нужно, — внимательно прочитать и понять условие и ответить на вопрос.** И один первичный балл у вас в кармане!

Другие смело бросаются в бой без всякой подготовки. Не зная, как взяться, они тратят час, два или три на перебор вариантов и не всегда находят решение.

И поэтому оптимальный путь — не бояться нестандартных задач и решать их как можно больше! Разобрав, а затем и решив самостоятельно 50–80 задач С6, вы выйдете на новый уровень понимания. Мои ученики знают это и каждый год берут свои баллы за С6.

Давайте начнем с простых задач. Я снова передаю слово своему коллеге Игорю Яковлеву — лучшему специалисту по этой теме, которого я знаю.

3. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

Обозначим числа a и b. Тогда $a + b = 43$.

По условию, НОК$(a, b) = 120 \cdot$ НОД (a, b).

Пусть $x =$ НОД (a, b). Так как числа натуральные, то x — тоже натуральное число. При этом $a \vdots x$ (a делится на x без остатка), $b \vdots x \Rightarrow (a+b) \vdots x \Rightarrow 43 \vdots x$.

43 — простое число, значит, $x = 43$ или $x = 1$.

Если $x = 43$, то $a \vdots 43$, $b \vdots 43 \Rightarrow a \geq 43$, $b \geq 43$.

Но сумма чисел должна быть равна 43, и оба числа натуральные. Даже если взять минимальные значения $a = 43$, $b = 43$, то их сумма больше 43. Пришли к противоречию. Значит $x \neq 43$.

Тогда $x = 1$. Значит, числа a и b — взаимно простые.

Тогда НОК этих чисел равно их произведению. Так как оно в 120 раз больше НОД, то НОК$(a, b) = 120$.

Получим систему. Решим ее с учетом того, что числа a и b — натуральные.

$$\begin{cases} a+b=43, \\ ab=120; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{120}{a}=43, \\ b=\dfrac{120}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2-43a+120}{a}=0, \\ b=\dfrac{120}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-43a+120=0, \\ b=\dfrac{120}{a}. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение, получим $a = 3$, $b = 40$ или $a = 40$, $b = 3$.

Ответ: 3 и 40.

4. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел $k^4 + 15k^2 + 35$ и $k^3 + 8k$.

Если *a* делится на *c* и *b* делится на *c*, то для целых *M* и *N* выражение *Ma* + *Nb* делится на *c*.

В нашем случае $k^4 + 15k^2 + 35$ делится на p и $k^3 + 8k$ делится на p.

Второе из этих выражений домножим на k и вычтем полученный результат из первого выражения. Тогда полученное выражение $k^4 + 15k^2 + 35 - k^4 - 8k^2 = 7k^2 + 35$ тоже делится на p.

Мы получили более простую систему условий: $k^3 + 8k$ делится на p и $7k^2 + 35$ делится на p.

Первое из этих выражений умножим на 7 и вычтем из него второе, умноженное на k. Результат тоже должен делиться на p.

$$7k^3+56k-7k^3-35k=21k.$$

Итак, $21k$ тоже делится на p.

Дальше понятно. Выражение $7k^2 + 35$ домножим на 3 и вычтем из него $21k^2$. Результат также должен делиться на p.

$$3(7k^2+35)-21k^2=105.$$

Получили, что 105 делится на p. Отлично!

Разложим число 105 на простые множители

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

По условию задачи числа p должны быть простыми. Единица не относится к простым числам, значит, возможно, что $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$.

Согласно условию, если мы найдем хотя бы одно целое число k, для которого p из данного набора будет общим делителем чисел $k^4 + 15k^2 + 35$ и $k^3 + 8k$, то данное число p нам подойдет.

1) $p = 3$. Подставим $k = 1$, $1^4 + 15 \cdot 1^2 + 35 = 51 \vdots 3$, $1^3 + 8 \cdot 1 = 9 \vdots 3$. Условие выполнено.

2) $p = 5$. Подставим $k = 5$, $\left(5^4 + 15 \cdot 5^2 + 35\right) \vdots 5$, $\left(5^3 + 8 \cdot 5\right) \vdots 5$. Считать, что получится в результате, в данном случае необязательно, так как, согласно нашей теореме, каждое слагаемое делится на 5. Значит, будет делиться и сумма. Аналогично и для следующего p. Условие выполнено.

3) $p = 7$. Подставим $k = 7$, $\left(7^4 + 15 \cdot 7^2 + 35\right) \vdots 7$, $\left(7^3 + 8 \cdot 7\right) \vdots 7$. Условие выполнено.

Ответ: 3, 5, 7.

5. На доске написано число 8. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).
а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?
б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 72?
в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 832?

а) Вначале на доске написано 8. Через минуту на доске появится 16. Еще через минуту — 16, 32 или 24. Все числа, которые выписывает Вася, будут делиться на 8. Но число 2012 не делится на 8, и потому никогда не появится на доске.

Ответ: нет.

б) 72 делится на 8. Подберем пример: Вася написал 8, потом $8 \cdot 2 = 16$, потом $8 + 16 = 24$, потом еще раз $8 + 16 = 24$. Сумма всех чисел получилась $8 + 16 + 24 + 24 = 72$.

Ответ: да.

в) Поскольку все числа возникающей последовательности имеют общий множитель 8, мы можем все члены последовательности разделить на 8. Таким образом, сначала на доске написано число 1. Вася совершает описанные в условии операции, и вопрос ставится так: через какое наименьшее время на доске может появиться число 104 (равное 832 : 8).

Итак, вначале Вася написал число 1.

Через минуту на доске появится 2, через две минуты — или $2 \cdot 2 = 4$, или $2 + 1 = 3$.

Мы доберемся до числа 104 быстрее, если будем умножать на 2 последний результат, а не складывать с предыдущим.

В этом случае на доске будут появляться числа: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64.

Дальше умножать на 2 уже нельзя — результат будет больше, чем 104. Придется на каком-либо шаге применить сложение.

Покажем, что за 7 минут Вася не доберется до числа 104. Сумма больших из полученных чисел будет меньше, чем 104.

$$64 + 32 = 96;$$
$$96 < 104.$$

Суммы любых двух чисел из набора 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64 не превышают 96. Следовательно, достичь числа 104 за 7 шагов Вася не сможет, и тогда число шагов $n \geq 8$. Получили ***оценку***.

Пример для наименьшего $n = 8$: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 104.

Мы получили 104, сложив 96 и 8.

Ответ: 8 минут.

6. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Пусть a — число солдат в первом взводе, b — число солдат во втором взводе.

Очевидно, что $51 \le a < b \le 68$. (1)

а) Подходящий пример: $a = 51 = 17 \cdot 3$, $b = 68 = 17 \cdot 4$ (при этом число солдат в роте равно $51 + 68 = 119 < 120$). Тогда роту можно построить в 7 рядов по 17 человек; первые три ряда — первый взвод, остальные четыре ряда — второй взвод.

Ответ: 51 и 68.

б) Предположим, что рота построена требуемым образом по 11 человек в ряд. Тогда a и b делятся на 11. С учетом неравенств (1) имеем единственную возможность $a = 55$, $b = 66$. Но тогда $a + b = 121 > 120$ — противоречие.

Ответ: нет.

в) Пусть рота построена требуемым образом по k человек в ряд ($k > 8$). Тогда a и b делятся на k. Из неравенств (1) следует, что $k \le 17$ (поскольку разница между числами 51 и и 68 равна 17).

Остается перебрать 10 вариантов, в которых $k = 8, 9, ..., 17$.

В каждом из них на отрезке [51; 68] может быть самое большее два числа a и b. Обозначаем $r = a + b$ число солдат в роте.

1) $k = 8 \Rightarrow a = 56$, $b = 64$, $r = 120$.

2) $k = 9 \Rightarrow a = 54$, $b = 63$, $r = 117$.

3) $k = 10 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.

4) $k = 11$ — невозможно по пункту б).

5) $k = 12 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.

6) $k = 13 \Rightarrow a = 52$, $b = 65$, $r = 117$.

7) $k = 14 \Rightarrow a = 56$, и не существует $b \in [51; 68]$.

8) $k = 15 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.

9) $k = 16 \Rightarrow a = 64$, и не существует $b \in [51; 68]$.

10) $\mathrm{k} = 17 \Rightarrow a = 51$, $b = 68$, $r = 119$.

С учетом условия $r < 120$ мы видим, что в роте может быть 117 или 119 солдат.

Ответ: 117 или 119.

7. На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, деленная на их количество.

В условии сказано, что на доске написаны положительные и отрицательные числа. Есть ли среди этих чисел нули? — Да, могут быть и нули. Они не внесут вклад в сумму чисел, зато повлияют на их среднее арифметическое.

Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S = -7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n = p + m + z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+ = 6p$, $S_- = -12m$, и так как $S = S_+ + S_-$, то:

$$-7n = 6p - 12m.$$

а) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n = 48$.

Ответ: 48.

б) Из равенства $-7 \cdot 48 = 6p - 12m$ получаем после сокращения на 6:

$$2m - p = 56.$$

Кроме того:

$$p + m + z = 48.$$

Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также дает остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или $m = 34 - k$.

Соответственно,

$$p = 2m - 56 = 2\,(34 - k) - 56 = 12 - 2k.$$

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \le 12$.

Приведем пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12, а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12\cdot 6+34\cdot(-12)}{48}=-7.$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

Ответ: 12.

8. Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше $27 \cdot 2 = 54$. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53. Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, $S \le 53$.

а) Да, набор может содержать ровно 13 единиц. Например, он содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

$$S = 3 + 4 + 5 + 17 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 53.$$

Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3,4,5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмем набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма S получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добрав остаток единицами.

б) Предположим, что набор содержит k единиц ($0 \le k \le 12$). Остальные $30 - k$ чисел набора (помимо 3, 4, 5) назовем вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальные числа набора не меньше 1. Для максимальной суммы S тогда получаем:

$$S > 3 + 4 + 5 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 54.$$

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то $16 \cdot 1 + 3 + 4 + 5 = 28$. Поэтому остается разобрать случаи, когда количество k единиц в наборе менее 16. Остальные $30 - k$ чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

- $k = 13$. Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственным набором с ровно тринадцатью единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше $17 \cdot 2 = 34$, и сумма S станет больше 53.

А для предъявленного набора имеем: $3 + 4 + 5 + 8 \cdot 2 = 28$.

- $k = 14$ или $k = 15$. Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдется двойка. В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум $15 \cdot 3 = 45$, что противоречит условию.

Остается взять 14 единиц и эту двойку: $14 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 28$.

9. Каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть a_1, a_2, ..., a_{10} — числа, данные в условии и записанные на карточках вначале (число a_k записано на карточке с номером k). Аналогично, b_1, b_2, ..., b_{10} — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания. Согласно условию рассматриваем число:

$$c = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{10} + b_{10}). \qquad (*)$$

а) Предположим, что $c = 0$. Тогда в произведении (*) найдется нулевой множитель, то есть $a_k + b_k = 0$ для некоторого k. Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числа a_k нет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что c нечетно. Тогда в произведении (*) каждый множитель должен быть нечетным, то есть $a_k + b_k$ нечетно для любого k $(1 \le k \le 10)$.

Следовательно, для каждого k в паре (a_k, b_k) одно число четное, а другое нечетное. Поэтому в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется 10 четных и 10 нечетных чисел. Однако из условия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 четных чисел и 12 нечетных.

Возникшее противоречие показывает, что c обязано быть четным. В частности, 1 получиться не может.

в) Далее считаем, что $c > 0$. Предположим, что $c = 2$. Тогда в произведении (*) ровно один из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, $a_m + b_m = \pm 2$ для некоторого m и $a_k + b_k = \pm 1$ для всех остальных k.

Числа a_m и b_m оба четные или оба нечетные. В каждой из остальных девяти пар (a_k, b_k) одно число четное, а другое нечетное. Стало быть, в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется или 11 четных и 9 нечетных чисел (если a_m и b_m четны), или, наоборот, 9 четных и 11 нечетных чисел (если a_m и b_m нечетны). Но, как было указано выше, четных и нечетных чисел в этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай $c = 2$ невозможен. Поскольку c четно, имеем оценку: $c \ge 4$.

Приведем пример, в котором достигается равенство $c = 4$. Пусть сначала на карточках написаны числа в исходном порядке:

$$1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11.$$

Затем на тех же карточках оказались числа:

$$-2, 1, 4, -3, 7, -5, 9, -8, -11, 10.$$

Получаем:

$$c = (1-2)\cdot(-2+1)\cdot(-3+4)\cdot(4-3)\cdot(-5+7)\cdot(7-5)\times$$
$$\times(-8+9)\cdot(9-8)\cdot(10-11)\cdot(-11+10) = 4.$$

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение c равно 4.
Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

10. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.
а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе
было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в группе. Пусть m_1 мальчиков сходили в театр, m_2 мальчиков сходили в кино, d_1 девочек сходили в театр, d_2 девочек сходили в кино. Для случая похода в театр имеем:

$$m_1 \le \frac{3}{11}(m_1 + d_1) \Rightarrow 8m_1 \le 3d_1.$$

Для случая посещения кино:

$$m_2 \le \frac{3}{7}\left(m_2 + d_2\right) \Rightarrow 4m_2 \le 3d_2.$$

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

$$8\,(m_1 + m_2) \le 3d_1 + 6d_2.$$

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем $m_1 + m_2 > m$. Кроме того, очевидно, $d_1 \le d$ и $d_2 \le d$. Получаем:

$$8m \le 8\,(m_1 + m_2) \le 3d + 6d,$$

то есть

$$8m \le 9d. \qquad (*)$$

а) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3 мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \le \frac{3}{11}\cdot(3+10),\ 7 \le \frac{3}{7}\cdot(3+10).$$

Как построен пример? Прежде всего, значения $m = 10$ и $d = 10$ не противоречат неравенству (*), и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берем неравенства $8m_1 \le 3d_1$ и $4m_2 \le 3d_2$, задействуем девочек по максимуму ($d_1 = d_2 = 10$) и находим подходящие m_1 и m_2.

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: $m \ge 11$. Тогда $d \le 9$. Имеем: $8m \ge 88$, $9d \le 81$, что противоречит неравенству (*). Следовательно, $m \le 10$, и с учетом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

в) Перепишем неравенство (*) следующим образом:

$$8m \le 9d \Rightarrow \frac{m}{d} \le \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{m}{d} + 1 \le \frac{8}{17} \Rightarrow \frac{m+d}{d} \le \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{d}{m+d} \ge \frac{8}{17}.$$

Как видим, доля девочек не меньше 8/17. Приведем пример, когда равенство достигается. Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в кино сходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \le \frac{3}{11}\cdot(3+8),\ 6 \le \frac{3}{7}\cdot(6+8).$$

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна $\frac{8}{17}$.

Ответ: а) да; б) 10; в) $\frac{8}{17}$.

11. Перед каждым из чисел 6, 7, ..., 11 и 9, 10, ..., 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

В первом наборе шесть чисел; обозначим $a_1 = \pm 6$, $a_2 = \pm 7$, ..., $a_6 = \pm 11$. Во втором наборе девять чисел; обозначим $b_1 = \pm 9$, $b_2 = \pm 10$, ..., $b_9 = \pm 17$. Согласно условию строится следующая сумма:

$$\begin{aligned} S = {} & (a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \ldots + (a_1 + b_9) + \\ & + (a_2 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_2 + b_9) + \\ & \ldots \\ & + (a_6 + b_1) + (a_6 + b_2) + \ldots + (a_6 + b_9). \end{aligned}$$

Приводя подобные, получаем:

$$S = 9(a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + 6(b_1 + b_2 + \ldots + b_9),$$

или

$$S = 9A + 6B,$$

где $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ и $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_9$.

1) Ясно, что сумма S получается наибольшей, когда все числа берутся с плюсом:

$$S_{max} = 9 \cdot (6 + 7 + \ldots + 11) + 6 \cdot (9 + 10 + \ldots + 17) = 1161.$$

2) Заметим, что среди чисел a_1, ..., a_6 ровно три нечетных. Следовательно, A нечетно. Поэтому и $S = 9A + 6B$ нечетно. Кроме того, S делится на 3.

Наименьшее по модулю нечетное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, $S > 3$ (оценка). Приведем пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

$$\begin{aligned} & 9 \cdot (6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11) + \\ & + 6 \cdot (9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 - 17) = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, $S_{min} = 3$.

Как мы додумались до этого примера? Вот некоторые наводящие соображения.

Пишем: $9A + 6B = 3$, то есть $3A + 2B = 1$. Следовательно, нам нужно добиться, чтобы $3A$ и $2B$ отличались на единицу (поскольку знаки можно расставлять как угодно). Сумму B можно сделать равной 5 (вычитая из 9 четыре единицы), а для A можно получить значение 3 (складывая три единицы). Тогда $3A = 9$, $2B = 10$, а это как раз то, что нам нужно.

Ответ: 3 и 1161.

12. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Найдем каноническое разложение числа 1512:

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Пусть также $1512 = c_1c_2c_3c_4c_5$, где $c_1, \ldots, c_5$ — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел $c_1, \ldots, c_5$ образуют геометрическую прогрессию. Тогда, согласно представлению конечной целочисленной геометрической прогрессии, найдутся целые числа k, a, b такие, что:

$$c_1 = ka^4,\ c_2 = ka^3b,\ c_3 = ka^2b^2,\ c_4 = kab^3,\ c_5 = kb^4.$$

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда $b > a$. Перемножая числа $c_1, \ldots, c_5$, получим:

$$1512 = k^5a^{10}b^{10}.$$

Выходит, что 1512 делится на 10-ю степень некоторого натурального числа $b > 1$. Но это противоречит каноническому разложению числа 1512 (где нет простых множителей в десятой степени). Следовательно, числа $c_1, \ldots, c_5$ не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа c_1, c_2, c_3, c_4 образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Тогда:

$$c_1 = ka^3,\ c_2 = ka^2b,\ c_3 = kab^2,\ c_4 = kb^3.$$

Перемножаем числа $c_1, \ldots, c_5$:

$$1512 = k^4a^6b^6c_5.$$

Снова противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа $b > 1$. Поэтому и в данном случае ответ отрицательный.

Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей $c_1, \ldots, c_5$ не найдется четырех членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдется и подавно. Поэтому решение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) из методических соображений.

в) Предъявляем соответствующий пример: $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 1512$. Числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{3}{2}$.

Пример найден следующим образом. Предположим, что числа c_1, c_2, c_3 образуют геометрическую прогрессию: $c_1 = ka^2$, $c_2 = kab$, $c_3 = kb^2$.

Тогда $1512 = k^3a^3b^3c_4c_5$. Глядя на каноническое разложение числа 1512, берем $k = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $c_4 = 7$, $c_5 = 1$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

13. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.
а) Может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем $\dfrac{7}{6}$.

Четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, имеют вид:

$$ka^3,\ ka^2b,\ kab^2,\ kb^3.$$

Остается заметить, что $6^3 = 216 > 210, 7^3 = 343 < 350$, и положить $k = 1$.

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел, образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытаться доказать, что это невозможно.

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти членов:

$$ka^4,\ ka^3b,\ ka^2b^2,\ kab^3,\ kb^4.$$

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что $b > a$. Поскольку все члены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

$$ka^4 > 210, \qquad (*)$$

$$kb^4 < 350. \qquad (**)$$

Из неравенства (**) следует, что b может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

- $b = 2$. Тогда $a = 1$. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > 210;$$

$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{2^4} < 21.$$

Противоречие.

- $b = 3$. Тогда $a = 1$ или $a = 2$. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > \frac{210}{2^4} > 13;$$

$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{3^4} < 5.$$

Противоречие.

- $b = 4$. Тогда $a = 1{,}2$ или 3. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > \frac{210}{3^4} > 2;$$

$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{4^4} < 2.$$

Снова противоречие.

Противоречия, полученные во всех трех случаях, показывают, что прогрессия не может состоять из пяти членов.

Ответ: а) да; б) нет.

14. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

а) Да, все НОД могут быть равны единице. Пример:

11 18

12 17

13 10

14 9

15 16

б) Допустим, что все НОД попарно различны. Их десять, поэтому среди них найдется двузначное число. Если два различных числа имеют двузначный НОД, то хотя бы одно из них больше 20. Но в нашем наборе такого числа нет — противоречие.

в) Из предыдущего пункта следует, что количество попарно различных НОД не превосходит девяти. Далее, НОД двух чисел данного набора не может равняться 7 или 8, так как на 7 делится только 14, а на 8 — только 16. Значит, количество попарно различных НОД не более семи.

Пример расстановки, при которой количество различных НОД равно семи:

10 15

14 9

11 18

13 12

17 16

В самом деле, НОД (18,9) = 9, НОД (9,15) = 3, НОД (15,10) = 5, НОД (10,14) = 2, НОД (16,12) = 4, НОД (12,18) = 6, а остальные НОД равны 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

15. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причем и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили разное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

а) Пусть m юношей отправили письма. Из них m_1 отправили 4 письма, а m_2 отправили по 21 письму. При этом $m_1 \geq 2$, $m_2 \geq 2$.

Тогда $4m_1 + 21m_2 = 7d$.

d — количество девушек, $d = m$.

Общее количество юношей $m = m_1 + m_2 = d$.

Тогда

$$4m_1 + 21m_2 = 7(m_1 + m_2);$$
$$3m_1 = 14m_2.$$

Например, $m_1 = 14$, $m_2 = 3$. Тогда $42 = 42$. Проверим, все ли условия выполняются.

$$m = m_1 + m_2 = 14 + 3 = 17 = d.$$
$$4 \cdot 14 + 21 \cdot 3 = 119,$$
$$7 \cdot 17 = 119,$$
$$119 = 119.$$

Ответ: да.

б) Пусть все девушки получили по k писем.

Тогда

$$4m_1 + 31m_2 = d \cdot k,$$
$$4m_1 + 31m_2 = (m_1 + m_2) \cdot k,$$
$$m_1(k-4) = m_2(21-k),$$
$$m_1 = \frac{m_2(21-k)}{k-4}.$$

Значит, $\begin{cases} 21-k>0, \\ k-4>0, \end{cases}$ откуда $4<k<21$.

Так как $d = m_1 + m_2$, то $d = m_2\left(\dfrac{17}{k-4}\right)$. Количество девушек — натуральное число. Поэтому $17 \vdots (k-4)$ или $d \vdots 17$.

1. $d \vdots 17$. Самое маленькое d в таком случае 17. Пример для него есть в пункте а.

2. $17 \vdots (k-4)$. Но 17 — простое число, делится на 1 или 17. Тогда $k = 5$ или $k = 21$. Последнее нам не подходит, так как k строго меньше 21. Отсюда $d = 17m_2$, $m_1 = 16m_2$. При этом по условию наименьшее значение $m = 2$. Тогда $m_1 = 16 \cdot 2 = 32$.

Всего юношей, как и девушек, $d = 2 + 32 = 34$. Это больше, чем 17, а нам нужно наименьшее количество.

Ответ: 17.

Как еще лучше освоить эту тему? Я рекомендую вам видеокурс Игоря Яковлева «Ключ к С6». Это полная видеозапись 4-часового мастер-класса, который Игорь Вячеславович провел в 2014 году. И конечно, практика — то есть решение реальных задач ЕГЭ. Найти видеокурс можно найти здесь: *www.dvd.ege-study.ru*.

Послесловие

Идея этой книги пришла ко мне неожиданно.

Однажды, в 2006 году, нас с сыном задержали в Египте из-за ошибки с билетами. На нашем самолете улетел кто-то другой, а мы вместо холодной ноябрьской Москвы остались в солнечной Хургаде на неопределенное время.

Тогда я и задумала написать простой и понятный учебник по математике. Подлетая к Москве, я радовалась возвращению домой и не знала, что на ближайшие годы моей главной и любимой работой станет написание методических материалов, запись видеокурсов по математике и проведение мастер-классов для школьников и учителей.

Я много путешествую, причем редко езжу на курорты, предпочитая труднодоступные, чаще всего горные районы. Гималаи, Тибет, Центральная и Юго-Восточная Азия — мои любимые направления. Поэтому большую часть этой книги я писала в путешествиях: в самолетах, поездах, в уютных кафе, на тропических островах и в высокогорных гестхаузах Индии и Непала. Помню, как удивлялись американцы и французы, дойдя до домика на высоте 4000 метров и обнаружив уже несколько дней живущую там «*crasy russian*» с ноутбуком, пишущую книгу по математике.

Я работаю для тех, кто хочет учиться. Я знаю, что не у всех есть возможность заниматься с профессиональными репетиторами, и хочу, чтобы качественное образование стало доступным каждому школьнику России. Надеюсь, что моя книга поможет вам!

И еще — я с огромным уважением отношусь к школьным учителям. Работа учителя особенная, потому что ее результаты обычно проявляются через много лет, когда ученики вырастают и становятся взрослыми. И поэтому учителю необходима вера. В то, что усилия не потрачены напрасно, и вы, дорогие наши ученики, станете образованными, успешными и счастливыми людьми. Это не трудно. Не сложнее, чем освоить математику.

Успеха вам в изучении математики и в жизни!

Дорогие друзья, я буду рада вашим отзывам об этой книге.

Пишите: Anna@EGE-Study.ru

Анна Малкова

Справочный материал

1. Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 30 (учите наизусть, как таблицу умножения)

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

2. Греческий алфавит

Αα альфа	Ββ бета	Γγ гамма	Δδ дельта	Εε эпсилон	Ζζ дзета
Ηη эта	Θθ тета	Ιι йота	Κκ каппа	Λλ лямбда	Μμ мю
Νν ню	Ξξ кси	Οο омикрон	Ππ пи	Ρρ ро	Σσ сигма
Ττ тау	Υυ ипсилон	Φφ фи	Χχ хи	Ψψ пси	Ωω омега

Полезные сайты для подготовки к ЕГЭ

1. www.EGE-Study.ru

Портал Образовательной компании ЕГЭ-Студия. Это мой сайт. Множество бесплатных материалов по математике и другим предметам, видеоуроки, запись на мой годовой авторский онлайн-курс подготовки к ЕГЭ, статьи о выборе профессии и многое другое.

2. http://dvd.ege-study.ru/

Полный видеокурс для успешной сдачи ЕГЭ по математике. 12 дисков. Более 30 часов видео.

Видеокурс состоит из двух частей.

Курс «Получи пятерку!» — часть 1 + С1, тригонометрия, 5 дисков. Курс «Премиум» — вся часть 2, 7 дисков.

Видеокурс заменяет год занятий с репетитором!

3. www.reshuege.ru

Содержит тысячи заданий ЕГЭ с решениями и ответами. Вы можете решать как отдельные задания по темам, так и варианты ЕГЭ. Очень полезно для тренировки.

4. www.mathus.ru

Полный авторский курс подготовки к ЕГЭ по физике, а также статьи для углубленной подготовки к ЕГЭ по математике и олимпиадам по математике и физике.

5. www.alexlarin.net

Тренировочные варианты ЕГЭ, часто повышенной сложности. Форум, где решения задач можно обсудить с коллегами. Все тренировочные, диагностические и экзаменационные работы ФИПИ и МИОО.

6. www.anna-malkova.ru

Это мой блог. Профессиональные фотографии и рассказы о путешествиях в Гималаи, Тибет, Китай, Юго-Восточную Азию и другие необычные страны.

Содержание

Учебное издание

0+

Анна Георгиевна Малкова

МАТЕМАТИКА
АВТОРСКИЙ КУРС ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

Ответственный редактор *А. Яненко*
Технический редактор *Ю. Давыдова*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*

Формат 84x108 $^{1}/_{32}$. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Заказ № 2267

ООО «Феникс»
344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59

Изготовлено в России
Дата изготовления: 03.2019.

Изготовитель: АО «Первая Образцовая типография»
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, Россия, Ульяновская обл.,
г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14